第 1 单元

直线与圆的方程

1.1 两点间距离公式及线段的中点坐标公式

知识梳理

1. 两点间距离公式

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$为坐标平面上任意两点，则 A 与 B 的距离为

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

2. 线段的中点坐标公式

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$是平面直角坐标系内的任意两点，点 $M(x_0,y_0)$是线段 AB 的中点，则

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},y_0=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

典例精解

例 1 求点 $A(-5,0)$，$B(3,-3)$之间的距离.

解 根据两点间距离公式可知，$|AB|=\sqrt{(3+5)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{73}$.

技巧点拨 掌握两点间距离公式是解题的关键.

【变式训练 1】 已知点 $A(1,0)$，$B(m,-2)$之间的距离为 $2\sqrt{10}$，求 m 的值.

例 2 已知点 $A(4,m)$，$B(n,-4)$，线段 AB 的中点坐标为(2,1)，求 m 和 n.

解 根据题意可知$\frac{4+n}{2}=2$，$\frac{m-4}{2}=1$，解得 $m=6$，$n=0$.

技巧点拨 中点坐标公式与起点 A 和终点 B 的顺序无关，只与起点和终点的位置有关.

【变式训练 2】 求点 $A(-1,2)$关于点 $B(1,0)$对称的点的坐标.

自我检测

1. 求下列两点之间的距离.

(1)$A(0,-2)$，$B(3,0)$；

(2)$A(-3,1)$，$B(2,4)$；

(3)$A(4,-2)$，$B(1,2)$；

(4)$A(5,-2)$，$B(-1,6)$；

(5)$A(1,-2)$，$B(3,5)$；

(6)$A(4,-3)$，$B(12,3)$.

2. 求线段 AB 的中点坐标.

(1) $A(2,-1)$, $B(3,4)$；　　(2) $A(0,-3)$, $B(5,0)$；

(3) $A\left(3,-\frac{5}{3}\right)$, $B\left(4,-\frac{2}{3}\right)$；　　(4) $A(6,1)$, $B(3,3)$；

(5) $A(4,-2)$, $B(6,4)$；　　(6) $A(1,-1)$, $B(3,7)$.

3. 有一线段 AB，它的中点坐标是 $(4,2)$，端点 A 的坐标是 $(-2,3)$，求另一端点 B 的坐标.

4. 已知点 $A(2,-1)$，$B(a,4)$，并且 $|AB|=\sqrt{41}$，求 a 的值.

5. 已知△ABC 三个顶点的坐标分别为 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，$C(0,\sqrt{3}a)$.

(1)求证：△ABC 是等边三角形；

(2)求这个三角形的中线长.

1.2 直线及其方程

1.2.1 直线的倾斜角与斜率

知识梳理

1. 倾斜角

直线 l 在直角坐标系中与两个坐标轴有不同的夹角，其中直线 l 向上的方向与 x 轴的正

方向所成的最小正角，叫作直线 l 的**倾斜角**.

2. 斜率

直线 l 的倾斜角为 α（$\alpha \neq 90°$），则 α 的正切值叫作这条直线的**斜率**.

3. 斜率的计算公式

设点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 为直线 l 上的任意两点，则直线 l 的斜率为

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ (x_1 \neq x_2).$$

典例精解

例 1　下列说法中，正确的是（　　）.

A. 平行于 x 轴的直线的倾斜角是 $0°$ 或 $180°$

B. 两条直线的倾斜角相等，它们的斜率也相等

C. 任意一条直线都有倾斜角和斜率

D. 直线斜率的范围是 $(-\infty, +\infty)$

解　平行于 x 轴的直线的倾斜角为 $0°$，选项 A 错误；若两条直线的倾斜角都是 $90°$，则它们的斜率不存在，选项 B，C 错误；故选项 D 正确.

技巧点拨　本题主要考查直线的倾斜角与斜率的概念.

【变式训练 1】　下列说法中，正确的是（　　）.

A. 若一条直线的倾斜角为 α，则这条直线的斜率为 $\tan\alpha$

B. 若一条直线的斜率为 $\tan\alpha$，则这条直线的倾斜角为 α

C. 任意一条直线都有倾斜角

D. 直线的倾斜角越大，它的斜率就越大

例 2　求满足下列倾斜角的直线的斜率.

(1) $\alpha=\frac{\pi}{4}$；　(2) $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

解　(1) $k=\tan\frac{\pi}{4}=1$.

(2) $k=\tan\frac{2\pi}{3}=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

技巧点拨　若直线的倾斜角为 α，则斜率 $k=\tan\alpha$.

【变式训练 2】　已知某直线倾斜角的正弦值为 $\frac{3}{5}$，求该直线的斜率.

例 3 已知直线 l 过点 $A(3,-2)$，$B(-5,6)$，求直线 l 的斜率和倾斜角.

解 设直线 l 的斜率为 k，倾斜角为 α. $k=\frac{6-(-2)}{-5-3}=-1$，即 $\tan\alpha=-1$. 因为 $\alpha\in[0°,180°)$，所以 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$. 因此，直线 l 的斜率为 -1，倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$.

技巧点拨 若直线过点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则直线的斜率为 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$.

【变式训练 3】 已知直线过点 $A(-2,0)$，$B(-5,3)$，求该直线的斜率.

自我检测

1. 选择题.

(1)直线 $x=3$ 的倾斜角是(　　).

A. 0　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 不存在

(2)已知直线 l 的倾斜角为 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，则直线 l 的斜率为(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 不存在　　D. 不能确定

(3)如图 1-1 所示，直线 l_1，l_2，l_3 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3，则(　　).

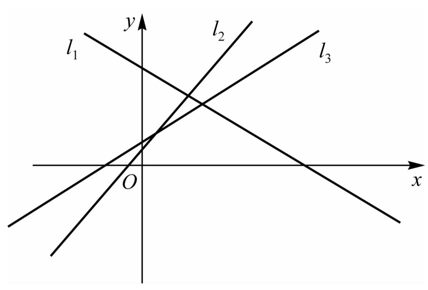

图 1-1

A. $k_1<k_2<k_3$　　B. $k_3<k_1<k_2$

C. $k_3<k_2<k_1$　　D. $k_1<k_3<k_2$

2. 填空题.

(1)直线倾斜角 α 的取值范围是________.

(2)平行于 x 轴的直线的倾斜角为________;平行于 y 轴的直线的倾斜角为________.

(3)已知直线的倾斜角为 $135°$,则此直线的斜率是________.

(4)经过点 $P(-5,1)$,$Q(1,7)$的直线的斜率为________,倾斜角为________.

3. 判断满足下列条件的直线的斜率是否存在. 若存在,求出结果.

(1)直线的倾斜角为 $45°$;

(2)直线过点 $A(-1,5)$,$B(4,5)$;

(3)点 $A(-2,3)$,$B(-2,7)$在直线上;

(4)直线过点 $A(2,-1)$，$B(-3,5)$.

4.若直线 l 过点 $P(-3,1)$，$Q(-5,3)$，求直线 l 的倾斜角.

5.求满足下列条件的直线的斜率.

(1)直线的倾斜角为 $30°$；

(2)直线的倾斜角为 $120°$；

(3)直线过点 $A(2,-1)$,$B(1,-2)$;

(4)直线平行于 y 轴.

6.求过点 $P(1,0)$,$Q(4,\sqrt{3})$的直线的倾斜角.

7.已知过点 $A(2,x)$,$B(1,-2)$的直线的斜率是 3,求 x 的值.

8. 若点 $A(3,1)$，$B(-2,y)$，$C(8,11)$在同一条直线上，求 y 的值.

1.2.2 直线的点斜式和斜截式方程

知识梳理

(1)**点斜式方程**：斜率为 k，并且经过点 $P_0(x_0,y_0)$的直线的点斜式方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$.

(2)**截距**：直线 l 与 x 轴交于点 $A(a,0)$，与 y 轴交于点 $B(0,b)$，则 a 叫作直线 l 在 x 轴上的**截距**(或**横截距**)；b 叫作直线在 y 轴上的**截距**(或**纵截距**).

(3)**斜截式方程**：斜率为 k，在 y 轴上的截距为 b 的直线的斜截式方程为 $y=kx+b$.

典例精解

例 1 已知直线 l 经过点 $A(-1,4)$，倾斜角为 $135°$，求直线 l 的点斜式方程.

解 根据题意可知，直线 l 的斜率为 $k=\tan 135°=-1$. 故直线 l 的点斜式方程为

$$y-4=-(x+1).$$

技巧点拨 在求点斜式方程时，一般需要先求斜率. 求斜率的方法一般有两种，即已知两点求斜率和已知倾斜角求斜率.

【变式训练 1】 求过点 $A(-1,2)$且斜率为 2 的直线的点斜式方程.

例 2 已知直线 l 的倾斜角的余弦值为$\frac{4}{5}$，横截距为-4，求直线 l 的斜截式方程.

解 设直线 l 的方程为 $y=kx+b$，倾斜角为 α. 根据题意可知，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha\in[0°,180°)$，

所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$，即 $k=\frac{3}{4}$. 又因为横截距为 -4，所以直线 l 过点 $(-4,0)$，将该点代入 $y=\frac{3}{4}x+b$，解得 $b=3$. 故直线 l 的斜截式方程为 $y=\frac{3}{4}x+3$.

技巧点拨　掌握斜截式方程的基本形式和同角三角函数的基本关系是解题的关键.

【变式训练 2】　已知直线 l 过点 $A(1,0)$，$B(2,3)$，求直线 l 的斜截式方程.

自我检测

1. 填空题.

(1)过点 $(-1,2)$ 且平行于 x 轴的直线方程为________.

(2)已知直线 l 的倾斜角为 $60°$，并且经过点 $P(2,3)$，则直线 l 的方程为________. 直线 l 在 y 轴上的截距是________.

(3)已知直线 l 的点斜式方程是 $y-3=\frac{1}{5}(x-2)$，则直线 l 的斜率是________，它所经过的点是________.

(4)经过点 $(2,1)$，$(6,-3)$ 的直线方程为________.

2. 求经过点 $A(3,1)$，倾斜角为 $60°$ 的直线的点斜式方程.

3. 求斜率为 3，且与 y 轴的交点为 $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ 的直线的斜截式方程.

4. 直线方程为 $y=kx+b$，且过点 $P_1(4,5)$，$P_2(3,-1)$，求 k，b 的值.

1.2.3 直线的一般式方程

知识梳理

方程 $Ax+By+C=0$（其中 A，B 不全为 0）叫作直线的一般式方程.

典例精解

例 已知直线 l 过点 $A(-5,4)$，$B(2,1)$，求直线 l 的一般式方程.

解 设直线 l 的一般式方程为 $Ax+By+C=0$. 根据题意列方程组，$\begin{cases}-5A+4B+C=0\\2A+B+C=0\end{cases}$，解得 $A=\dfrac{3}{7}B$，$C=-\dfrac{13}{7}B$.

故直线 l 的一般式方程为

$$3x+7y-13=0.$$

技巧点拨 掌握直线的一般式方程的形式及方程组的解法是解题的关键.

【变式训练】 求直线 $x-y+3=0$ 的斜率及其在 y 轴上的截距.

自我检测

1. 选择题.

(1)直线 $x+6y+2=0$ 在 x 轴和 y 轴上的截距分别是(　　).

A. $2,\frac{1}{3}$　　B. $-2,-\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{2},-3$　　D. $-2,-3$

(2)直线过点$(-3,-2)$且在两坐标轴上的截距相等,则该直线的方程为(　　).

A. $2x-3y=0$　　B. $x+y+5=0$

C. $2x-3y=0$ 或 $x+y+5=0$　　D. $x+y+5=0$ 或 $x-y+5=0$

(3)斜率是-1,且与 y 轴的交点是$(0,-3)$的直线 l 的一般式方程是(　　).

A. $y-x+3=0$　　B. $x+y+3=0$

C. $x-y+3=0$　　D. $x+3y=0$

(4)下列说法正确的是(　　).

A. 经过定点 $P_0(x_0,y_0)$的直线都可以用方程 $y-y_0=k(x-x_0)$表示

B. 经过定点 $A(0,b)$的直线都可以用方程 $y=kx+b$ 表示

C. 不经过原点的直线都可以用方程$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 表示

D. 经过任意两个不同的点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$的直线都可以用方程$(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$表示

2. 填空题.

(1)直线 l:$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-3}=1$ 在 x 轴上的截距是____________.

(2)把直线 l 的一般式方程 $2x-y+6=0$ 化成斜截式方程是____________.

3. 把直线 l 的一般式方程 $x-2y+6=0$ 化成斜截式方程,求出直线 l 的斜率及在 x 轴和 y 轴上的截距,并画图.

4.根据下列各条件写出直线的方程,并且化成一般式方程.

(1)经过点 $A(6,-4)$,斜率为$-\frac{4}{3}$;

(2)经过点 $B(4,2)$,平行于 x 轴;

(3)在 x 轴和 y 轴上的截距分别为$\frac{3}{2}$,-3;

(4)经过点 $P_1(3,-2)$,$P_2(5,4)$.

5.已知△ABC的三个顶点为$A(3,-4)$,$B(0,3)$,$C(-6,0)$,求它的三条边所在直线的方程.

1.3　两条直线的位置关系

1.3.1　两条相交直线的交点

知识梳理

在同一平面内,若两条直线 l_1 和 l_2 相交,且它们的斜率 k_1 和 k_2 都存在,则 $k_1 \neq k_2$;若两条直线 l_1 和 l_2 的斜率 k_1 与 k_2 都存在,且 $k_1 \neq k_2$,则 l_1 和 l_2 相交.

在同一平面内,若直线 l_1 的斜率不存在,直线 l_2 的斜率存在,则 l_1 和 l_2 相交.

求两条直线的交点坐标就是求这两条直线方程所构成的方程组的解.

典例精解

例　判断直线 $2x+y-1=0$ 和直线 $x+3y-6=0$ 是否相交.若相交,请求出交点的坐标.

解　直线 $2x+y-1=0$ 可化为斜截式方程 $y=-2x+1$,斜率为-2.

直线 $x+3y-6=0$ 可化为斜截式方程 $y=-\dfrac{1}{3}x+2$,斜率为$-\dfrac{1}{3}$.

因为两条直线的斜率存在且不相等,故两条直线相交.

列方程组$\begin{cases}2x+y-1=0\\x+3y-6=0\end{cases}$,解得 $x=-\dfrac{3}{5}$,$y=\dfrac{11}{5}$.故两条直线的交点为$\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{11}{5}\right)$.