第五章

指数函数与对数函数

5.1 实数指数幂

5.1.1 有理数指数幂

学习目标

1. 通过阅读，理解并熟练叙述 n 次方根与分数指数幂的定义.
2. 通过讨论，总结出 n 次方根与分数指数幂之间的关系和转化.
3. 通过训练，能运用根式的性质进行简单的运算.

课前——知识·梳理

一、n 次方根

1. 定义：一般地，如果 $x^n=a(n\in \mathbf{N}^*$ 且 $n>1)$，那么 x 叫作 a 的 n 次方根.

2. 当 n 为偶数时，正数的 n 次方根有两个，即 $\sqrt[n]{a}$ 和 $-\sqrt[n]{a}$，其中 $\sqrt[n]{a}$ 是 a 的 n 次算术根；负数的 n 次方根没有意义.

3. 当 n 为奇数时，实数 a 的 n 次方根只有一个，记作 $\sqrt[n]{a}$.

4. 无论 n 为奇数还是偶数，0 的 n 次方根是 0.

二、n 次根式

1. 定义：形如 $\sqrt[n]{a}$（$n\in \mathbf{N}^*$ 且 $n>1$）的式子叫作 a 的 n 次根式，其中，a 叫作被开方数，n 叫作根指数.

2. 根式的运算性质：

$(\sqrt[n]{a})^n=a$；

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a, & n\text{ 为奇数},\\ |a|, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

三、分数指数幂（$n\in \mathbf{N}^*$ 且 $a\neq 0$）

1. $a^0=1$，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$.

2. 分数指数幂与根式的关系

(1) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，其中 $m,n\in \mathbf{N}^*$ 且 $n>1$. 当 n 为奇数时，$a\in \mathbf{R}$，当 n 为偶数时，$a\geqslant 0$.

(2) $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$，其中 $a^{\frac{m}{n}}$ 有意义.

(3) 0 的正分数指数幂是 0；0 的负分数指数幂无意义.

课中——练习·探究

当堂检测

1. $-4^2=$ （　　）

A. 8　　B. -8　　C. 16　　D. -16

2. $\sqrt[3]{-8}=$ （　　）

A. 2　　B. -2　　C. 4　　D. -4

3. 16 的 4 次方根是 （　　）

A. 2　　B. -2　　C. 2 或 -2　　D. 无意义

4. 下列等式不成立的是 （　　）

A. $\sqrt[4]{3^4}=3$　　B. $\sqrt[4]{(-3)^4}=-3$　　C. $\sqrt[4]{(-3)^4}=3$　　D. $\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$

5. 将下列各根式写成分数指数幂的形式.

(1) $\sqrt[3]{a^2}$；　　(2) $\left(\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\right)^2$.

6. 将下列各分数指数幂写成根式的形式.

(1) $a^{\frac{4}{3}}$；　　(2) $a^{-\frac{2}{3}}$；　　(3) $7^{\frac{3}{4}}$.

归纳探究

若 $m,n\in\mathbf{N}^*$，使 $\sqrt[n]{a^m}$ 有意义，对 a 有何要求？

课后——巩固·提升

一、选择题

1. 下列根式中无意义的是　　（　　）

A. $\sqrt[4]{3}$　　B. $\sqrt[3]{0}$　　C. $\sqrt[4]{-2}$　　D. $\sqrt[3]{-2}$

2. $\pi^0=$　　（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 3.14　　D. π

3 $\sqrt{(-3)^2}=$　　（　　）

A. 3　　B. -3　　C. 9　　D. -9

4. 8 的 3 次方根是　　（　　）

A. 2　　B. -2　　C. 2 或-2　　D. 无意义

5. -16 的 4 次方根是　　（　　）

A. 2　　B. -2　　C. 2 或-2　　D. 无意义

6. 下列等式不成立的是　　（　　）

A. $(\sqrt{a})^2=a$　　B. $(\sqrt[3]{a})^3=a$

C. $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=\pi-3$　　D. $\sqrt{a^2}=a$

7. 把分数指数幂 $2^{-\frac{3}{4}}$ 化为根式的形式是　　（　　）

A. $\sqrt[4]{2^3}$　　B. $-\sqrt[4]{2^3}$　　C. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$　　D. $-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$

二、解答题

1. 将下列各分数指数幂写成根式的形式.

（1）$2a^{\frac{4}{3}}$；　　（2）$-2a^{\frac{3}{4}}$.

2. 将下列各根式写成分数指数幂的形式.

（1）$\sqrt[4]{a^3}$；　（2）$\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$；　（3）$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$；　（4）$\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}}$.

5.1.2　实数指数幂

学习目标

1. 通过阅读，了解实数指数幂的含义并掌握其运算法则.
2. 通过训练，能熟练运用运算法则进行化简和计算.

课前——知识·梳理

实数指数幂的运算法则（$a>0$ 且 $m,n\in\mathbf{R}$）.

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；

$(a^m)^n=a^{mn}$；

$(ab)^n=a^nb^n$.

课中——练习·探究

当堂检测

1. 计算下列各式.

(1)$8^{\frac{3}{5}}\times 8^{\frac{2}{5}}$；　　(2)$8^{\frac{2}{3}}$；　　(3)$\left(\frac{3}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6$.

2. 化简下列各式.

(1)$(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}})^3$；　　(2)$a\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}$；　　(3)$\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2$.

课后——巩固·提升

一、选择题

1. 若 $a>0$，则 $a^2\cdot a^{-2}=$　　（　　）

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. a^{-1}

2. 若 $a>0$，则下列运算法则不成立的是 （　　）

A. $a^m a^n=a^{m+n}$　　B. $(a^m)^n=a^{m+n}$

C. $(ab)^n=a^n b^n$　　D. $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

3. 若 $3^m=2$，$3^n=5$，则 $3^{m+n}=$ （　　）

A. 5　　B. 2　　C. 10　　D. 7

4. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}=$ （　　）

A. $2^{\frac{3}{4}}$　　B. $2^{\frac{7}{8}}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

5. 下列运算正确的是 （　　）

A. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}=1$　　B. $2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}=2$　　C. $(2^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}}=1$　　D. $(2^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}}=2$

二、填空题

1. $\left(-\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=$________________.

2. $[(-\sqrt{2})^{-4}]^{-\frac{1}{2}}=$________________.

3. 设 $a>0$，$b>0$，$(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}})^{12}=$________________.

4. $12^3\times 3^{-3}\times(2^{-3})=$________________.

5. $(10-6\times 2\,021^0)^{-2}=$________________.

三、解答题

1. 化简下列各题.

(1) $(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}})^6$；

(2) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2$；

(3) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$.

2. 计算下列各题.

(1)$\sqrt{3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[6]{27}$;

(2)$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-4\times(-2)^{-3}+\left(\frac{1}{4}\right)^{0}-9^{-\frac{1}{2}}$.

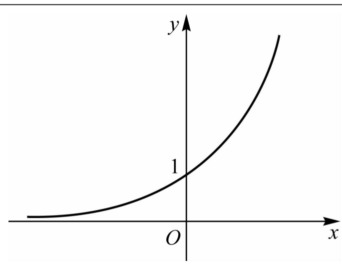
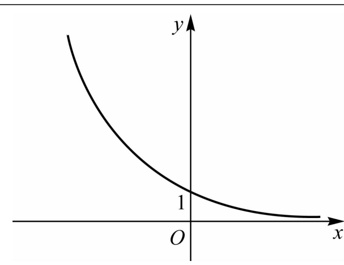
5.2　指数函数

学习目标

1. 通过阅读,能正确理解和判断指数函数.
2. 通过对指数函数图像的观察及讨论,总结出指数函数的性质.
3. 通过训练,进一步加深对指数函数的认识和应用.

课前——知识·梳理

指数函数的图像和性质如下表所示.

<table>
<tr><td>定义</td><td colspan="2">形如 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)的函数称为指数函数</td></tr>
<tr><td>特点</td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td>图像</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">性质</td><td colspan="2">定义域:$(-\infty,+\infty)$;值域:$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">图像过点$(0,1)$</td></tr>
<tr><td>在$(-\infty,+\infty)$上是增函数</td><td>在$(-\infty,+\infty)$上是减函数</td></tr>
<tr><td>当 $x<0$ 时,$0<y<1$;
当 $x>0$ 时,$y>1$</td><td>当 $x<0$ 时,$y>1$;
当 $x>0$ 时,$0<y<1$</td></tr>
</table>

课中——练习·探究

当堂检测

1. 判断下列函数是否为指数函数，是的画“√”，不是的画“×”.

(1) $y=x^2$ （　　）

(2) $y=x^{-2}$ （　　）

(3) $y=2^x$ （　　）

(4) $y=3\times 2^x$ （　　）

(5) $y=0.2^x$ （　　）

2. 判断下列指数函数在$(-\infty,+\infty)$内的单调性.

(1) $y=0.8^x$是（　　）函数.

(2) $y=2.5^x$是（　　）函数.

3. 比较大小.

$0.8^{2.1}$________ $0.8^{2.6}$　　$0.8^{-1.1}$________ $0.8^{-2.1}$

$2.5^{1.4}$________ $2.5^{1.3}$　　$2.5^{-1.4}$________ $2.5^{-1.3}$

归纳探究

小组讨论：为什么在指数函数定义中，规定 $a>0$ 且 $a\neq 1$？

课后——巩固·提升

一、选择题

1. 下列函数是指数函数的是 （　　）

A. $y=x$　　B. $y=x^2$　　C. $y=2^x$　　D. $y=(-2)^x$

2. 下列函数在$(-\infty,+\infty)$内是增函数的是 （　　）

A. $y=0.3^x$　　B. $y=2^x$　　C. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　D. $y=3^{-x}$

3. 下列函数在$(-\infty,+\infty)$内是减函数的是 （　　）

A. $y=3^x$　　B. $y=2^x$　　C. $y=10^x$　　D. $y=2^{-x}$

4. 函数 $y=3^x$的图像一定经过点 （　　）

A. $(0,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,1)$　　D. $(1,0)$

5. 函数 $y=0.2^x$ （　　）

A. 在 $\mathbf{R}$ 内是增函数　　B. 在$(0,+\infty)$内是增函数

C. 在 $\mathbf{R}$ 内是减函数　　D. 在$(0,+\infty)$内是减函数

6. 函数 $y=\left(\frac{4}{3}\right)^{x}$ 的　　　　（　　）

A. 定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$(-\infty,+\infty)$
B. 定义域是$(0,+\infty)$，值域是$(0,+\infty)$
C. 定义域是$(0,+\infty)$,值域是$(-\infty,+\infty)$
D. 定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$(0,+\infty)$

7. 若函数 $y=a^{x}$是减函数,则 a 的取值范围是　　　　（　　）

A. $a>0$　　B. $a<0$　　C. $0<a<1$　　D. $a>1$

8. 若函数 $y=a^{x}$是增函数,则 a 的取值范围是　　　　（　　）

A. $a>0$　　B. $a<0$　　C. $0<a<1$　　D. $a>1$

二、填空题

1. 比较大小:$0.7^{2.1}$________ $0.7^{2.2}$,$1.9^{-3.5}$________ $1.9^{-2.9}$.

2. 若$\left(\frac{3}{4}\right)^{3}>\left(\frac{3}{4}\right)^{x}$,则 x 的取值范围为________________.

3. 若 $3^{x-1}<1$,则 x 的取值范围为________________.

4. 若 $a^{2}<a^{3}$,则 a 的取值范围为________________.

5. $y=\left(\frac{4}{3}\right)^{x}$ 在$(-\infty,+\infty)$内是________（填“增”或“减”）函数.

6. 若指数函数 $y=a^{x}$的图像过点$(2,9)$,则 $a=$________.

7. 函数 $y=2^{x}$与 $y=2^{-x}$的图像关于________ 对称.

三、解答题

1. 已知指数函数 $f(x)=a^{x}$经过点$(3,8)$.

（1）求该函数的解析式;

（2）判断该函数的单调性;

（3）求 $f(-3)$的值.

2. 求下列函数的定义域.

（1）$y=\sqrt{2^{x}-8}$;　　　　（2）$y=\frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{2^{x}-1}}$.

5.3 对 数

5.3.1 对数的概念

学习目标

1. 通过阅读，理解并熟练地叙述对数的含义.
2. 通过小组讨论，总结并掌握对数式与指数式的相互转化.
3. 通过训练，进一步掌握对数的性质的应用.
4. 通过阅读，了解常用对数与自然对数的含义.
5. 通过阅读，能掌握常用对数与自然对数正确的表示格式与读法.
6. 通过训练，进一步掌握常用对数与自然对数的应用.

课前——知识·梳理

1. 对数：如果 $a^b=N(a>0$ 且 $a\neq1)$，那么把 b 叫作以 a 为底 N 的对数，记作 $b=\log_a N$. 其中，a 叫作对数的底，N 叫作真数.

2. 指数式与对数式的转换：

b: 指数⇔对数

N: 幂⇔真数

$a^b=N \Leftrightarrow \log_a N=b$

a: 底数

3. 对数的性质（$a>0$ 且 $a\neq1$）

（1）$\log_a 1=0$；

（2）$\log_a a=1$；

（3）$N>0$，即零和负数没有对数.

4. 常用对数：是指以 10 为底的对数，记作 $\log_{10} N$，简记为 $\lg N$.

5. 自然对数：是指以无理数 e 为底的对数，记作 $\log_e N$，简记为 $\ln N$.

6. 自然对数经常使用于科学研究和工程计算领域中.

课中——练习·探究

当堂检测

1. 用文字叙述下列等式.

$2^3=8$　读作________________；

$\log_2 8=3$　读作________________；

$10^3=1\ 000$　读作________________________；

$\lg 1\ 000=3$　读作________________________.

2. 把下列指数式写成对数式.

$27^{\frac{1}{3}}=3\Leftrightarrow$________________；$2^{-2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow$________________；

$10^2=100\Leftrightarrow$________________；$10^{-1}=\frac{1}{10}\Leftrightarrow$________________.

3. 把下列对数式写成指数式.

$\log_2 16=4\Leftrightarrow$________________；$\log_3\frac{1}{3}=-1\Leftrightarrow$________________；

$\lg 1\ 000=3\Leftrightarrow$________________；$\ln e^2=2\Leftrightarrow$________________.

4. 计算.

$\log_{0.2}0.2=$________；　$\log_{100}100=$________；　$\log_7 1=$________；

$\log_{\frac{1}{3}}1=$________；　$\lg 1=$________；　$\lg 10=$________；

$\ln 1=$________；　$\ln e=$________.

归纳探究

下列等式成立吗？请说出理由.

$\log_{(-7)}1=0$；　$\log_{(-2)}(-2)=1$；　$\lg(-1)=0$；　$\ln(-e)=-1$.

课后——巩固·提升

一、选择题

1. lg 7 是以(　　)为底的对数.　(　　)

A. 1　B. 7　C. 10　D. e

2. ln 2 是以(　　)为底的对数.　(　　)

A. 1　B. 2　C. 10　D. e

3. 下列表示方法不正确的是　(　　)

A. $\log_{10}5$　B. $\log 5$　C. $\lg 5$　D. $\ln 5$

4. 下列表示方法正确的是　(　　)

A. $\log_2(-5)$　B. $\log_{(-2)}8$　C. $\lg(-7)$　D. $\ln e^2$

5. 下列等式不正确的是　(　　)

A. $\log_2 2=1$　B. $\lg(-10)=-1$

C. $\lg 10=1$　D. $\ln 1=0$

6. 下列指数式与对数式的互化中，不正确的是 (　　)

A. $10^0=1$ 与 $\lg 1=0$ 　　B. $27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$ 与 $\log_{27}\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

C. $\log_3 9=2$ 与 $9^{\frac{1}{2}}=3$ 　　D. $\log_5 5=1$ 与 $5^1=5$

7. 在 $b=\log_{(a-2)}(5-a)$ 中，实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $a>5$ 或 $a<2$ 　　B. $2<a<5$

C. $2<a<3$ 或 $3<a<5$ 　　D. $3<a<4$

二、填空题

1. 计算下列各式：

$\log_2 1=$________；$\log_9 9=$________；$\log_{\frac{1}{3}}1=$________；$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=$________；

$\lg 10\ 000=$________；$\lg 0.001=$________；$\ln\frac{1}{e}=$________；$\ln e^3=$________.

2. $\log_7[\log_3(\log_2 x)]=0$，则 $x=$________.

三、解答题

1. 把下列指数式写成对数式.

(1) $e^{-2}=x$；　(2) $10^x=5$；　(3) $4^{-2}=\frac{1}{16}$；　(4) $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

2. 把下列对数式写成指数式.

(1) $\log_2\frac{1}{16}=-4$；　(2) $\log_5\frac{1}{5}=-1$；　(3) $\lg 100=2$；　(4) $\ln\frac{1}{e}=-1$.

3. 求下列等式中 x 的值.

(1) $\lg x=-1$；　　(2) $\ln x=2$.

5.3.2　积、商、幂的对数

学习目标

1. 通过阅读，理解并熟练叙述积、商、幂的对数的运算法则.
2. 通过讨论，总结其运算法则的使用范围.
3. 通过训练，能运用其运算法则解决有关问题.

课前——知识·梳理

1. 积、商、幂的对数的运算法则

如果 $a>0$ 且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$，那么

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

(2) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(3) $\log_a M^n=n\log_a M$.

2. 换底公式

如果 $a>0$ 且 $a\neq1$，$b>0$，那么 $\log_a b=\frac{\lg b}{\lg a}$.

课中——练习·探究

当堂检测

1. 用 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z$ 表示下列各式.

(1) $\lg x^2$　　(2) $\lg(x^2y^2z)$；　　(3) $\lg \frac{x^2}{yz}$.

2. 计算.

（1）$\log_2 16-\log_2 8$；　　（2）$\lg 2+\lg 5$；　　（3）$\log_2 8$.

归纳探究

当 $a>0$ 且 $a\neq 1, M>0, N>0$ 时，讨论下列等式是否正确并证明：

1. $\lg \sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\lg M$.

2. $\log_{a^n} M^m=\dfrac{m}{n}\log_a M$.

3. $a^{\log_a N}=N$.

课后——巩固·提升

一、选择题

1. 若 $M,N>0$，则下列等式成立的是　　（　　）

A. $\lg(M+N)=\lg M+\lg N$　　B. $\lg(M-N)=\lg M-\lg N$

C. $\lg(MN)=\lg M\cdot\lg N$　　D. $\lg(MN)=\lg M+\lg N$

2. 若 $M,N>0$，则下列等式不成立的是　　（　　）

A. $\lg\sqrt[3]{N}=\dfrac{1}{3}\lg N$　　B. $\log_a M^n=(\log_a M)^n$

C. $\log_a\dfrac{N}{M}=\log_a N-\log_a M$　　D. $\log_a M^n=n\log_a M$

3. $\log_2 16=$　　（　　）

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 32

4. $\log_3 27-\log_3 9=$　　（　　）

A. $\log_3 18$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. 2　　D. 1

5. 下列结论错误的是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. $\log_2 \dfrac{1}{8}=-3$　　　B. $\log_5 1=0$　　　C. $\log_7 7=1$　　　D. $\log_4 8=2$

6. 如果 $\lg x=\lg a+2\lg b-3\lg c$，则 x 等于　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. $a+2b-3c$　　　B. $a+b^2-c^3$　　　C. $\dfrac{ab^2}{c^3}$　　　D. $\dfrac{2ab}{3c}$

二、填空题

1. 计算.

$\log_{3.1}1=$________；　　$\ln e^{-2}=$________；　　$\lg 100=$________；

$\lg\sqrt[5]{100}=$________；　　$\log_3(27\times 81)=$________；$\log_{0.1}0.001=$________；

$\lg 20-\lg 2=$________；　$\log_3 5+\log_3\dfrac{1}{5}=$________；$\lg 4+2\lg 5=$________.

2. $\log_3(\log_2 8)=$________.

3. $\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 3=$________.

4. $2^{1+\frac{1}{2}\log_2 5}$的值等于________.

三、解答题

1. 用 $\lg x$，$\lg y$，$\lg z$ 表示下列各式.

(1) $\lg\sqrt{x}$；　　(2) $\lg\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$；　　(3) $\lg\dfrac{x^2\sqrt{y}}{z^3}$.

2. 求下列各式的值.

(1) $\log_2(4\times 2^5)$；　　　　(2) $\log_{30}1+\log_6 36-2\log_7 7$；

(3) $2\lg 3+\lg 7+\lg\dfrac{25}{7}-\lg\dfrac{9}{4}+\ln 1$.

3. 设 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，用 a,b 表示 $\log_5 12$.

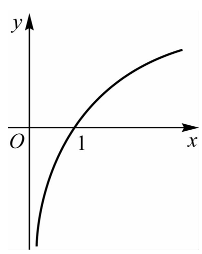
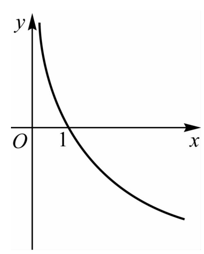
5.4 对数函数

学习目标

1. 通过阅读，能正确理解对数函数的定义和对数函数的判定.
2. 通过对对数函数图像的观察及讨论，总结出对数函数的性质.
3. 通过训练，进一步加深对对数函数的认识和应用.

课前——知识·梳理

对数函数的图像和性质如下表所示.

定义	形如 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的函数称为对数函数	
特点	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	定义域：$(0,+\infty)$；值域：$(-\infty,+\infty)$	
	图像过点 $(1,0)$	
	在 $(0,+\infty)$ 上是增函数	在 $(0,+\infty)$ 上是减函数
	当 $0<x<1$ 时，$y<0$； 当 $x>1$ 时，$y>0$	当 $0<x<1$ 时，$y>0$； 当 $x>1$ 时，$y<0$

课中——练习·探究

当堂检测

1. 判断下列函数是否是对数函数，是的画“√”，不是的画“×”.

(1) $y=\log_2 x^2$ （　　）

(2) $y=\log_{(-2)}x$　(　　)

(3) $y=\log_x 6$　(　　)

(4) $y=3\log_2 x$　(　　)

(5) $y=\log_{\sqrt{2}}x$　(　　)

2. 判断下列对数函数在$(0,+\infty)$内的单调性.

(1) $y=\log_2 x$ 是(　　)函数.

(2) $y=\log_{0.2}x$ 是(　　)函数.

3. 比较大小.

$\log_2 3.1$ ________ $\log_2 3.2$　　　$\log_{0.3}5$ ________ $\log_{0.3}6$

归纳探究

小组讨论:为什么在对数函数定义中,规定 $a>0$ 且 $a\neq 1$?

课后——巩固·提升

一、选择题

1. 下列函数是对数函数的是　(　　)

A. $y=\log_{(-5)}x$　B. $y=\log_1 x$　C. $y=\log_2 x$　D. $y=\log_x 2$

2. 下列函数在$(0,+\infty)$内是减函数的是　(　　)

A. $y=\log_3 x$　B. $y=\log_{0.2}x$　C. $y=\ln x$　D. $y=\lg x$

3. 下列函数在$(0,+\infty)$内是增函数的是　(　　)

A. $y=\log_3 x$　B. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　C. $y=x^{-2}$　D. $y=3^{-x}$

4. 函数 $y=\log_5 x$ 的图像一定经过点　(　　)

A. $(0,0)$　B. $(0,1)$　C. $(1,1)$　D. $(1,0)$

5. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$　(　　)

A. 在 $\mathbf{R}$ 内是增函数　B. 在$(0,+\infty)$内是增函数

C. 在 $\mathbf{R}$ 内是减函数　D. 在$(0,+\infty)$内是减函数

6. 函数 $y=\lg x$ 的　(　　)

A. 定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$(-\infty,+\infty)$

B. 定义域是$(0,+\infty)$,值域是$(0,+\infty)$

C. 定义域是$(0,+\infty)$,值域是$(-\infty,+\infty)$

D. 定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$(0,+\infty)$

7. 若函数 $y=\log_a x$ 在$(0,+\infty)$内是减函数,则 a 的取值范围是　(　　)

A. $a>0$　B. $a<0$　C. $0<a<1$　D. $a>1$

8. 对数函数的图像一定过 ( )

A. 第一、二象限　B. 第一、三象限　C. 第一、四象限　D. 第二、三象限

二、填空题

1. 比较大小：$\log_2 5$ ________ $\log_2 6$，$\log_{0.2} 5$ ________ $\log_{0.2} 6$.

2. 若 $\log_7 x>\log_7 6$，则 x 的取值范围为________________.

3. 若 $\log_a 2<\log_a 3$，则 a 的取值范围为________________.

4. 若对数函数 $y=\log_a x$ 的图像过点(9，2)，则 $a=$________________.

5. 用“$<$”把 $\log_2 3$，$\log_2 1$ 和 $\log_{0.2} 2$ 连接起来为________________.

三、解答题

1. 已知对数函数 $f(x)=\log_a x$ 经过点(8，3).

(1) 求该函数的解析式；

(2) 判断该函数的单调性；

(3) 求 $f(16)$的值.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\log_2(3x-6)$；　(2) $y=\dfrac{1}{\lg x-1}$.

5.5　指数函数与对数函数的应用

学习目标

1. 通过例题解析，了解指数函数模型与对数函数模型.
2. 通过训练，进一步了解指数函数与对数函数的应用.

课前——知识·梳理

例题解析 1：某城市现有人口总数 100 万人，如果年自然增长率为 1.2%，试解答下面的问题：

(1)设 x 年后该城市的人口总数为 y 万人，写出 y 与 x 的函数关系式；

(2)计算 10 年以后该城市人口总数(精确到 0.1 万人).

解：(1)1 年后，即当 $x=1$ 时，$y=100\times(1+1.2\%)=100\times1.012$，

2 年后，即当 $x=2$ 时，$y=100\times1.012\times(1+1.2\%)=100\times1.012^2$，

3 年后，即当 $x=3$ 时，$y=100\times1.012^2\times(1+1.2\%)=100\times1.012^3$，

…………

由此得到，x 年后该城市的人口总数为 $y=100\times1.012^x(x\in\mathbf{N}^*)$.

(2)当 $x=10$ 时，$y=100\times1.012^{10}\approx112.7$. 故 10 年后该城市的人口总数约为 112.7 万人

例题解析 2：有一种放射性物质镭，经过 100 年后残留量是原来的 95.76%，试计算它的半衰期(保留四位有效数字).

解：设镭的衰减率为 k，经过 x 年后残留量为 y.

由题意得 $y=(1-k)^x$，$0.957\ 6=(1-k)^{100}$，

解得 $k\approx0.000\ 433\ 2$，

因此 $y=0.999\ 566\ 8^x$，

于是 $0.5=0.999\ 566\ 8^x$，

得：$x=\log_{0.999\ 566\ 8}0.5\approx1\ 600$.

答：镭的半衰期大约是 1 600 年.

课中——练习·探究

当堂检测

1. 某细胞每 30 分钟裂变一次，分裂成两个细胞，那么 3 个小时后，这个细胞颗分裂到多少个.

2. 为了提高教师的待遇，国家计划每年将教师工资提高 5%，若张老师现在年收入 10 万元，问大约经过多少年，张老师的工资可翻一番？

归纳探究

讨论总结解决对数函数问题的步骤.

课后——巩固·提升

解答题

1. 未响应国家号召，我国西北地区将对 3 万公顷荒地进行绿化，从 2018 年起每年将荒地的百分之二十种植树木，经过 4 年后还有多少荒地需要绿化？

2. 某工厂购买了一套价值 100 万元的设备，若年折旧率为 10%，问经过多少年后，设备的价值仅为原来的一半？

3. 一件价值为 200 万元的清代文物，每年升值 10%，问多少年后该文物价值约 400 万元？

课外——拓展·阅读

指数爆炸——折叠最多对折次数

一张纸对折一次，厚度变成原来的 2 倍. 再对折第二次，变为原来的 2 的 2 次方倍即 4 倍. 以此类推，假设纸的厚度为 0.1 mm，则对折 24 次以后，长度超过 1 千米；对折 39 次达 55 000 千米，超过地球赤道长度；对折 42 次达 44 万千米，超过地球至月球的距离；对折 51 次达 22 亿千米，超过地球至太阳的距离；对折 82 次为 51 113 光年，超过银河系半径的长度. 不过，这只是一个不符合实际的数学理论推理数字. 那么在现实生活中，一张纸究竟能折多少次呢？如果纸为正方形，边长为 a，厚度为 h，当折叠一次的时候，折叠边长不变，厚度为 2 倍的 h，折叠两次的时候，折叠边长为原边长的二分之一，厚度变为 4 倍的 h，就这样折叠下去，可以推出一个公式：当折叠次数 n 为偶数次时，折叠边长为 $\frac{a}{2^{0.5n}}$，厚度变为 $2^n h$，当满足 $n>\frac{2}{3}\left(\log_2\frac{a}{h}-1\right)$ 时无法折叠. 根据一般的纸张的状况，厚度大约为 0.1 mm，边长为 1 m 时，根据以上公式，可以得出 $n>8.191\ 8$ 时无法折叠，这意味着对于厚度大约为 0.1 mm，边长为 1 m 的正方形纸，只能折叠 8 次. 但 8 次人类是很难办到的，只能依靠机器. 所以，一张纸最多能对折多少次实际是一个变数，它取决于纸张的实际厚度与大小. 在现实生活中，一张普通的 A4 纸，一般人可以折到 6 次，厉害的人可以折到 7 次.