第一章　函　数

第一节　函数的概念

一、集合、区间和邻域

(一) 集合

1. 集合:一般可以把集合理解为具有某种特定性质的事物的总体. 用大写母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

2. 元素:集合中的每个事物称为集合的元素(简称元),用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

3. 集合的表示方法:

(1) 列举法:把集合中的所有元素都列举出来写在大括号内,例如:$A=\{1,2,3\}$.

(2) 描述法:把集合中所有元素的公共属性描述出来,例如:$A=\{x \mid 0<x<6\}$.

4. 子集:设 A,B 两个集合,若集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素,则称集合 A 是集合 B 的子集,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B) 或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

5. 集合的基本运算:

(1) 并:$A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$;

(2) 交:$A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$;

(3) 差:$A\backslash B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$,特别地,若 $B\subset A$ 时,则称 $A\backslash B$ 为 B 关于 A 的补集,记作 $C_A B$. 通常我们所讨论的问题是在一个大集合 I 中进行,所研究的其他集合 A 都是 I 的子集,此时 $I\backslash A$ 为 A 的余集,记作 $C_I A$ 或 A^C.

6. 集合的基本运算法则:

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

$(A\backslash B)\cap C=(A\cap C)\backslash(B\cap C)$

(4) 幂等律:$A\cup A=A, A\cap A=A$

(5) 吸收律：$A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup B = B, A \cap B = A$，其中 $A \subset B$

$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$

(6) 对偶律：$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C, (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

7. 乘积集合：A, B 为任意两个非空集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，把有序对 (x, y) 作为新的元素，它们的全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积，记作 $A \times B$. 即 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}$.

(二) 区间

1. 开区间：$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$；

2. 闭区间：$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；

3. 半开区间：$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}, [a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$；

4. 无限区间：$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}, (a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$，

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}, (-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$，

$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$.

(三) 邻域

1. 邻域：$a, \delta \in \mathbf{R}$，且 $\delta > 0$，则数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 或 $\{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a, \delta)$，点 a 为邻域的中心，δ 为邻域的半径.

2. 去心邻域：点 a 的 δ 邻域去掉中心点 a 后的集合，称为点 a 的去心 δ 邻域. 记作 $\mathring{U}(a, \delta)$，且 $\mathring{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$.

若 $a, \delta \in \mathbf{R}$，且 $\delta > 0$，则数集 $\{x \mid a < x < a + \delta\}$ 与 $\{x \mid a - \delta < x < a\}$ 分别为点 a 的右 δ 邻域与点 a 的左 δ 邻域，分别记作 $\mathring{U}_+(a, \delta), \mathring{U}_-(a, \delta)$.

二、函数的基本概念

函数定义：设 D 为一个给定的实数集，对于每个 $x \in D$，按照某种对应法则 f，总存在唯一确定的实数值 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的一个函数，习惯上也称 y 是 x 的函数，并记作 $y = f(x), x \in D$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的值域.

注：(1) 函数常用 $f, g, F, G, \varphi, \psi$ 等表示，如 $y = g(x), y = F(x), x = \varphi(t)$.

(2) 两个要素：定义域 D 和对应法则 f. 几个表达形式不同的函数是否为同一函数完全取决于这两个要素.

习题 1-1 解答

1. **解**:(1)$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,
$A\cap B=\{8\}$,
$A\backslash B=\{1,3,5,7\}$,
$B\backslash A=\{2,4,6\}$.
(2)$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$,
$A\cap B=[-10,-5)$,
$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$,
$B\backslash A=[-5,3)$.
(3)$\because B\subset A$,$\therefore A\cup B=A$,$A\cap B=B$,$A\backslash B=\{0\}$,$B\backslash A=\varnothing$.
2. **解**:由 $x^2+x-6<0$ 得 $-3<x<2$,A 等价于集合$\{x\mid -3<x<2\}$.
同理 B 等价于集合$\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$,$A\cap B=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$.
3. **解**:(1) 要使函数 $y=\sqrt{x^2-1}$ 有意义,必须使 $x^2-1\geqslant 0$,即 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$,所以函数 $y=\sqrt{x^2-1}$ 的定义域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.
(2) 要使函数 $f(x)$ 有意义,只有 $-1\leqslant\dfrac{x-3}{2}\leqslant 1$,即 $1\leqslant x\leqslant 5$,所以函数 $y=\arcsin(\dfrac{x-3}{2})$ 的定义域为$[1,5]$.
(3) 要使函数 $f(x)$ 有意义,只有$\dfrac{1-x}{1+x}\geqslant 0$ 且 $1+x\neq 0$,即 $-1<x\leqslant 1$,所以函数 $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ 的定义域为$(-1,1]$.
(4) 要使函数 $f(x)$ 有意义,只有 $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,即 $x\neq(k+\dfrac{1}{2})\pi-1$,其中 $k\in\mathbf{Z}$,所以函数 $y=\tan(x+1)$ 的定义域为 $\mathbf{R}\backslash\{(k+\dfrac{1}{2})\pi-1\mid k\in\mathbf{Z}\}$.
(5) 要使函数 $f(x)$ 有意义,只有 $x+1>0$,即 $x>-1$,所以函数 $y=\ln(x+1)$ 的定义域为$(-1,+\infty)$.
(6) 要使函数 $f(x)$ 有意义,只有 $-1\leqslant\ln x\leqslant 1$,即 $e^{-1}\leqslant x\leqslant e$,所以函数 $y=\arcsin(\ln x)$ 的定义域为$[e^{-1},e]$.
4. **解**:(1) 不同. 因为函数 $f(x)=2\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,而函数 $g(x)=\ln x^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}\backslash\{0\}$.
(2) 不同. 因为函数 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 的定义域为 $\mathbf{R}\backslash\{-3\}$,而函数 $g(x)=x-3$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.
(3) 不同. 因为函数 $f(x)=\sqrt{x^2}$ 的值域为$[0,+\infty)$,而函数 $g(x)=x$ 的值域为 $\mathbf{R}$.
(4) 相同. 因为 $\sin^2x+\cos^2x=1$.
(5) 不相同. $g(x)=\arcsin(\sin x)$ 的值域为$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$,而函数 $f(x)=x$ 的值域为 $\mathbf{R}$.

(6) 不相同. 因为函数 $f(x)=1$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$,而函数 $g(x)=\sec^2x-\tan^2x$ 的定义域为 $\mathbf{R}\backslash\{k\pi+\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbf{Z}\}$.

5. **解:**(1) $f(0)=0^3-1=-1, f(-x)=(-x)^3-1=-x^3-1$.

(2) $f(0)=1$, $\because$ 当 $x<0$ 时, $f(x)=-x$, $\therefore f(-1)=-(-1)=1$.

$\because$ 当 $x>0$ 时, $f(x)=x$, $\therefore f(1)=1$.

(3) $\because$ 当 $|x|<\frac{\pi}{3}$ 时, $g(x)=|\sin x|$,而 $|\frac{\pi}{6}|<\frac{\pi}{3}$, $|\pm\frac{\pi}{4}|<\frac{\pi}{3}$, $\therefore g(\frac{\pi}{6})=|\sin\frac{\pi}{6}|=\frac{1}{2}$, $g(\frac{\pi}{4})=|\sin\frac{\pi}{4}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $g(-\frac{\pi}{4})=|\sin(-\frac{\pi}{4})|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because$ 当 $|x|\geqslant\frac{\pi}{3}$ 时, $g(x)=0$,而 $|-2|>\frac{\pi}{3}$, $\therefore g(-2)=0$.

第二节　函数的几种特性

一、函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$,如果对于任意 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的.

如果对于任意 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

注:若 $f(x)$ 在区间 I 上是单调函数,则称 I 是该函数的单调区间.

二、函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D.

(1) 若存在一个常数 m,使得对于任意 $x\in D$,恒有 $f(x)\geqslant m$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有下界,且 m 就是 $f(x)$ 的一个下界.

(2) 若存在一个常数 M,使得对于任意 $x\in D$,恒有 $f(x)\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界,且 M 就是 $f(x)$ 的一个上界.

(3) 若存在两个常数 m 与 M,使得对任意 $x\in D$,恒有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界.

(4) 若对于任何正数 k,总存在一个 $x_1\in D$,使得 $|f(x_1)|>k$,则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

三、函数的奇偶性

1. 定义:设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.

(1) 若对于任意 $x \in D$,恒有 $f(-x) = f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 若对于任意 $x \in D$,恒有 $f(-x) = -f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 是奇函数.

2. 性质:偶函数的图形关于 y 轴是对称的,奇函数的图形关于原点是对称的.

四、函数的周期性

1. 定义:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在一个正数 T,使得对于任何 $x \in D$,都有 $f(x \pm T) = f(x)$ 且 $(x \pm T) \in D$,则称函数 $f(x)$ 为周期函数,其中 T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 通常情况下,我们说的周期是指最小正周期,但并非每个周期函数都存在最小正周期. 例如:$f(x) = C$(C 为常数),存在 $T > 0$,使 $f(x \pm T) = f(x)$,但这样的周期 T 无最小正值.

2. 判断一个函数是否是周期函数的方法:

(1) 将函数分解成已知其周期的函数(比如三角函数等)的代数和,再求这些周期函数的周期的最小公倍数.

(2) 列出方程 $f(x+T) - f(x) = 0$,以 T 为未知量解此方程.

若解出的 T 是与 x 无关的正数,则 $f(x)$ 是周期函数;反之,若利用一些已知的运算法则推出矛盾的结果,就可断定函数是非周期函数.

五、典型例题精解

例 1　判断函数 $f(x) = \begin{cases} x(2-x) & x > 0 \\ x(2+x) & x \leqslant 0 \end{cases}$ 的奇偶性.

解: 当 $x > 0$ 时,$f(-x) = -x(2-x) = -f(x)$,

当 $x < 0$ 时,$f(-x) = -x(2+x) = -f(x)$,

当 $x = 0$ 时,$f(0) = 0$,

故无论 x 取何值时,都有 $f(-x) = -f(x)$,因此 $f(x)$ 为奇函数.

例 2　讨论函数 $f(x) = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ 的初等性质.

解: 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,对于任意 $x \in (-\infty, +\infty)$,

$$|f(x)| = \left|\frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}\right| \leqslant \frac{3^x + 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = 1;$$

$$f(-x) = \frac{3^{-x} - 3^x}{3^{-x} + 3^x} = -f(x);$$

对于任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$,

则 $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{3^{x_2} - 3^{-x_2}}{3^{x_2} + 3^{-x_2}} - \dfrac{3^{x_1} - 3^{-x_1}}{3^{x_1} + 3^{-x_1}} = \dfrac{2(3^{x_2 - x_1} - 3^{x_1 - x_2})}{(3^{x_2} + 3^{-x_2})(3^{x_1} + 3^{-x_1})} > 0$,

即 $f(x_2) > f(x_1)$；

要使 $f(x+T) = f(x)$，即$\dfrac{3^{x+T}-3^{-x+T}}{3^{x+T}+3^{-x+T}} = \dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$，易知，只有 $T=0$，

故 $f(x)$ 不是周期函数，但在$(-\infty,+\infty)$上是有界的、单调增加的奇函数.

习题 1-2 解答

1. **解**：(1) 对任意 $x_1,x_2 \in (0,+\infty)$ 且 $x_1 < x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2) = \lg x_1 - \lg x_2 = \lg\dfrac{x_1}{x_2} < 0$，即 $f(x_1) < f(x_2)$，故函数 $y=\lg x$ 在$(0,+\infty)$内是单调增加的.

(2) 对任意 $x_1,x_2 \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 且 $x_1 < x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2) = \sin x_1 - \sin x_2 = 2\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}\cos\dfrac{x_1+x_2}{2} < 0$，即 $f(x_1) < f(x_2)$，故函数 $y=\sin x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内是单调增加的.

(3) 对任意 $x_1,x_2 \in (0,1)$ 且 $x_1 < x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2) = 2(x_1-x_2) < 0$，即 $f(x_1) < f(x_2)$，故函数 $y=2x$ 在$(0,1)$内是单调增加的.

(4) 对任意 $x_1,x_2 \in \mathbf{R}$ 且 $x_1 < x_2$ 则 $f(x_1)-f(x_2) = (-4x_1+2)-(-4x_2+2) = -4(x_1-x_2) > 0$，即 $f(x_1) > f(x_2)$，故函数 $y=-4x+2$ 在定义域内是单调减少的.

(5) 对任意 $x_1,x_2 \in (1,+\infty)$ 且 $x_1 < x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2) = \dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2-x_1}{x_1\cdot x_2} > 0$，即 $f(x_1) > f(x_2)$，故函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在$(1,+\infty)$内是单调减少的.

(6) 对任意 $x_1,x_2 \in (0,+\infty)$ 且 $x_1 < x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2) = (x_1+\ln x_1)-(x_2+\ln x_2) = (x_1-x_2)+(\ln x_1-\ln x_2) = (x_1-x_2)+\ln\dfrac{x_1}{x_2} < 0$，即 $f(x_1) < f(x_2)$，故函数 $y=x+\ln x$ 在$(0,+\infty)$内是单调增加的.

2. **解**：(1) 函数 $f(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$ 在$(-\infty,+\infty)$上是有界函数，因为存在两个常数0和2，使得对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $0 < \dfrac{2}{1+x^2} \leqslant 2$.

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ 上是无界函数，因为对于任意正数 M，取定义域上一点 $x_0=\dfrac{1}{M+1}$，则有 $f(x_0)=\dfrac{1}{x_0}=M+1>M$.

3. **解**：(1) 函数 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$ 在$(-\infty,+\infty)$上是奇函数，因为 $f(-x)=-\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=-f(x)$.

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$ 在$(-\infty,+\infty)$上是偶函数，因为 $f(-x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}=f(x)$.

(3) 函数 $f(x)=x^3+1$ 在$(-\infty,+\infty)$上是非奇、非偶函数，

因为 $f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1\neq-f(x)$，同理 $f(-x)\neq f(x)$.

(4) 函数 $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数，

因为 $f(-x)=\lg(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\lg\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lg\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=-\lg(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$.

(5) 函数 $f(x)=2x^4+x-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是非奇非偶函数，

因为 $f(-x)=2(-x)^4+(-x)-1=2x^4-x-1\neq-f(x)$，同理 $f(-x)\neq f(x)$.

(6) 函数 $f(x)=\sin x-\cos x+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是非奇非偶函数，

因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq-f(x)$，同理 $f(-x)\neq f(x)$.

4. **解**：(1) 由于 $\cos(x-3)=\cos x\cdot\cos 3+\sin x\cdot\sin 3$，且 $\cos x,\sin x$ 均是以 2π 为周期的函数，所以 $y=\cos(x-3)$ 是以 2π 为周期的函数.

(2) 函数 $y=\cos 4x$ 是以 $\dfrac{\pi}{2}$ 为周期的函数.

(3) 要使得 $f(x+T)=f(x)$ 即 $1+\sin\pi(x+T)=1+\sin\pi x\Rightarrow\sin\pi(x+T)=\sin\pi x$，

易知，当 $T=2$ 时，有 $\sin\pi(x+2)=\sin\pi x$，所以 $y=1+\sin\pi x$ 是以 2 为周期的函数.

(4) 假设它是周期函数，且存在正周期 T，则 $(x+T)\cos(x+T)=x\cos x$，

令 $x=0$，得 $T\cos T=0$，即 $T=\dfrac{2k+1}{2}\pi$，其 $k\in\mathbf{N}$，

再令 $x=T$，得 $2T\cos 2T=T\cos T$，即 $2\cos 2T=\cos T$，则 $2\cos(2k+1)\pi=\cos\dfrac{2k+1}{2}\pi\Rightarrow-2=0$，

从而得出矛盾，所以函数 $y=x\cos x+2$ 不是周期函数.

5. **证明**：(必要性) 由于 $f(x)$ 在 X 上有界，由定义知，存在常数 M，使得对于任意 $x\in X$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，因此，函数 $f(x)$ 在 X 上有上界 M，同理，函数 $f(x)$ 在 X 上有下界 $-M$，所以，$f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界.

(充分性) 由于 $f(x)$ 在 X 上有上界，由上界的定义知，存在一个常数 M，使得对于任意 $x\in X$，恒有 $f(x)\leqslant M$；又由于 $f(x)$ 在 X 上有下界，由下界的定义知，存在一个常数 m，使得对于任意 $x\in X$，恒有 $f(x)\geqslant m$. 因此，存在两个常数 m 和 M，使对于任意 $x\in X$，恒有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，所以 $f(x)$ 在 X 上有界.

第三节　反函数与复合函数

一、反函数

1. 反函数：设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，若对于任意 $y\in M$，由函数关系式 $y=f(x)$ 恰好唯一确定出一个 $x\in D$ 与之对应，那么认为 x 是 y 的函数，记作 $x=g(y)$.

我们称上述的 $y=f(x)$ 与 $x=g(y)$ 互为反函数，习惯上将 $x=g(y)$ 记作 $x=f^{-1}(y)$.

注: 习惯上，常用 x 表示自变量，y 表示因变量，故常把 $y=f(x)$ 的反函数写作 $y=f^{-1}(x)$.

2. 定理：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，若 $f(x)$ 在 D 上是单调增加或单调减少的，则在 W 上 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 存在，且 $f^{-1}(x)$ 在 W 上也是单调增加或单调减少的.

二、复合函数

复合函数：如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，就称 y 是 x 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为中间变量.

注: 函数 $u=\varphi(x)$ 的值域应该在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，这样函数才能复合，否则复合就没有意义，如 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 就不能复合.

例 1　设函数 $f(x)=\begin{cases} x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ -x & -1\leqslant x<0 \end{cases}$，$g(x)=\mathrm{e}^x$，求复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

解: 因为 $f(x)$，$g(x)$ 符合复合条件，所以 $f[g(x)]=\begin{cases} \mathrm{e}^x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ -\mathrm{e}^x & -1\leqslant x<0 \end{cases}$，

$$g[f(x)]=\begin{cases} \mathrm{e}^x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ \mathrm{e}^{-x} & -1\leqslant x<0 \end{cases}.$$

习题 1-3 解答

1. **解:** (1) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，解得 $(1+x)y=1-x\Rightarrow x(y+1)=1-y$，于是 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，

故所求反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，$x\neq -1$.

(2) 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$，解得 $(cx+d)y=ax+b\Rightarrow(cy-a)x=b-dy$，于是 $x=\dfrac{b-dy}{cy-a}$，

故所求反函数为 $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$，$x\neq -\dfrac{a}{c}$.

(3) 由 $y=1+\ln(x+2)$，解得 $y-1=\ln(x+2)\Rightarrow \mathrm{e}^{y-1}=x+2$，于是 $x=\mathrm{e}^{y-1}-2$，

故所求反函数为 $y=\mathrm{e}^{x-1}-2$.

2. **解:** (1) $y=\sqrt{u}$，$u=1-v$，$v=\sin x$；

(2) $y=\sin u$，$u=x^2$；

(3) $y=\mathrm{e}^u$，$u=v^2$，$v=\cos x$；

(4) $y=u^3, u=1+v, v=\lg x$;

(5) $y=\sin u, u=2+v, v=\ln x$;

(6) $y=\frac{1}{2}u, u=v^2, v=\tan x$.

3. **解:** 由 $y=f(x+1)=x^2-3x+2$ 得 $f(x+1)=(x+1)^2-5(x+1)+6$.

令 $u=x+1$，则有 $f(u)=u^2-5u+6$，

因此 $f(x)=x^2-5x+6, f(\sin x)=\sin^2 x-5\sin x+6$.

4. **解:** $f[f(x)]=f(\frac{1}{1-x})=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{x}$.

5. **解:** 因为 $f(x), g(x)$ 符合复合条件，所以

$$f[g(x)]=\begin{cases}1 & g(x)=e^x<1, \text{即 } x<0 \\ 0 & g(x)=e^x=1, \text{即 } x=0 \\ -1 & g(x)=e^x>1, \text{即 } x>0\end{cases},$$

$f[g(x)]$ 的图形如图 1-1 所示.

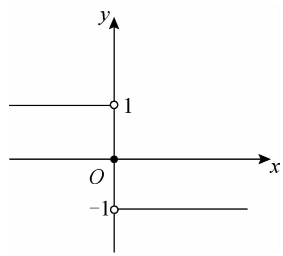

图 1-1

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e & |x|<1 \\ 1 & |x|=1 \\ e^{-1} & |x|>1\end{cases},$$

$g[f(x)]$ 的图形如图 1-2 所示.

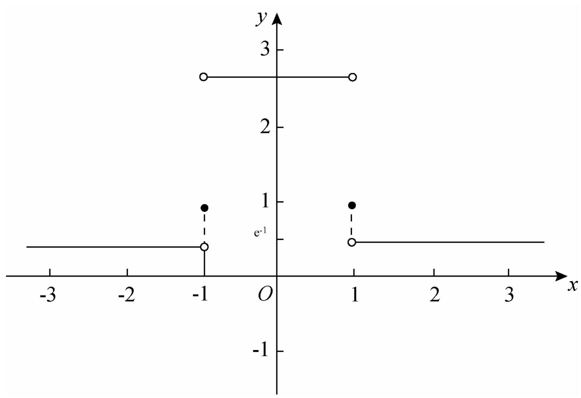

图 1-2

第四节　初 等 函 数

一、基本概念与性质

1. 以下五类函数统称为基本初等函数：

(1) 幂函数：$y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$，是常数）；

(2) 指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$，且 $a\neq1$）；

(3) 对数函数：$y=\log_{a}x$（$a>0$，且 $a\neq1$）；

(4) 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 等；

(5) 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等.

2. 初等函数：由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤得到的用一个解析式子表示的函数，称为初等函数，如 $y=\sin^{3}(2x+1)$，$y=5x$.

注：分段函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x>0\\ 0 & x=0\\ x-1 & x<0\end{cases}$ 是由几个式子表示的函数，因而不是初等函数. 但由于分段函数在其子定义域内通常是初等函数，所以仍可通过初等函数来研究它们.

习题 1-4 解答

1. **解：**(1) 要使 $f(x)$ 有意义，只有 $\begin{cases}x^{2}-x-6\geqslant0\\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant1\end{cases}$ 即 $-3\leqslant x\leqslant-2$ 或 $3\leqslant x\leqslant4$，所以函数 $y=\sqrt{x^{2}-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域为 $[-3,-2]\cup[3,4]$.

(2) 要使 $f(x)$ 有意义，只有 $\begin{cases}x+1>0 \text{ 且 } x+1\neq1\\ 16-x^{2}>0\end{cases}$ 即 $-1<x<0$ 或 $0<x<4$，所以函数 $y=\log_{x+1}(16-x^{2})$ 的定义域为 $(-1,0)\cup(0,4)$.

(3) 要使 $f(x)$ 有意义，只有 $\begin{cases}\log_{4}x>0\\ \log_{3}(\log_{4}x)>0\\ x>0\end{cases}$ 即 $x>4$，所以函数 $y=\log_{2}[\log_{3}(\log_{4}x)]$ 的定义域为 $(4,+\infty)$.

(4) 要使 $f(x)$ 有意义，只有 $x+1\neq\dfrac{2k+1}{2}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x\neq\dfrac{2k+1}{2}\pi-1$，所以函数 $y=\tan(1+x)$ 的定

义域为 $x \neq \frac{2k+1}{2}\pi - 1, k \in \mathbf{Z}$.

2. **解**:由于 $f(x) = \arcsin x$,所以 $f(0) = \arcsin 0 = 0$,$f(-1) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$,

$f(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$,$f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$,$f(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

3. **解**:(1)、(3) 是基本初等函数,(2)、(4)、(5)、(6) 为初等函数.

4. **解**:(1) $y = \sin 2x + 1$ 的图形如图 1-3 所示.

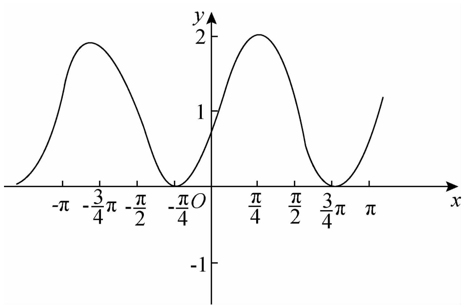

图 1-3

(2)$y = 2e^{x+1}$ 的图形如图 1-4 所示.

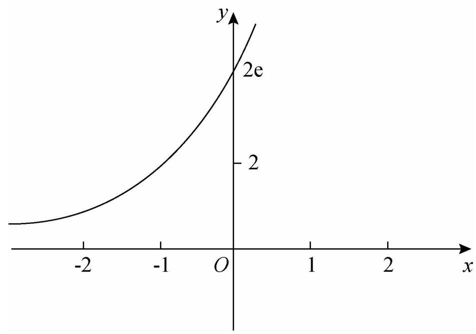

图 1-4

(3) $y = \begin{cases} x^2 & |x| \leqslant 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$ 的图形如图 1-5 所示.

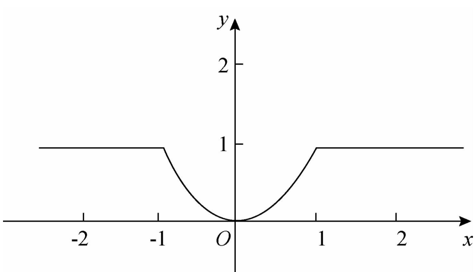

图 1-5

(4) $y = x|x-1|$ 的图形如图 1-6 所示.

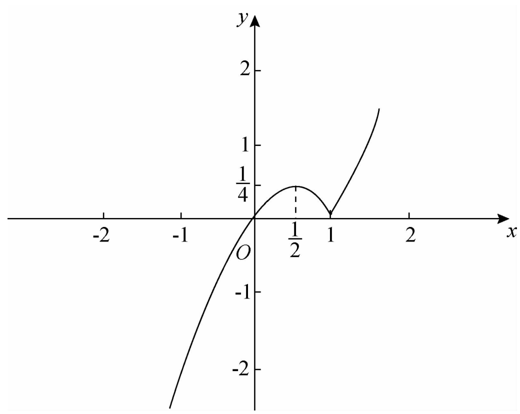

图 1-6

5. **解**:令 $u = \log_a x$ 则 $x = a^u$,则 $f^{-1}(u) = a^{2u} + 1$ 所以,$f^{-1}(x) = a^{2x} + 1$ 是 $f(x)$ 的反函数.

下面求 $f(x)$:设 $y = f^{-1}(x) = a^{2x} + 1$,解得 $a^{2x} = -1 + y$,故 $x = \frac{1}{2}\log_a(y-1)$,

因此,$f(x) = \frac{1}{2}\log_a(x-1)$,$x > 1$.

6. **解**:过点 A 作 $AC \perp OB$,在 $\mathrm{Rt}\triangle ACO$ 中:$OC = r\cos\varphi, AC = r\sin\varphi$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中:$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}$,

所以 $x = OC + CB = r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}$,又因为 $\varphi = \omega t$,

所以滑块 B 的运动规律 $x(t) = r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}$.

7. **解**:容器的底面积 $S = (l-2x)^2$,高为 x,因此容器的容积 $V = x \cdot (l-2x)^2, 0 < x < \frac{l}{2}$.

复习题一解答

1. **解**:$\because 2 \in [1,3]$,

$\therefore f(2) = 2 - 1 = 1$. $\because \frac{1}{2} \in [0,1)$, $\therefore f(\frac{1}{2}) = 2$.

$\because -\frac{1}{2} \in (-1,0)$, $\therefore f(-\frac{1}{2}) = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. **解**:(1) 不同. 因为函数 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ 的定义域为 $x \neq \pm 1$;而函数 $g(x) = \frac{1}{x+1}$ 的定义域为 $x \neq -1$.

(2) 不同. 因为函数 $f(x) = \sqrt{(1-x)^2}$ 的值域为$[0, +\infty)$;而函数 $g(x) = 1 - x$ 的值域为 $\mathbf{R}$.

(3) 相同. 因为无论 x 取何值,都有 $x = \ln e^x$.

3. **解**:(1) 要使 $f(x)$ 有意义,只有$\begin{cases} 1 - x^2 \neq 0 \\ x + 2 \geqslant 0 \end{cases}$,即 $-2 \leqslant x < -1$ 或 $-1 < x < 1$ 或 $x > 1$,所以函数

$y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$ 的定义域为$[-2, -1) \cup (-1,1) \cup (1, +\infty)$.

(2) 要使 $f(x)$ 有意义,只有$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ \left| \frac{1}{x+1} \right| \leqslant 1 \end{cases}$,即 $x > 1$ 或 $x \leqslant -2$. 所以函数 $y = \ln(x^2 - 1) + \arcsin \frac{1}{x+1}$ 的定义域为$(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$.

4. **解**:(1) 因为 $f(x), g(x)$ 符合复合条件,所以 $f[g(x)] = \sqrt{x^4 + 1}, g[f(x)] = (\sqrt{x+1})^4 = (x+1)^2$. 要使 $f[g(x)]$ 有意义,只有 $x^4 + 1 \geqslant 0$,即 $x \in \mathbf{R}$,所以 $f[g(x)] = \sqrt{x^4+1}$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$;要使 $g[f(x)]$ 有意义,只有 $x + 1 \geqslant 0$ 即 $x \geqslant -1$,所以 $g[f(x)] = (x+1)^2$ 的定义域为$[-1, +\infty)$.

(2) 因为 $f(x), g(x)$ 符合复合条件,所以 $f[g(x)] = \sqrt{1 - \sqrt{x-1}}, g[f(x)] = \sqrt{\sqrt{1-x} - 1}$. 要使 $f[g(x)]$ 有意义,只有$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ 1 - \sqrt{x-1} \geqslant 0 \end{cases}$ 即 $1 \leqslant x \leqslant 2$,所以 $f[g(x)] = \sqrt{1 - \sqrt{x-1}}$ 的定义域为$[1,2]$;要使 $g[f(x)]$ 有意义,只有$\begin{cases} 1 - x \geqslant 0 \\ \sqrt{1-x} - 1 \geqslant 0 \end{cases}$ 即 $x \leqslant 0$,所以 $g[f(x)] = \sqrt{\sqrt{1-x} - 1}$ 的定义域为$(-\infty, 0]$.

5. **解**:(1) 由 $y=1+\log_4 x$,解得 $y-1=\log_4 x$,于是 $x=4^{y-1}$,
故所求反函数为 $y=4^{x-1}$.
(2) 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 解得 $(2^x+1)y=2^x \Rightarrow (1-y)2^x=y$,故 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$,
所以所求反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$,$0<x<1$.
6. **解**:由 $f(x-1)=x^2+x+1$ 得 $f(x-1)=(x-1)^2+3(x-1)+3$,
令 $u=x-1$,则有 $f(u)=u^2+3u+3$,所以 $f(x)=x^2+3x+3$.
$\therefore f(\dfrac{1}{x-1})=(\dfrac{1}{x-1})^2+3(\dfrac{1}{x-1})+3=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{x-1}+3$.
7. **证明**:令 $x=y=0$,则 $2f(0)=f(0)\cdot f(0)$,又因为 $f(x)\neq 0$,所以 $f(0)=2$.
再令 $x=0$,则 $f(y)+f(-y)=2f(y)$,即 $f(y)=f(-y)$.
因此 $f(x)$ 是偶函数.