第一章

集合与简易逻辑

复习指南

1. 了解集合的意义及其表示方法,了解空集、全集、子集、交集、并集、补集的概念及其表示方法,了解集合与集合、元素与集合的关系符号,并能运用这些符号表示集合与集合、元素与集合的关系.
2. 理解命题、量词、充分条件、必要条件、充分必要条件的概念.

命题探究

本章是每年考试的必考内容,也是比较容易得分的知识点.集合在近几年考试中主要从三个方面考查:一是考查集合的概念、集合的基本关系及常用数集的符号表示;二是考查集合的基本运算,命题常以两个集合的交集、并集和补集运算为主,多与绝对值、不等式等相结合;三是考查命题、量词的概念,充分条件、必要条件和充要条件的判定,多与函数等相结合.

知识结构

- 集合与简易逻辑
  - 集合的概念与集合之间的关系
    - 集合的概念与表示法
    - 集合间的关系
      - 子集
      - 真子集
  - 集合的运算
    - 集合的交集
    - 集合的并集
    - 集合的补集
  - 简易逻辑
    - 命题
    - 量词及逻辑联结词
    - 充分、必要、充要条件

第一节　集合的概念与集合之间的关系

知识清单

知识点一　集合的概念与表示法

1. 集合

把具有某种属性的一些确定的对象看成一个整体，便形成了一个集合，常用大写英文字母 A,B,C 等表示.

2. 元素

集合中的每一个确定的对象叫作这个集合的元素，常用小写英文字母 a,b,c 等表示.

3. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性的特征.

4. 常用的集合

(1)空集. 不含任何元素的集合叫作空集，记作 $\varnothing$.

(2)正整数集. 所有正整数组成的集合叫作正整数集，记作 $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{N}^*$.

(3)自然数集. 所有自然数组成的集合叫作自然数集，记作 $\mathbf{N}$.

(4)整数集. 所有整数组成的集合叫作整数集，记作 $\mathbf{Z}$.

(5)有理数集. 所有有理数组成的集合叫作有理数集，记作 $\mathbf{Q}$.

(6)实数集. 所有实数组成的集合叫作实数集，记作 $\mathbf{R}$.

5. 集合的两种表示法

(1)列举法. 把集合的元素一一列举出来，写在大括号内，这种表示集合的方法叫作列举法.

注意

用列举法表示集合时，要注意以下几点：

①元素之间用“，”隔开.

②元素不能重复(满足集合中元素的互异性).

③元素不能遗漏.

④当集合中的元素较少时用列举法比较简单；若集合中的元素较多或无限，但存在一定的规律，在不发生误解的情况下，也可以用列举法表示.

(2)描述法. 用集合所含元素的共同特性表示集合的方法叫作描述法.

描述法表示集合的一般形式是 $\{x\mid p(x)\}$，其中“x”是集合中元素的代表形式，“$p(x)$”是集合中元素的共同特征，两者之间的竖线不可省略.

注意

用描述法表示集合时，要注意以下几点：

①写清楚集合中元素的代表形式(一般用小写字母表示).

②写明集合中元素的特征或性质.

③用于描述元素特征的语句要力求简明、准确，不产生歧义；多层描述时，应当准确使用“且”“或”等关联词.

④所有描述的内容都要写在大括号内.

⑤在不造成混淆的情况下,用描述法表示集合时有时也可以省去竖线和竖线左边的部分.例如,正整数的集合可简记为{正整数},但是集合$\{x|x>1\}$就不能省略竖线及其左边的x.

6.常见的集合表示

(1)方程的解集:$\{x|x^2-3x+2=0\}$或$\{1,2\}$,一般用列举法表示.

(2)方程组的解集:$\{(3,1)\}$或$\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x-2y=1,\\x+3y=6\end{cases}\right.\right\}=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x=3,\\y=1\end{cases}\right.\right\}$,一般用后者表示.

(3)点集:$\{(x,y)|y=2x+1\}$.

(4)具有某种性质的点集:$\{M||PM|=a\}$(P为定点).

知识点二 集合间的关系

1.子集

一般地,对于两个集合A,B,如果集合A中任何一个元素都是集合B的元素,那么集合A就叫作集合B的子集,记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$,读作"A包含于B"或"B包含A".

当集合A不包含于集合B或集合B不包含集合A时,记作$A\nsubseteq B$或$B\nsupseteq A$.

性质:任何一个集合是它本身的子集,即$A\subseteq A$;空集是任何集合的子集,即$\varnothing\subseteq A$;对于集合A,B,C,若$A\subseteq B,B\subseteq C$,则$A\subseteq C$.

注意

不能把子集说成是由原来集合中的部分元素组成的集合,因为集合A的子集包括它本身,而这个子集由集合A的全体元素组成;空集也是集合A的子集,但这个子集中不包括集合A中的任何元素.

2.真子集

如果集合A是集合B的子集,并且集合B中至少有一个元素不属于集合A,则集合A是集合B的真子集(A包含于B但不等于B),记作$A\subsetneqq B$或$B\supsetneqq A$,读作"A真包含于B"(或"B真包含A").

性质:空集是任何非空集合的真子集;对于集合A,B,C,若$A\subsetneqq B,B\subsetneqq C$,则$A\subsetneqq C$.

注意

元素与集合之间是属于关系,集合与集合之间是包含关系.

3.集合相等

一般地,对于两个集合A与B,如果集合A中的任何一个元素也都是集合B的元素,同时集合B中的任何一个元素也都是集合A的元素,我们就说集合A等于集合B,记作$A=B$(A,B的所有元素均相同).

注意

(1)若两个集合相等,则两个集合所包含的元素完全相同,反之亦然.

(2)要判断两个集合是否相等,对于元素较少的有限集合,主要看它们的元素是否完全相同;若是无限集合,则从"互为子集"入手进行判断.若$A\subseteq B$且$B\subseteq A$,则$A=B$.

典例精析

典例 1 下列各组对象中,能构成集合的是 ( )

(1)我国著名的数学家;

(2)超过 20 的所有自然数;

(3)某校 2020 年招收的矮个子学生;

(4)方程 $x^2-4=0$ 的实数解;

(5)在直角坐标平面内,第三象限的所有点.

A. (1)(2)(3) B. (2)(3)(4) C. (2)(4)(5) D. (3)(4)(5)

【解析】(1)中的"我国著名的数学家"不是一个明确的标准,不能构成一个集合;(3)中的"矮个子学生"这一标准不确定,不能构成集合;(4)中的对象是确定的;(2)(5)中的对象虽然有无限个,但它是确定的,故选 C.

【点拨】判断某组对象能否构成集合,关键看这组对象是否确定.标准一定要是明确的,不能模糊,否则无法判断.

举一反三 1

1. 下列语句中,能构成集合的是 ( )

A. 我班数学好的男生 B. 与 0 接近的全体实数

C. 大于 π 的自然数 D. 优秀的中等职业学校

2. 下列对象构成的集合是无限集的是 ( )

A. 高一年级身高超过 175 cm 的学生 B. 方程 $x^2=1$ 的解

C. 所有大于 0 小于 5 的偶数 D. 所有大于 3 的实数

典例 2 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 3,x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\}$,则 A 中元素的个数为 ( )

A. 9 B. 8 C. 5 D. 4

【解析】由 $x^2+y^2\leqslant 3$,可知 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$.又因为 $x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}$,所以 $x\in\{-1,0,1\}$, $y\in\{-1,0,1\}$.所以 A 中元素的个数为 9,故选 A.

【点拨】对于求解集合中元素个数的题目,首先明确集合,然后根据集合中元素的互异性求出集合中元素的个数,或利用数形结合的方法求出集合中元素的个数.

举一反三 2

1. 已知集合 $A=\{1,2,4\}$,集合 $B=\{x\mid x=a+b,a\in A,b\in A\}$,则集合 B 中元素的个数为________.

2. 已知集合 $P=\{x\mid 2<x<a,x\in\mathbf{N}\}$,且集合 P 中恰有 3 个元素,则整数 $a=$________.

典例 3 用列举法表示下列集合.

(1) $A=\{x\mid -2<x<5,x\in\mathbf{Z}\}$;

(2) $B=\{(x,y)\mid 2x+y=5,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$.

【解析】(1)$A=\{-1,0,1,2,3,4\}$;(2)$B=\{(0,5),(1,3),(2,1)\}$.
【点拨】掌握集合的两种表示方法:列举法、描述法.

举一反三 3

1. 用合适的方法表示下列集合.
(1)$\{11,12,13,14,15,\cdots\}$;
(2)$\{1,4,9,16,25,36\}$.

2. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$,集合 $B=\{x\mid x=ab,a\in A,b\in A\}$.
(1)用列举法写出集合 B;
(2)判断集合 B 和集合 A 的关系.

典例 4 设集合 $A=\{0\}$,下列结论正确的是 ( )
A. $A=0$ B. $A=\varnothing$ C. $0\in A$ D. $\varnothing\in A$

【解析】本题考查元素与集合、集合与集合之间的关系. 答案为 C.
【点拨】正确理解符号 $\in,\notin,\subseteq,\subsetneqq$ 的意义是正确处理此类问题的关键.

举一反三 4

1. 下列说法中,正确的有 ( )
①空集没有子集;②任何集合至少有两个子集;③空集是任何集合的真子集;④若 $\varnothing\subsetneqq A$,则 $A\neq\varnothing$.
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
2. 集合 $\{1,2,3,4\}$ 所有子集的个数是 ( )
A. 8 B. 14 C. 15 D. 16
3. 已知集合 $M=\{-1,0,m^2\}$,$N=\{-1,0,2m-1\}$,若 $M=N$,则实数 $m=$ ( )
A. -1 B. 1 C. 0 D. ±1
4. 满足 $\{a,b\}\subsetneqq A\subseteq\{a,b,c,d,e\}$ 的集合 A 的个数是 ( )
A. 9 B. 8 C. 7 D. 6
5. 下列六个关系式:①$\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$;②$\{a,b\}=\{b,a\}$;③$0=\varnothing$;④$0\in\{0\}$;⑤$\varnothing\in\{0\}$;⑥$\varnothing\subseteq\{0\}$. 其中正确的个数为________.

典例 5 已知集合 $A=\{x|x^2-x-2=0\}$，$B=\{x|x^2-4x+p=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

【解析】 由题意，得 $A=\{-1,2\}$. 因为 $B\subseteq A$，

所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{-1,2\}$.

当 $B=\{-1,2\}$ 时，由根与系数的关系，可得 $-1+2=1$.

又因为 $B=\{x|x^2-4x+p=0\}$，可知方程两根之和为 4，所以 $B=\{-1,2\}$ 不成立.

当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=(-4)^2-4p=16-4p<0$，解得 $p>4$；

当 $B=\{-1\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0,\\(-1)^2-4\times(-1)+p=0,\end{cases}$ 无解；

当 $B=\{2\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0,\\2^2-4\times2+p=0,\end{cases}$ 解得 $p=4$.

综上所述，实数 p 的取值范围是 $\{p|p\geqslant4\}$.

【点拨】 本题考查了两个集合包含或相等关系的问题.

举一反三 5

1. 已知集合 $A=\{1,1+m,1+2m\}$，$B=\{1,n,n^2\}$，其中 $m,n\in\mathbf{R}$，若 $A=B$，求 m,n 的值.

2. 已知集合 $\{1,a,b\}$ 与 $\{-1,-b,1\}$ 是同一个集合，求实数 a,b 的值.

3. 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中只有一个元素，求 a 的值；

(2)若 A 中恰有两个元素，求 a 的取值范围；

(3)若 A 中最多只有一个元素，求 a 的取值范围.

第二节　集合的运算

知识清单

知识点一　集合的交集

1. 交集的定义

一般地,对于两个给定的集合 A,B,由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合,称为集合 A 与集合 B 的交集,记作 $A\cap B$,即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

2. 交集的性质

(1)$A\cap B=B\cap A$.

(2)$A\cap A=A$.

(3)$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(4)$A\cap B\subseteq A$,$A\cap B\subseteq B$.

(5)若 $A\subseteq B$,则 $A\cap B=A$.

知识点二　集合的并集

1. 并集的定义

一般地,对于两个给定的集合 A,B,由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与集合 B 的并集,记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

2. 并集的性质

(1)$A\cup B=B\cup A$.

(2)$A\cup A=A$.

(3)$A\cup\varnothing=A$.

(4)$A\subseteq A\cup B$,$B\subseteq A\cup B$.

(5)若 $A\subseteq B$,则 $A\cup B=B$.

3. 图示两个集合的交集、并集

(1)用 Venn 图表示两个集合的交集、并集(图 1-1).

(2)借助数轴表示数集的交集、并集(图 1-2).

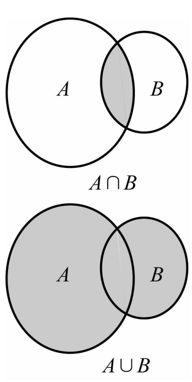

图 1-1

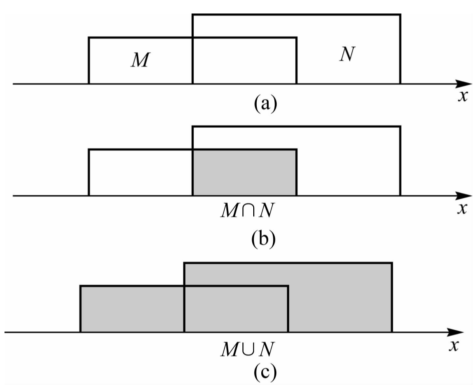

图 1-2

知识点三 集合的补集

1. 全集的定义

如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素，则称这个集合为全集，通常用U 表示.

注意

全集是一个相对的概念，在不同的情况下全集的概念不同.

2. 补集的定义

对于一个集合A，由全集U中不属于集合A的所有元素组成的集合称为集合A相对于全集U的补集，简称为集合A的补集，记作$\complement_U A$，读作"A在U中的补集"，即$\complement_U A=\{x|x\in U且x\notin A\}$.

3. 补集的性质

(1)$\complement_U(\complement_U A)=A$.

(2)$\complement_U\varnothing=U$, $\complement_U U=\varnothing$.

(3)$A\cup(\complement_U A)=U$.

(4)$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$.

典例精析

典例1 已知集合$A=\{2,3,4,7\}$，$B=\{2,5,6,7,8,10\}$，则$A\cap B=$ ( )

A. $\{2,3,4,5,6,7,8,10\}$　　B. $\{2,7\}$

C. $\{2\}$　　D. $\varnothing$

【解析】因为$2,7\in A$，$2,7\in B$，所以$A\cap B=\{2,7\}$，故选B.

【点拨】本题考查的是正确理解交集的定义.

举一反三1

1. 若集合$A=\{0,2\}$，$B=\{0,1,2\}$，则$A\cap B=$ ( )

A. 0,2　　B. 0,1,2　　C. $\{0,2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 若集合$A=\{0,3\}$，$B=\{0,1,3\}$，则$A\cup B=$ ( )

A. 0,3　　B. 0,1,3　　C. $\{0,3\}$　　D. $\{0,1,3\}$

3. 已知全集$U=\{x|x\leqslant 4,x\in\mathbf{N}\}$，集合$A=\{x|x>2,x\in U\}$，则$\complement_U A=$ ________.

4. 若集合$A=\{0,3,5\}$，$B=\{-1,3,6\}$，$C=\{0,1,3\}$，则$(A\cap B)\cup C=$ ________.

5. 已知全集$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，集合$A=\{1,2,4,5\}$，集合$B=\{4,6,7,8\}$，集合$C=\{3,5,6,7\}$，求$A\cup B$，$B\cap C$，$\complement_U A$.

典例 2 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，集合 $B=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$(\complement_U A)\cap B$.

【解析】$B=\{x\mid x^2-2x-3<0\}=\{x\mid -1<x<3\}$，$\complement_U A=\{x\mid x<0$ 或 $x\geqslant 2\}$，所以 $A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，$A\cup B=\{x\mid -1<x<3\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{x\mid -1<x<0$ 或 $2\leqslant x<3\}$.

【点拨】本题考查对集合运算的理解及性质的运用，并且要注意端点的取值.

举一反三 2

1. 若集合 $A=\{x\mid -1<x<3\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，则 $A\cup B=$ ( )

A. $\{x\mid -1<x\leqslant 5\}$　　B. $\{x\mid 1\leqslant x<3\}$

C. $\{x\mid 0\leqslant x<3\}$　　D. $\{x\mid 0\leqslant x<5\}$

2. 设集合 $A=\{x\mid |x|\leqslant 4\}$，$B=\{x\mid x^2-10x+16<0\}$，则 $A\cap B=$ ( )

A. $\{x\mid -4\leqslant x\leqslant 8\}$　　B. $\{x\mid 2<x\leqslant 4\}$　　C. $\{x\mid -4<x<8\}$　　D. $\{x\mid 2\leqslant x<4\}$

3. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 4\}$，集合 $B=\{x\mid x>3\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A$，$\complement_U B$.

4. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2-x-2=0\}$，$B=\{x\mid |x|=y+1, y\in A\}$，求 $\complement_U B$.

典例 3 已知集合 $M=\{x\mid a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$N=\{x\mid x<-1$ 或 $x>5\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

【解析】如图 1-3 所示，要使 $M\cap N=\varnothing$，必须满足 $\begin{cases}a+3\leqslant 5,\\ a\geqslant -1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant 2$，所以实数 a 的取值范围为 $\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 2\}$.

图 1-3

【点拨】解题时利用数轴表示集合，便于寻求满足条件的实数 a. 特别需要注意的是“端点值”的问题，要明确是否能取“=”.

举一反三 3

1. 已知集合 $A=\{1,3,t\}$，$B=\{t^2-t+1\}$，若 $A\cup B=A$，则实数 t 的取值是 ( )

A. $t=1$　　B. $t=2$ 或 $t=-1$ 或 $t=0$

C. $t=2$ 或 $t=\pm1$　　D. 不存在

2. 设集合 $A=\{x|a\leqslant x\leqslant a+2\}$，集合 $B=\{x|x<-2$ 或 $x>6\}$.

(1)若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围；

(2)若 $A\cap B=A$，求实数 a 的取值范围.

典例 4　已知 U 为全集，集合 $M\subsetneqq U$，$N\subsetneqq U$，且 $N\subseteq M$，则 ( )

A. $(\complement_U M)\supseteq(\complement_U N)$　　B. $(\complement_U M)\supseteq N$　　C. $(\complement_U M)\subseteq(\complement_U N)$　　D. $M\supseteq(\complement_U N)$

【解析】根据各集合之间的关系作图(如图 1-4 所示)，这样就很容易做出判断，故选 C.

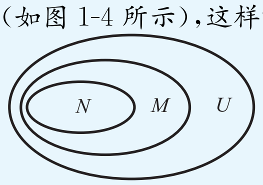

图 1-4

【点拨】(1)考虑集合之间的关系，用图形解答比较方便.

(2)在数学中利用“数形结合”的思想，往往能使问题简单化.

举一反三 4

1. 已知 U 为全集，M，N 为两个非空集合，且满足 $M\cap N=M$，则下列正确的是 ( )

A. $M\subsetneqq N$　　B. $N\subsetneqq M$　　C. $M=N$　　D. $M\cap(\complement_U N)=\varnothing$

2. 如图 1-5 所示，阴影部分所表示的集合是 ( )

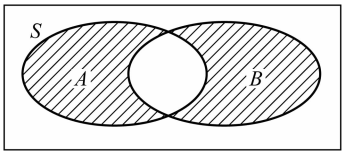

图 1-5

A. $(\complement_S A)\cap B$　　B. $(\complement_S A)\cup B$

C. $(A\cup B)\cap\complement_S(A\cap B)$　　D. $(A\cup B)\cup(\complement_S A)\cap B$

第三节　简易逻辑

知识清单

知识点一　命题的定义

在数学中，我们把用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫作命题. 正确的命题叫作真命题，记作T；错误的命题叫作假命题，记作F. T 和 F 称为命题的真值(有的书上用 1 和 0 作为命题的真值). p 与 q 为等值的命题记作 $p=q$.

知识点二　量词及逻辑联结词

1. 量词

常用的量词有全称量词和存在量词，用符号表示分别为 $\forall$ 和 $\exists$. 含有全称量词的命题称为全称命题；含有存在量词的命题称为存在性命题.

2. 逻辑联结词

常用的逻辑联结词有“且”“或”“非”，符号分别为“$\wedge$”“$\vee$”“$\neg$”.

3. 常见的四种复合命题真值表(表 1-1)

表 1-1

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\wedge q$	$p\vee q$
真	真	假	假	真	真
真	假	假	真	假	真
假	真	真	假	假	真
假	假	真	真	假	假

知识点三　充要条件的相关知识

1. 充要条件的定义

(1)对于两个命题 p,q，若有 $p\Rightarrow q$，则称 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

注意

p 是 q 的充分条件，是指只要具备了条件 p，那么 q 就一定成立，即命题中的条件是充分的；q 是 p 的必要条件，是指若不具备条件 q，则 p 就不能成立，即 q 是 p 成立的必不可少的条件.

(2)若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，即 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充分且必要条件，简称充要条件.

注意

①当 $p\Leftrightarrow q$ 时，也称 p 与 q 是等价的.
②与充要条件等价的词语有“当且仅当”“等价于”“有且只有”“反过来也成立”等.

2. 充要条件的判断方法

(1)从逻辑推理关系上判断(定义法).

①若 $p\Rightarrow q$ 但 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件.
②若 $p\nRightarrow q$ 但 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要不充分条件.
③若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件.
④若 $p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.
(2)从命题所对应的集合与集合之间的关系上判断(集合法).
设命题 p 对应的集合为 A，命题 q 对应的集合为 B.
①若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件.
②若 $A\supseteq B$，则 p 是 q 的必要条件.
③若 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$，即 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件.
④若 $A\nsubseteq B$ 且 $A\nsupseteq B$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

典例精析

典例 1 下列语句是命题的是 (　　)
A. 他真高！　　B. 今天天气怎么样？　　C. $2+1=3$　　D. 两直线平行

【解析】感叹句和疑问句不是命题，A，B 错；D 无法判断真假，不是命题，故选 C.
【点拨】命题是能判断真假的语句，疑问句、祈使句等不是命题.

举一反三 1

1. 下列语句中，是命题的是 (　　)
A. π 是无限不循环小数　　B. $3x\leqslant 5$
C. 什么是“绩效工资”？　　D. 今天的天气真好呀！

2. “红豆生南国，春来发几枝？愿君多采撷，此物最相思.”这是唐代诗人王维的《相思》，在这几句诗中，可作为命题的是 (　　)
A. 红豆生南国　　B. 春来发几枝
C. 愿君多采撷　　D. 此物最相思

3. 给出下列命题：
①若 $ac=bc$，则 $a=b$；
②方程 $x^2=0$ 无实数根；
③对于实数 x，若 $x-2=0$，则 $(x-2)(x+1)=0$；
④若 $p>0$，则 $p^2>p$；
⑤正方形不是菱形.
其中真命题是__________，假命题是__________.

典例 2 若 p 是假命题，q 是真命题，则下列命题是真命题的是 (　　)
A. $\neg q$　　B. $\neg(p\vee q)$
C. $\neg p\wedge q$　　D. $p\wedge q$

【解析】因为 p 是假命题，q 是真命题，所以 $\neg p$ 是真命题，$\neg q$ 是假命题，所以 $p\wedge q$ 是假命题，$p\vee q$ 是真命题，$\neg p\wedge q$ 是真命题，$\neg(p\vee q)$ 是假命题，故选 C.
【点拨】$p\wedge q$：一假即假，都真才真；$p\vee q$：一真即真，都假才假；p 与 $\neg p$：真假相反.

举一反三 2

1. 设命题 $p:\varnothing=0$;$q:2\geqslant3$,则 ( )

A. $p\vee q$ 为真　　B. $p\wedge q$ 为真

C. p 为假　　D. $\neg p$ 为假

2. 若命题“$\neg p$”与命题“$p\vee q$”都是真命题,则 ( )

A. 命题 p 与命题 q 的真假相同　　B. 命题 p 一定是真命题

C. 命题 q 不一定是真命题　　D. 命题 q 一定是真命题

3. 已知命题 p:2 是偶数,命题 q:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x-1=2$,则下列命题为真命题的是 ( )

A. $p\wedge q$　　B. $p\vee q$

C. $\neg p$　　D. $(\neg p)\wedge(\neg q)$

4. 已知命题 p:π 是有理数,命题 q:$x^2\geqslant0$. 给出下列结论:

(1)命题 $p\wedge q$ 是真命题;

(2)命题 $p\wedge(\neg q)$是假命题;

(3)命题$(\neg p)\vee q$ 是真命题;

(4)命题$(\neg p)\vee(\neg q)$是假命题.

其中正确的是__________.

典例 3 用“充分不必要条件”“必要不充分条件”“充要条件”填空.

(1)“x 是实数”是“x 是有理数”的____________________;

(2)“x 是正方形”是“x 是矩形”的____________________;

(3)“同位角相等”是“两直线平行”的____________________.

【解析】(1)因为实数包括无理数和有理数,所以“x 是实数”是“x 是有理数”的必要不充分条件;(2)因为正方形是特殊的矩形,所以“x 是正方形”是“x 是矩形”的充分不必要条件;(3)如果两条直线被第三条直线所截形成的同位角相等,那么这两条直线平行;如果两条直线平行,那么这两条直线被第三条直线所截形成的同位角相等,所以“同位角相等”是“两直线平行”的充要条件.

【点拨】主要考查充分条件、必要条件和充要条件的定义,能准确区分三个条件的不同. 判断不充分或不必要的条件时,常用举反例的方法.

举一反三 3

1. “$A\cap B=A$”是“$A\subseteq B$”的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. “$x<-2$”是“不等式 $x^2-4>0$ 成立”的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. “$|x|\geqslant1$”是“$x\geqslant1$”的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

典例 4 已知 p:$|3x-5|<4$,q:$(x-1)(x-2)<0$,则 p 是 q 的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】p:$|3x-5|<4\Rightarrow p$:$\frac{1}{3}<x<3$,q:$(x-1)(x-2)<0\Rightarrow q$:$1<x<2$. 所以 $p\not\Rightarrow q$ 但 $q\Rightarrow p$,所以 p 是 q 的必要不充分条件,故选 B.

【点拨】判断充分、必要条件时,要先分清条件和结论,进而找到条件与结论之间的逻辑推理关系. 常用的判断法:定义法和集合法.

举一反三 4

1. 设命题甲为 $0<x<5$,命题乙为 $|x-2|<3$,那么甲是乙的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 已知 p: α 是第二象限角,q: α 是钝角. 那么 p 是 q 的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 设甲是乙的充分不必要条件,乙是丙的充要条件,丁是丙的必要不充分条件,则甲是丁的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

典例 5 已知集合 $A=\left\{y\,\middle|\,y=x^2-\frac{3}{2}x+1,x\in\left[\frac{3}{4},2\right]\right\}$,$B=\{x\,|\,x+m^2\geqslant 1\}$,$p$: $x\in A$,q:$x\in B$,并且 p 是 q 的充分条件,求实数 m 的取值范围.

【解析】由题意,得集合 $A=\left[\frac{7}{16},2\right]$,$B=[1-m^2,+\infty)$. 由于 p 是 q 的充分条件,所以 $A\subseteq B$,所以 $1-m^2\leqslant\frac{7}{16}$,解得 $m\geqslant\frac{3}{4}$ 或 $m\leqslant-\frac{3}{4}$,即实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

【点拨】本题主要考查集合的关系及充分条件的判断,运用集合之间的关系建立不等式是解题的关键.

举一反三 5

已知 p:$-2\leqslant x\leqslant 10$,$q$:$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$,若 p 是 q 的充分不必要条件,求实数 m 的取值范围.

第一章　集合与简易逻辑

第一节　集合的概念与集合之间的关系

一、选择题

1. 下列条件中能构成集合的是　　（　　）

A. 世界著名的数学家　　B. 在数轴上离原点非常近的点

C. 所有的等腰三角形　　D. 全年级成绩优异的同学

2. 集合$\{x-1,x^2-1,2\}$中的x不能取的值是　　（　　）

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

3. 用列举法表示"大于2且小于9的奇数的全体"构成的集合是　　（　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{4,6,8\}$

C. $\{3,5,7\}$　　D. $\{3,4,5,6,7,8\}$

4. 若集合$M=\{3,1,a-1\}$，$N=\{-2,a^2\}$，N为M的子集，则a的值是　　（　　）

A. -1　　B. 1

C. 0　　D. 3

5. 给出下面四个关系：①$0\in\mathbf{Q}$；②$\sqrt{3}\in\mathbf{Q}$；③$\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}$；④$\varnothing\subsetneqq\{0\}$，其中正确的个数为　　（　　）

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 1

6. 集合$\{a,b,c,d\}$所有子集的个数是　　（　　）

A. 8　　B. 14

C. 15　　D. 16

7. 下列说法正确的有　　（　　）

(1)空集没有子集；

(2)任何集合至少有两个子集；

(3)空集是任何集合的真子集；

(4)若$\varnothing\subsetneqq A$，则$A\neq\varnothing$.

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

8. 满足条件$\{1,2\}\subsetneqq M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$的集合 M 的个数是 ( )

A. 3　　　　B. 6

C. 7　　　　D. 9

9. 集合 $M=\left\{x\middle|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\middle|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则集合 M 与 N 的关系是 ( )

A. $M=N$　　　　B. $M\subsetneqq N$

C. $M\supsetneqq N$　　　　D. $M\cap N=\varnothing$

10. 下列命题中正确的是 ( )

A. $\{x|x^2+2=0\}$在实数范围内无意义

B. $\{(1,2)\}$与$\{(2,1)\}$表示同一个集合

C. $\{4,5\}$与$\{5,4\}$表示相同的集合

D. $\{4,5\}$与$\{5,4\}$表示不同的集合

二、填空题

11. 方程 $x^2+x-6=0$ 的根的集合，用描述法可表示为__________.

12. 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空.

(1)1 ________ $\mathbf{N}^*$;　　　　(2)-2 ________ $\mathbf{N}^*$;

(3)$\frac{1}{2}$________ $\mathbf{N}^*$;　　　　(4)5 ________ $\mathbf{Z}$;

(5)-6 ________ $\mathbf{Z}$;　　　　(6)$\frac{5}{6}$________ $\mathbf{Z}$.

13. 用列举法表示集合$\{x|(x+7)(2-x)=0\}$，结果是__________.

14. 集合$\{-4,-2,0,2\}$的非空子集有__________个.

15. 已知集合 $A=\{x|-1<x\leqslant 4\}$，集合 $B=\{x|0\leqslant x<2\}$，则集合 A,B 的关系是__________.

三、解答题

16. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|ax+2=0\}$，且 $B\subsetneqq A$，求实数 a 的值组成的集合.

第二节　集合的运算

一、选择题

1. 设集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,4,5\}$，则以下各项正确的是　　(　　)

A. $A\cap B=\{1,4\}$　　B. $A\cup B=\{2,5,4\}$

C. $\{1\}\in A$　　D. $1\in A$

2. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid |x|<3\}$，$B=\{-2,0,1\}$，则 $A\cap B=$　　(　　)

A. $\{0,1\}$　　B. $\{-1,0,1\}$

C. $\{-2,0,1\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

3. 集合 $A=\{a,e\}$，$B=\{a,e,d,c\}$，$C=\{e,f\}$，则 $(A\cap B)\cup C=$　　(　　)

A. $\{a,e\}$　　B. $\{a,e,d,f\}$

C. $\{a,e,d,c\}$　　D. $\{a,e,f\}$

4. 已知 $M=\{(x,y)\mid x+y=5\}$，$N=\{(x,y)\mid x-y=7\}$，则 $M\cap N=$　　(　　)

A. $x=1,y=6$　　B. $(-1,6)$

C. $\{6,-1\}$　　D. $\{(6,-1)\}$

5. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2\}$，$B=\{5\}$，则 $(\complement_U A)\cup B=$　　(　　)

A. $\{5\}$　　B. $\{3,4,5\}$

C. $\{3,4\}$　　D. $\{1,2,5\}$

6. 设集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，集合 $B=\{x\mid x\leqslant a\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值集合为　　(　　)

A. $\{a\mid a<2\}$　　B. $\{a\mid a\geqslant -1\}$

C. $\{a\mid a<-1\}$　　D. $\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 2\}$

7. 若集合 $A=\{-1,1\}$，$B=\{x\mid mx=1\}$，且 $A\cup B=A$，则 m 的值为　　(　　)

A. 1　　B. -1

C. 1 或 -1　　D. 1，-1 或 0

8. 已知三个集合 U,A,B 之间的关系如图 1-1 所示，则 $(\complement_U B)\cap A=$　　(　　)

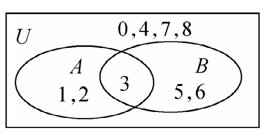

图 1-1

A. $\{3\}$　　B. $\{0,1,2,4,7,8\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\{1,2,3\}$

9. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{3,5,7\}$，$B=\{1,3,6,8\}$，那么集合 $\{2,4,9\}$ 是　　(　　)

A. $A\cup B$

B. $A\cap B$

C. $\complement_U(A\cap B)$

D. $\complement_U(A\cup B)$

10. 已知集合 $A=\{a,b,2\}$，$B=\{2,b^2,2a\}$，且 $A\cap B=A\cup B$，则 $a=$ (　　)

A. 0

B. $\frac{1}{4}$

C. 0 或$\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

二、填空题

11. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,a\}$，$A\cup B=\{1,2,3,4\}$，则 $a=$____________.

12. 已知集合 $A=\{1,2,4,6\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，则 $A\cup B=$____________________，$A\cap B=$____________.

13. 若集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{-1,1,2\}$，$C=\{0,1,3\}$，则 $A\cap B\cap C=$____________.

14. 设集合 $A=\{x|x>-1\}$，$B=\{x|-2<x<2\}$，则 $A\cup B=$____________.

15. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x^2\geqslant 1\}$，则$\complement_U A=$____________.

三、解答题

16. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|3\leqslant x<7\}$，$B=\{x|2<x<10\}$，求$\complement_U B$，$\complement_U(A\cup B)$及$(\complement_U A)\cap B$.

第三节　简易逻辑

一、选择题

1. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}, x^2+2x+2>0$，则 $\neg p$ 是　（　　）

A. $\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0^2+2x_0+2<0$　　B. $\forall x\in\mathbf{R}, x^2+2x+2<0$

C. $\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0^2+2x_0+2\leqslant 0$　　D. $\forall x\in\mathbf{R}, x^2+2x+2\leqslant 0$

2. "a 是有理数"是"a 是实数"的　（　　）

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. "$x^2+x-6=0$"是"$x=3$"的　（　　）

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 若命题"$\neg(p\vee q)$"为真命题，则　（　　）

A. p,q 均为真命题　　B. p,q 均为假命题

C. p,q 中至少有一个为真命题　　D. p,q 中一个为真命题，一个为假命题

5. "$x<-1$ 或 $x>2$"是"$(x-2)(x+1)>0$"的　（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 下列命题是真命题的是　（　　）

A. $\forall x\in\mathbf{R}, (x-\sqrt{2})^2>0$　　B. $\forall x\in\mathbf{Q}, x^2>0$

C. $\exists x_0\in\mathbf{Z}, 3x_0=812$　　D. $\exists x_0\in\mathbf{R}, 3x_0-4=2$

7. 若 a 与 b 均为实数，则"$|a|=|b|$"是"$a=b$"的　（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则"$a>b$"是"$ac^2>bc^2$"的　（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 在$\triangle ABC$ 中，"$\sin A=\frac{1}{2}$"是"$A=30°$" 的　（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

10. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，则"$ac=b^2$"是"a,b,c 成等比数列"的　（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

11. “$x\in A\cap B$”是“$x\in A\cup B$”的____________条件.

12. “一个数是 2 的倍数”是“一个数是 4 的倍数”的____________条件.

13. “$x<2$”是“$x^2-x-2<0$”的____________条件.

14. 已知 $m,n\in\mathbf{R}$,则“$m\neq 0$ 且 $n\neq 0$”是“$mn\neq 0$”的____________条件.

15. “$\triangle ABC$ 的每个内角都是 60°”是“$\triangle ABC$ 为等边三角形”的__________条件.

三、解答题

16. 已知方程 $x^2+(2k-1)x+k^2=0$,求方程有两个大于 1 的实根的充要条件.