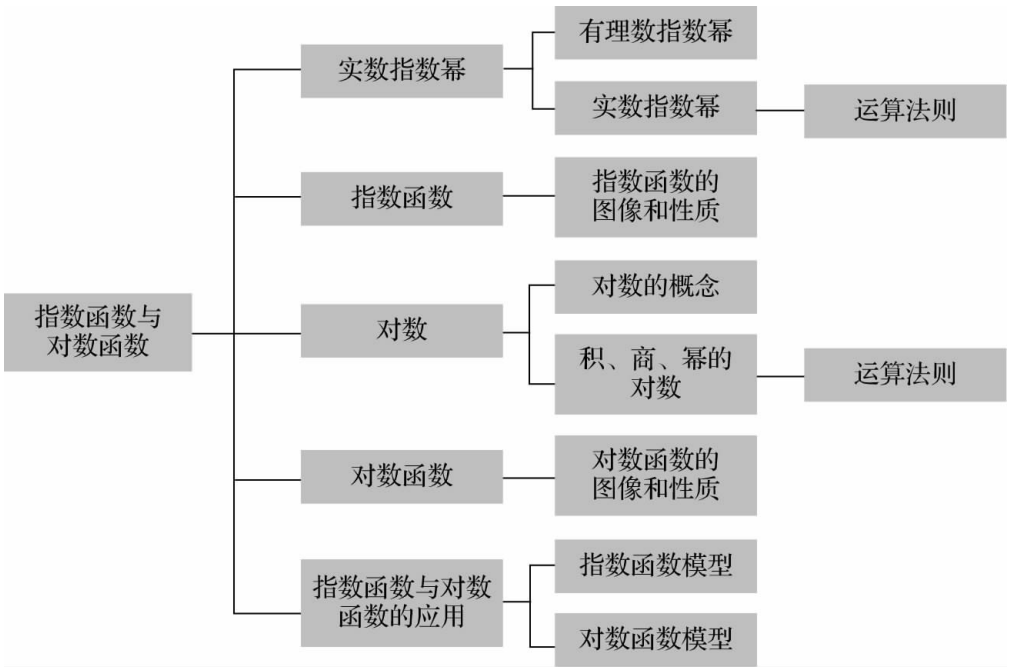
第5章

指数函数与对数函数

知识脉络



5.1 实数指数幂

5.1.1 有理数指数幂

学习目标

1. 了解 n 次方根及根式的概念，理解根式的运算性质.
2. 了解分数指数幂和有理数指数幂的概念.
3. 理解根式与分数指数幂的互化.

知识梳理

1. n 次方根

(1)定义：一般地，如果 $x^n=a(n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1)$，那么称 x 为 a 的_____.

(2)当 n 为偶数时，正数的 n 次方根有两个，即_____和_____，其中_____是 a 的 n 次算术根；负数的 n 次方根没有意义.

(3)当 n 为奇数时，实数 a 的 n 次方根只有一个，记作_____.

(4)无论 n 为奇数还是偶数，0 的 n 次方根是_____.

2. n 次根式

(1)定义：形如 $\sqrt[n]{a}$ $(n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1)$ 的式子称为 a 的_____，其中，a 称为_____，n 称为_____.

(2)根式的运算性质：$(\sqrt[n]{a})^n=$_____；$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}_____,n\text{ 为奇数},\\ _____,n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

3. 分数指数幂($n\in\mathbf{N}^*$ 且 $a\neq0$)

(1)我们规定，当 $a\neq0$ 时，$a^0=$_____，$a^{-n}=$_____.

(2)正分数指数幂：$a^{\frac{m}{n}}=$_____，其中 $m,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1$. 当 n 为奇数时，$a\in\mathbf{R}$；当 n 为偶数时，$a\geqslant0$.

(3)负分数指数幂：$a^{-\frac{m}{n}}=$_____$=$_____，其中 $a\neq0$，且 $a^{\frac{m}{n}}$ 有意义.

(4)0 的正分数指数幂是_____；0 的负分数指数幂无意义.

(答案在本节末尾)

典型例题

例 1　将下列各分数指数幂写成根式的形式.

(1)$7^{\frac{3}{4}}$；　(2)$a^{\frac{4}{3}}$；　(3)$a^{-\frac{2}{3}}(a\neq 0)$.

解　(1)$7^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{7^3}$. (2)$a^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{a^4}$. (3)$a^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$.

例 2　将下列各根式写成分数指数幂的形式.

(1)$\sqrt[3]{a^2}$；　(2)$\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}\right)^2$.

解　(1)$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$. (2)$\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{5}}\right)^2=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$.

点拨　熟记分数指数幂和根式的转化公式是解题关键.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 下列根式中无意义的是　(　　)

A. $\sqrt[4]{3}$　　B. $\sqrt[3]{0}$　　C. $\sqrt[4]{-2}$　　D. $\sqrt[3]{-2}$

2. $\pi^0=$　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 3.14　　D. π

3. $\sqrt{(-3)^2}=$　(　　)

A. 3　　B. -3　　C. 9　　D. -9

4. 8 的 3 次方根是　(　　)

A. 2　　B. -2　　C. 2 或-2　　D. 无意义

5. -16 的 4 次方根是　(　　)

A. 2　　B. -2　　C. 2 或-2　　D. 无意义

6. 下列等式不成立的是　(　　)

A. $(\sqrt{a})^2=a$　　B. $(\sqrt[3]{a})^3=a$

C. $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=\pi-3$　　D. $\sqrt{a^2}=a$

7. 把分数指数幂 $2^{-\frac{3}{4}}$ 化为根式的形式是　(　　)

A. $\sqrt[4]{2^3}$　　B. $-\sqrt[4]{2^3}$　　C. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$　　D. $-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$

二、填空题

8. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=$_____；$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}=$_____；$(\sqrt{6})^2=$_____；$\sqrt[3]{(-3)^3}=$_____.

9. -243 的五次方根为_____.

10. 用分数指数幂表示 $\sqrt[3]{m^2+n^2}$ 为_____.

三、解答题

11. 将下列各分数指数幂写成根式的形式.

(1) $2a^{\frac{4}{3}}$；　　(2) $-2a^{\frac{3}{4}}$.

12. 将下列各根式写成分数指数幂的形式.

(1) $\sqrt[4]{a^3}$；　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$；

(3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$；　　(4) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}$.

能 力 提 升

1. 化简：$\dfrac{\sqrt[4]{(3.14-\pi)^4}}{3.14-\pi}+\dfrac{\sqrt[5]{(a-b)^5}}{a-b}+\dfrac{\sqrt[6]{(\pi-\sqrt{10})^6}}{\pi-\sqrt{10}}=$　　(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 3　　D. -3

2. 计算：$\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}-\left(-\dfrac{3}{2+\sqrt{3}}\right)^0$.

3. 化简：$\sqrt[n]{(a-b)^n}+\sqrt[n]{(a+b)^n}$（$a<b<0,n>1,n\in\mathbf{N}^*$）.

知识梳理答案

1.（1）n 次方根　（2）$\sqrt[n]{a}$　$-\sqrt[n]{a}$　$\sqrt[n]{a}$　（3）$\sqrt[n]{a}$　（4）0

2.（1）n 次根式　被开方数　根指数　（2）a　a　$|a|$

3.（1）1　$\frac{1}{a^n}$　（2）$\sqrt[n]{a^m}$　（3）$\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$　$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$　（4）0

5.1.2　实数指数幂

学习目标

1. 了解实数指数幂的概念，掌握实数指数幂的运算法则.
2. 能用实数指数幂的运算法则进行运算和化简.

知识梳理

实数指数幂运算法则：

（1）$a^\alpha\cdot a^\beta=$_____；

（2）$(a^\alpha)^\beta=$_____；

（3）$(ab)^\alpha=$_____.

其中 $a>0,b>0,\alpha,\beta\in\mathbf{R}$.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1　计算下列各式.

（1）$27^{\frac{2}{3}}$；

（2）$4^{-\frac{1}{2}}$；

(3)$\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt[8]{2}}$.

解 (1)$27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^{3\times\frac{2}{3}}=3^2=9$.

(2)$4^{-\frac{1}{2}}=(2^2)^{-\frac{1}{2}}=2^{2\times(-\frac{1}{2})}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$.

(3)$\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt[8]{2}}=\dfrac{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{8}}}=2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{-\frac{1}{8}}=2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}=2^{\frac{13}{8}}$.

例 2 化简下列各式(各式中字母均为正数).

(1)$(p^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{3}{8}})^8$;

(2)$(-xy^{\frac{1}{3}})\cdot(2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}})\div(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{5}{3}})$;

(3)$\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a}}\div\sqrt[3]{a}$.

解 (1)$(p^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{3}{8}})^8=(p^{\frac{1}{4}})^8\cdot(q^{-\frac{3}{8}})^8=p^2\cdot q^{-3}=\dfrac{p^2}{q^3}$.

(2)$(-xy^{\frac{1}{3}})\cdot(2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}})\div(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{5}{3}})=(-xy^{\frac{1}{3}})\cdot(2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}})\cdot x^{-\frac{1}{3}}\cdot y^{-\frac{5}{3}}$

$=-2x^{1+\frac{2}{3}+(-\frac{1}{3})}y^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}}=-2x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{5}{6}}$.

(3)$\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a}}\div\sqrt[3]{a}=(a^{-1}b^2)^{\frac{1}{3}}\div a^{\frac{1}{3}}=(a^{-1})^{\frac{1}{3}}\cdot(b^2)^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}=a^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}=a^{(-\frac{1}{3})+(-\frac{1}{3})}b^{\frac{2}{3}}=a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$.

点拨 熟记实数指数幂的运算法则是解决问题的关键.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 若 $a>0$,则 $a^2\cdot a^{-2}=$ ( )

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. a^{-1}

2. 若 $a>0$,则下列运算法则不成立的是 ( )

A. $a^ma^n=a^{m+n}$　　B. $(a^m)^n=a^{m+n}$　　C. $(ab)^n=a^nb^n$　　D. $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

3. 若 $3^m=2,3^n=5$,则 $3^{m+n}=$ ( )

A. 5　　B. 2　　C. 10　　D. 7

4. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}=$ ( )

A. $2^{\frac{3}{4}}$　　B. $2^{\frac{7}{8}}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

5. 下列运算正确的是 ( )

A. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}=1$　　B. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}=2$　　C. $(2^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}}=1$　　D. $(2^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}}=2$

二、填空题

6. $\left(-\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=$_____.

7. $[(-\sqrt{2})^{-4}]^{-\frac{1}{2}}=$_____.

8. 设 $a>0,b>0,(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}})^{12}=$_____.

9. $12^3\times3^{-3}\times(2^{-3})=$_____.

10. $(10-6\times2\ 021^0)^{-2}=$_____.

三、解答题

11. 化简下列各题.

(1) $(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}})^6$；

(2) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2$；

(3) $\frac{a^2}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}(a>0)$；

(4) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$.

12. 计算下列各题.

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[6]{27}$；

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-4\times(-2)^{-3}+\left(\frac{1}{4}\right)^0-9^{-\frac{1}{2}}$.

能力提升

1. 计算下列各式的值.

(1) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+(-5.6)^{0}-\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}+0.125^{-\frac{1}{3}}$;

(2) $\left(27\frac{69}{70}\right)^{0}-\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]\div\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$.

2. 若 $a>0$, $b>0$, 化简: $\frac{a^{3}b^{2}\cdot\sqrt[3]{ab^{2}}}{(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}})^{4}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$.

知识梳理答案

(1) $a^{\alpha+\beta}$　(2) $a^{\alpha\beta}$　(3) $a^{\alpha}b^{\alpha}$

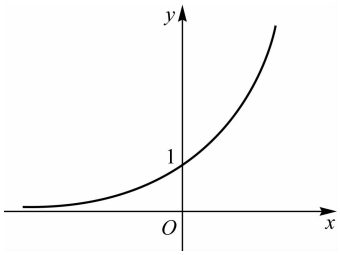
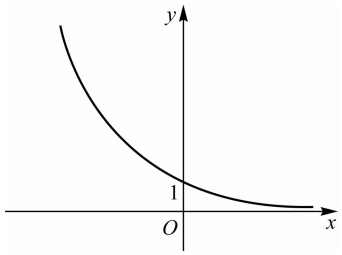
5.2　指数函数

学习目标

1. 了解指数函数的定义，能根据定义判断一个函数是否为指数函数.
2. 理解指数函数的图像和性质，能根据图像归纳出指数函数的性质.

知识梳理

指数函数的图像和性质如表所示.

定义	形如 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的函数称为指数函数	
特点	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	定义域：_____；值域：_____	
	图像过点_____	
	在$(-\infty,+\infty)$上是_____函数	在$(-\infty,+\infty)$上是_____函数
	当 $x<0$ 时，_____； 当 $x>0$ 时，_____	当 $x<0$ 时，_____； 当 $x>0$ 时，_____

（答案在本节末尾）

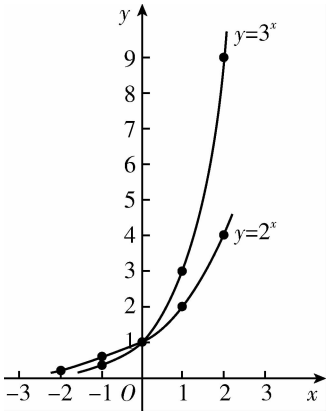
典型例题

例 1　作指数函数 $y=2^x$ 和 $y=3^x$ 的图像.

解　列出 x,y 的对应值如表所示：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=2^x$	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	…
$y=3^x$	…	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	…

用描点法，在同一坐标系中作出它们的图像，如图所示.

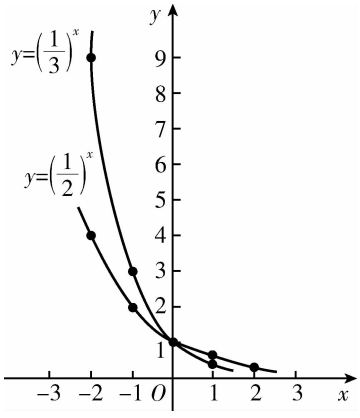


例 2 作指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图像.

解 列出 x，y 的对应值如表所示：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	…
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	…	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	…

用描点法，在同一坐标系中作出它们的图像，如图所示.



点拨 从例 1、例 2 所画出的函数的图像可以看出：

(1)这 4 个函数的图像都在 x 轴上方，且它们的图像都经过点(0,1)；

(2) $y=2^x$ 和 $y=3^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是增函数，当 x 逐渐减小时，其图像从 x 轴上方逐渐逼近 x 轴；$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数，当 x 逐渐增大时，其图像从 x 轴上方逐渐逼近 x 轴.

例 3　比较下列各组中两个值的大小.

(1)$5^{0.4}$与 $5^{0.6}$；

(2)0.8^{-3}与 $0.8^{-1.5}$；

(3)$10^{\frac{2}{3}}$与 1.

解　(1)函数 $y=5^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是增函数. 由于 $0.4<0.6$，所以 $5^{0.4}<5^{0.6}$.

(2)函数 $y=0.8^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数. 由于$-3<-1.5$，所以 $0.8^{-3}>0.8^{-1.5}$.

(3)函数 $y=10^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是增函数. 由于$\frac{2}{3}>0$，所以 $10^{\frac{2}{3}}>10^0=1$.

点拨　比较同底的指数大小，可利用指数函数的单调性得到大小关系.

例 4　求下列函数的定义域.

(1)$y=2^{1-x}$；

(2)$y=\frac{2}{3^x-1}$.

解　(1)$y=2^{1-x}=\frac{2}{2^x}$，$2^x>0$ 恒成立，故函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2)要使 $y=\frac{2}{3^x-1}$有意义，则应有 $3^x-1\neq0$，解得 $x\neq0$，所以函数 $y=\frac{2}{3^x-1}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

点拨　求定义域时要注意，含有分式时，分母不为零，然后再解含有指数幂的不等式即可.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 下列函数是指数函数的是　(　　)

A. $y=x$　　B. $y=x^2$　　C. $y=2^x$　　D. $y=(-2)^x$

2. 下列函数在$(-\infty,+\infty)$内是增函数的是　(　　)

A. $y=0.3^x$　　B. $y=2^x$　　C. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　D. $y=3^{-x}$

3. 下列函数在$(-\infty,+\infty)$内是减函数的是　(　　)

A. $y=3^x$　　B. $y=2^x$　　C. $y=10^x$　　D. $y=2^{-x}$

4. 函数 $y=3^x$ 的图像一定经过点 （　　）

A. (0,0)　　B. (0,1)　　C. (1,1)　　D. (1,0)

5. 函数 $y=0.2^x$ （　　）

A. 在 **R** 内是增函数　　B. 在$(0,+\infty)$内是增函数

C. 在 **R** 内是减函数　　D. 在$(0,+\infty)$内是减函数

6. 函数 $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$ 的 （　　）

A. 定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$(-\infty,+\infty)$

B. 定义域是$(0,+\infty)$，值域是$(0,+\infty)$

C. 定义域是$(0,+\infty)$，值域是$(-\infty,+\infty)$

D. 定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$(0,+\infty)$

7. 若函数 $y=a^x$ 是减函数，则 a 的取值范围是 （　　）

A. $a>0$　　B. $a<0$　　C. $0<a<1$　　D. $a>1$

二、填空题

8. 若$\left(\frac{3}{4}\right)^3>\left(\frac{3}{4}\right)^x$，则 x 的取值范围为_____.

9. 若 $3^{x-1}<1$，则 x 的取值范围为_____.

10. 若 $a^2<a^3$，则 a 的取值范围为_____.

三、解答题

11. 若指数函数 $f(x)=a^x$ 的图像过点(2,9)，求 a 的值.

12. 比较下列各组中两个数的大小.

(1)$0.7^{-0.9}$ 与 $0.7^{-1.2}$；　　(2)$3^{\frac{1}{4}}$ 与 $3^{\frac{1}{5}}$.

能 力 提 升

1. 函数 $y=2^x$ 与 $y=2^{-x}$ 的图像关于_____ 对称.

2. 已知指数函数 $f(x)=a^x$ 的图像经过点(3,8).

(1) 求该函数的解析式;

(2) 判断该函数的单调性;

(3) 求 $f(-3)$ 的值.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{2^x-8}$;　　(2) $y=\dfrac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{2^x-1}}$.

知识梳理答案

$(-\infty,+\infty)$　$(0,+\infty)$　$(0,1)$　增　减　$0<y<1$　$y>1$　$y>1$　$0<y<1$

5.3 对　　数

5.3.1 对数的概念

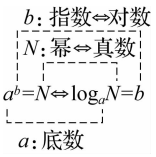
学习目标

1. 了解对数的概念及性质.
2. 了解常用对数与自然对数的表示方法.
3. 了解指数与对数的关系.

知识梳理

1. 对数：一般地，若 $a^b=N(a>0$ 且 $a\neq1)$，则称 b 是以 a 为底 N 的_____，记作_____. 其中，a 称为对数的_____，N 称为_____.

2. 指数式与对数式的转换：



3. 对数的性质（$a>0$ 且 $a\neq1$）：

（1）$\log_a 1=$_____；

（2）$\log_a a=$_____；

（3）N _____，即零和负数没有对数.

4. 常用对数：是指以 10 为底的对数，记作 $\log_{10}N$，简记为_____.

5. 自然对数：是指以无理数 e 为底的对数，记作 $\log_e N$，简记为_____ .

自然对数经常使用于科学研究和工程计算领域中.

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1　将下列指数式写成对数式.

(1)$3^4=81$；　(2)$2^{-5}=\frac{1}{32}$；　(3)$(0.7)^0=1$；　(4)$9^{\frac{1}{2}}=3$.

解　根据对数式与指数式的关系得：

(1)$\log_3 81=4$.　(2)$\log_2 \frac{1}{32}=-5$.　(3)$\log_{0.7} 1=0$.　(4)$\log_9 3=\frac{1}{2}$.

例 2　把下列对数式写成指数式.

(1)$\log_6 36=2$；　(2)$\log_2 \frac{1}{8}=-3$；　(3)$\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$；　(4)$\log_{10} 100=2$.

解　根据对数式与指数式的关系得：

(1)$6^2=36$.　(2)$2^{-3}=\frac{1}{8}$.　(3)$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$.　(4)$10^2=100$.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. lg 7 是以(　　)为底的对数.　(　　)

A. 1　　B. 7　　C. 10　　D. e

2. ln 2 是以(　　)为底的对数.　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 10　　D. e

3. 下列表示方法不正确的是　(　　)

A. $\log_{10} 5$　　B. log 5　　C. lg 5　　D. ln 5

4. 下列表示方法正确的是　(　　)

A. $\log_2(-5)$　　B. $\log_{(-2)} 8$　　C. $\lg(-7)$　　D. $\ln e^2$

5. 下列等式不正确的是　(　　)

A. $\log_2 2=1$　　B. $\lg(-10)=-1$

C. $\lg 10=1$　　D. $\ln 1=0$

6. 下列指数式与对数式的互化中，不正确的是　(　　)

A. $10^0=1$ 与 $\lg 1=0$　　B. $27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$ 与 $\log_{27}\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

C. $\log_3 9=2$ 与 $9^{\frac{1}{2}}=3$　　D. $\log_5 5=1$ 与 $5^1=5$

7. 在 $b=\log_{(a-2)}(5-a)$ 中，实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $a>5$ 或 $a<2$　　B. $2<a<5$

C. $2<a<3$ 或 $3<a<5$　　D. $3<a<4$

二、填空题

8. 计算：$\log_2 1=$_____；$\log_9 9=$_____；

$\log_{\frac{1}{3}} 1=$_____；$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=$_____.

9. 计算：$\lg 10\ 000=$_____；$\lg 0.001=$_____.

10. 计算：$\ln\frac{1}{e}=$_____；$\ln e^3=$_____.

三、解答题

11. 把下列指数式写成对数式.

(1) $e^{-2}=x$；　　(2) $10^x=5$；

(3) $4^{-2}=\frac{1}{16}$；　　(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

12. 把下列对数式写成指数式.

(1) $\log_2\frac{1}{16}=-4$；　　(2) $\log_5\frac{1}{5}=-1$；

(3) $\lg 100=2$；　　(4) $\ln\frac{1}{e}=-1$.

能力提升

1. $\log_7[\log_3(\log_2 x)]=0$，则 $x=$_____.

2. 求下列等式中 x 的值.

(1) $\lg x=-1$；　　(2) $\ln x=2$.

知识梳理答案

1. 对数　$b=\log_a N$　底数　真数

3. (1)0　(2)1　(3)>0

4. $\lg N$　5. $\ln N$

5.3.2　积、商、幂的对数

学习目标

1. 了解积、商、幂的对数及运算法则.

2. 能运用积、商、幂的运算法则解决有关问题.

知识梳理

1. 积、商、幂的对数的运算法则

如果 $a>0$ 且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$，那么

(1)$\log_a(MN)=$_____；

(2)$\log_a\dfrac{M}{N}=$_____；

(3)$\log_a M^n=$_____.

2. 换底公式

如果 $a>0$ 且 $a\neq1$，$b>0$，$c>0$ 且 $a\neq1$，那么 $\log_a b=$_____.

取 $c=10$，有 $\log_a b=$_____；

取 $c=\mathrm{e}$，有 $\log_a b=$_____.

(答案在本节末尾)

典型例题

例 1　用 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z$ 表示下列各式.

(1)$\lg x^2$；　(2)$\lg(x^2y^2z)$；　(3)$\lg\dfrac{x^2}{yz}$.

解　(1) $\lg x^2=2\lg x$.

(2)$\lg(x^2y^2z)=2\lg x+2\lg y+\lg z$.

(3)$\lg\dfrac{x^2}{yz}=2\lg x-\lg y-\lg z$.

例 2 求下列各式的值.

(1)$\log_3(27\times9)$； (2)$\lg 4+\lg 25$； (3)$\log_3 5-\log_3 15$.

解 (1)$\log_3(27\times9)=\log_3(3^3\times3^2)=\log_3 3^{3+2}=5$.

(2) $\lg 4+\lg 25=\lg(4\times25)=\lg 100=\lg 10^2=2$.

(3) $\log_3 5-\log_3 15=\log_3\frac{5}{15}=\log_3 3^{-1}=-1$.

点拨 熟记积、商、幂的对数及运算法则，就能迅速解决问题.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 若 $M,N>0$，则下列等式成立的是 ( )

A. $\lg(M+N)=\lg M+\lg N$　　B. $\lg(M-N)=\lg M-\lg N$

C. $\lg(MN)=\lg M\cdot\lg N$　　D. $\lg(MN)=\lg M+\lg N$

2. 若 $M,N>0$，则下列等式不成立的是 ( )

A. $\lg\sqrt[3]{N}=\frac{1}{3}\lg N$　　B. $\log_a M^n=(\log_a M)^n$

C. $\log_a\frac{N}{M}=\log_a N-\log_a M$　　D. $\log_a M^n=n\log_a M$

3. $\log_2 16=$ ( )

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 32

4. $\log_3 27-\log_3 9=$ ( )

A. $\log_3 18$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 2　　D. 1

5. 下列结论错误的是 ( )

A. $\log_2\frac{1}{8}=-3$　　B. $\log_5 1=0$　　C. $\log_7 7=1$　　D. $\log_4 8=2$

6. 如果 $\lg x=\lg a+2\lg b-3\lg c$，则 x 等于 ( )

A. $a+2b-3c$　　B. $a+b^2-c^3$　　C. $\frac{ab^2}{c^3}$　　D. $\frac{2ab}{3c}$

二、填空题

7. 计算.

$\log_{3.1}1=$_____；$\ln e^{-2}=$_____；$\lg 100=$_____；

$\lg\sqrt[5]{100}=$_____；$\log_3(27\times81)=$_____；$\log_{0.1}0.001=$_____；

$\lg 20-\lg 2=$_____；$\log_3 5+\log_3\frac{1}{5}=$_____；$\lg 4+2\lg 5=$_____.

8. $\log_3(\log_2 8)=$_____ .

9. $\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 3=$_____.

10. $2^{1+\frac{1}{2}\log_2 5}$的值等于_____.

三、解答题

11. 用 $\lg x$,$\lg y$,$\lg z$ 表示下列各式.

(1)$\lg\sqrt{x}$;　　(2)$\lg\left(\frac{y}{x}\right)^2$;　　(3)$\lg\frac{x^2\sqrt{y}}{z^3}$.

12. 求下列各式的值.

(1)$\log_2(4\times2^5)$;　　(2) $\log_{30}1+\log_6 36-2\log_7 7$;

(3)$2\lg 3+\lg 7+\lg\frac{25}{7}-\lg\frac{9}{4}+\ln 1$.

能 力 提 升

1. 计算:$\frac{(1-\lg 5)^2+\lg 2\lg 5}{\lg 8}$.

2. 设 $\lg 2=a$, $\lg 3=b$,用 a,b 表示 $\log_5 12$.

知识梳理答案

1. (1)$\log_a M+\log_a N$　(2)$\log_a M-\log_a N$　(3)$n\log_a M$

2. $\frac{\log_c b}{\log_c a}$　$\frac{\lg b}{\lg a}$　$\frac{\ln b}{\ln a}$

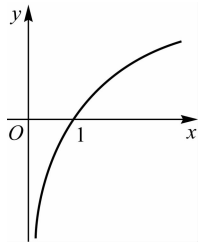
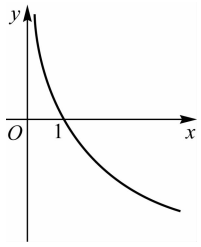
5.4 对数函数

学习目标

1. 了解对数函数的定义、图像和性质.
2. 通过对对数函数图像的观察及讨论，总结出对数函数的性质.

知识梳理

对数函数的图像和性质如表所示.

定义	形如 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的函数称为对数函数	
特点	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	定义域：_____；值域：_____	
	图像过点_____	
	在$(0,+\infty)$上是_____函数	在$(0,+\infty)$上是_____函数
	当 $0<x<1$ 时，y _____ 0； 当 $x>1$ 时，y _____ 0	当 $0<x<1$ 时，y _____ 0； 当 $x>1$ 时，y _____ 0

（答案在本节末尾）

典型例题

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\log_5(x-3)$；

(2) $y=\lg(x^2+2x)$.

解 (1)要使函数有意义，则需 $x-3>0$，即 $x>3$.

所以函数的定义域为$(3,+\infty)$.

(2)要使函数有意义，则需 $x^2+2x>0$，即 $x>0$ 或 $x<-2$.

所以函数的定义域为$(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$.

点拨　对数的真数一定要大于零.

例 2　比较下列各组中两个值的大小.

(1)$\ln 5$ 与 $\ln 7$；　(2)$\log_{\frac{1}{2}}0.3$ 与 $\log_{\frac{1}{2}}2.3$.

解　(1)函数 $y=\ln x$ 在$(0,+\infty)$上是增函数. 因为 $5<7$,所以 $\ln 5<\ln 7$.

(2)函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在$(0,+\infty)$上是减函数. 因为 $0.3<2.3$,所以 $\log_{\frac{1}{2}}0.3>\log_{\frac{1}{2}}2.3$.

点拨　当底数相同时,利用相同底数的对数函数的单调性来判断大小.

巩固练习

基 础 巩 固

一、选择题

1. 若函数 $y=\log_a x$ 的图像经过点$(2,-1)$,则底数 $a=$　(　　)

A. 2　　B. -2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

2. 下列对数函数在区间$(0,+\infty)$内为减函数的是　(　　)

A. $y=\lg x$　　B. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$　　C. $y=\ln x$　　D. $y=\log_2 x$

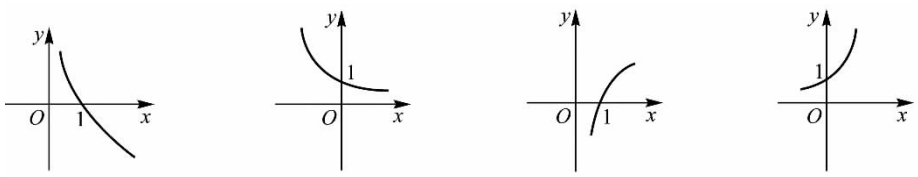
3. 函数 $y=\log_3(x+1)$的定义域为　(　　)

A. $\mathbf{R}$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $[-1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)$

4. 函数 $f(x)=\log_2\frac{1}{1-3x}$的定义域为　(　　)

A. $\left\{x\middle|x\neq\frac{1}{3}\right\}$　　B. $\{x|x>0\}$　　C. $\left\{x\middle|0<x<\frac{1}{3}\right\}$　　D. $\left\{x\middle|x<\frac{1}{3}\right\}$

5. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的图像大致是　(　　)



A　　B　　C　　D

6. 对数函数的图像一定过　(　　)

A. 第一、二象限　　B. 第一、三象限

C. 第一、四象限　　D. 第二、三象限

二、填空题

7. 设函数 $f(x)=2\lg x+1$,则 $f(10)=$_____.

8. 对数函数 $y=\log_a x(a>1)$的图像经过点_____;该函数在定义域上是_____(填“增”或“减”)函数.

9. 比较大小：$\log_2 5$ _____ $\log_2 6$，$\log_{0.2} 5$ _____ $\log_{0.2} 6$.

10. 若 $\log_7 x > \log_7 6$，则 x 的取值范围为_____.

三、解答题

11. 已知对数函数 $f(x)=\log_a x$ 的图像经过点(8,3).

(1) 求该函数的解析式；

(2) 判断该函数的单调性；

(3) 求 $f(16)$的值.

12. 若 $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2) > \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$，求 x 的取值范围.

能力提升

1. 若 $\log_a 2 < \log_a 3$，则 a 的取值范围为_____.

2. 用“<”把 $\log_2 3$，$\log_2 1$ 和 $\log_{0.2} 2$ 连接起来为_____.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{\log_2(-x^2+4x-3)}$；　　(2) $y=3+4\sqrt{\log_{0.3}(x-3)}$.

4. 若 $a=\log_2 3.6$，$b=\log_4 3.2$，$c=\log_4 3.6$，试比较 a，b，c 的大小.

知识梳理答案

$(0,+\infty)$　$(-\infty,+\infty)$　$(1,0)$　增　减　<　>　>　<

5.5　指数函数与对数函数的应用

学习目标

初步掌握从实际情境中抽象出指数函数、对数函数模型解决实际问题的方法.

知识梳理

解应用题的步骤如下：

(1)审题，了解问题背景，寻找实际问题与函数知识的结合点，分析题中的数量关系.

(2)建立数学模型.

(3)建立方程.

(4)解方程，把数学问题还原为实际问题.

典型例题

例 1　某城市现有人口总数 100 万人，如果年自然增长率为 1.2%，试解答下面的问题：

(1)设 x 年后该城市的人口总数为 y 万人，写出 y 与 x 的函数关系式；

(2)计算 10 年以后该城市人口总数(精确到 0.1 万人).

解　(1)1 年后，即当 $x=1$ 时，$y=100\times(1+1.2\%)=100\times1.012$，

2 年后，即当 $x=2$ 时，$y=100\times1.012\times(1+1.2\%)=100\times1.012^2$，

3 年后，即当 $x=3$ 时，$y=100\times1.012^2\times(1+1.2\%)=100\times1.012^3$，

……

由此得到，x 年后该城市的人口总数为 $y=100\times1.012^x(x\in\mathbf{N}^*)$.

(2)当 $x=10$ 时，$y=100\times1.012^{10}\approx112.7$. 故 10 年后该城市的人口总数约为 112.7 万人.

点拨　解决实际问题时，要注意题目中要求的精确度.

例 2　为了提高教师的待遇，国家计划每年将教师工资提高 5%，若张老师现在年收入 10 万元，问大约经过多少年，张老师的工资可翻一番？

解　设 x 年后张老师工资为 y 元.

由题意得 $y=10\times(1+5\%)^x$，令 $20=10\times(1+5\%)^x$，则 $1.05^x=2$，得 $x=\log_{1.05}2\approx14$.

故大约经过 14 年张老师的工资可翻一番.

点拨 在解决对数函数的问题时，先利用指数函数进行研究，再转化为对数函数或求对数值. 解决实际问题时，还要结合实际情况，回归实际问题时要考虑是否有取整的需要.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 一辆价值为 20 万元的汽车，按每年 20%的折旧率折旧，设 x 年后汽车的价值为 y 万元，则 y 与 x 的函数解析式为 （　　）

A. $y=20\times0.2^x$　　B. $y=20\times0.8^x$

C. $y=20\times1.2^x$　　D. $y=20\times1.02^x$

2. 一件价值为 200 万元的清代文物，每年升值 10%，设 x 年后该文物价值为 y 万元，则 y 与 x 的函数解析式为 （　　）

A. $y=200\times0.1^x$　　B. $y=200\times0.9^x$

C. $y=200\times1.1^x$　　D. $y=200\times1.01^x$

二、解答题

3. 某细胞每 30 分钟裂变一次，分裂成两个细胞，那么 3 小时后，这个细胞可分裂到多少个？

4. 为响应国家号召，我国西北地区将对 3 万公顷荒地进行绿化，从 2018 年起每年将荒地的 20%种植树木，经过 4 年后还有多少荒地需要绿化？

5.某工厂购买了一套价值100万元的设备,若年折旧率为10%,问经过多少年后,设备的价值仅为原来的一半?

6.某城市现有人口100万,根据最近几年统计,这个城市的人口自然增长率为0.6%,按这个增长率计算,试问多少年后这个城市的人口可达到120万?

能力提升

1.某城市2020年的国民生产总值为25亿元,如果增长率保持7.8%,试求到2026年该市的国民生产总值将达到多少亿元(精确到0.01).

2.已知放射性物质镭经过100年残留量是原来的95.76%,试计算它的半衰期(保留四位有效数字).

第 5 章测试题

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

1. 若 $a>0$,则 $a^3\cdot a^{-3}=$ ( )

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. a^{-1}

2. $\sqrt[4]{(-2)^4}$的运算结果是 ( )

A. 2　　B. -2　　C. ± 2　　D. 不确定

3. 下列函数是指数函数的是 ( )

A. $y=2x$　　B. $y=x^2$　　C. $y=3^x$　　D. $y=(-3)^x$

4. 若$(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$有意义,则 x 的取值范围是 ( )

A. $x\in\mathbf{R}$　　B. $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq\frac{1}{2}$

C. $x>\frac{1}{2}$　　D. $x<\frac{1}{2}$

5. 函数 $y=\log_3 x$ 的图像一定经过点 ( )

A. $(0,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,1)$　　D. $(1,0)$

6. 函数 $y=\log_2 x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像关于 ( )

A. x 轴对称　　B. y 轴对称

C. 原点对称　　D. 直线 $y=x$ 对称

7. 若函数 $\log_{(a-1)} x$ 在$(0,+\infty)$内为增函数,则 a 的取值范围是 ( )

A. $a>1$　　B. $a>2$　　C. $0<a<1$　　D. $a>0$

8. 已知 $0<a<1$,$b<-1$,则函数 $f(x)=a^x+b$ 的图像不经过 ( )

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

9. 若$\left(\frac{1}{2}\right)^{2a+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2a}$,则实数 a 的取值范围为 ( )

A. $(1,+\infty)$　　B. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

10. 设 $a=\log_{\frac{1}{3}}2$,$b=\log_{\frac{1}{3}}3$,$c=\left(\frac{1}{2}\right)^{0.3}$,则 ( )

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<c<a$　　D. $b<a<c$

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

11. 设 $a>0$,$b>0$,$(a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{4}})^{12}=$_____.

12. 函数 $y=\lg(4-x)$的定义域为_____.

13. 若指数函数 $y=a^x$ 的图像过点$(2,4)$,则 $a=$_____.

14. $\lg 20+\log_{100}25=$_____.

15. 若 $3^a=2$，则 $\log_3 8-2\log_3 6=$_____.（用含 a 的式子表示）

16. 方程 $2^{\log_3 x}=\frac{1}{4}$ 的解是_____.

三、解答题(本大题共 4 小题，第 17 小题 8 分，第 18 小题 10 分，第 19、20 小题每小题 9 分，共 36 分)

17. 计算：

(1) $(-1.8)^0+(1.5)^{-2}\times\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}+9^{\frac{3}{2}}$；

(2) $\log_{30}1+\log_6 36-2\log_7 7+\lg 4+2\lg 5+\ln e^{-4}$.

18. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{2^x-16}$；

(2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}}$.

19. 已知对数函数 $f(x)=\log_a x$ 的图像经过点(16,2).

(1) 求该函数的解析式；

(2) 求 $f(64)$的值.

20. 某纯净水制造厂在净化水过程中，每增加一次过滤可减少水中杂质的 20%，要使水中杂质减少到原来的 5%以下，则至少需要过滤几次？（参考数据：$\lg 2\approx 0.301\ 0$，$\lg 3\approx 0.477\ 1$）