

第一篇

力学

自然界是物质世界,即它是由不停运动着的物质所组成的.在物质的各种运动形式中,最简单、最基本的是一个物体相对于另一个物体或者一个物体的某些部分相对于其他部分的位置的变化.这种位置的变化称为机械运动,而力学就是研究机械运动的规律及其应用的学科.

大学物理中的力学包括运动学和动力学两部分内容.运动学研究物体的位置随时间变化的规律;动力学研究物体之间的相互作用对物体运动的影响,即研究物体运动状态变化的原因.

力学是物理学的基础,力学中的基本概念和某些规律在物理学的各领域中起着重要的作用.力学的应用范围很广泛,几乎涉及工程技术的所有领域.机械、建筑、水利、自动化等工程技术都常用到力学的基本知识.因此,力学是工程技术的基础理论之一.

本篇着重介绍有关质点运动的基本概念和规律,其中,牛顿运动定律和守恒定律是本篇的主要内容.

本章在质点运动方程的基础上介绍位移、速度、加速度等基本概念,并研究质点做直线运动、抛体运动、圆周运动等的基本规律.

第一节 参考系 质点

一、参考系与坐标系

1. 经典力学中的时间和空间

力学的研究对象是物体的机械运动.所谓机械运动是指物体的空间位置随时间的变化.在经典力学的范围内,空间和时间不依赖于物体的存在和运动的时空背景,称为**绝对的时空观**,但空间和时间需要借助于物体的存在和运动来度量.

空间可以通过物体的存在反映出它所具有的广延性,它是沿四面八方无限均匀延伸的范围,并认为空间中的直线永远是直的,称为欧几里得空间.空间范围的度量中最基本的是长度的计量,其国际单位为米(m).在 1983 年 10 月召开的第 17 届国际计量大会上,米的定义为:米是 $1/299\,792\,458$ 秒的时间间隔内光在真空中行程的长度.

时间可以通过物体的运动反映出它所具有的持续性和顺序性,它是从古到今、从先到后单方向均匀连续变化的,从不逆向.时间间隔的量度需要借助于周期性运动来计量,其国际单位为秒(s).1967 年召开的第 13 届国际度量衡大会对秒的定义为:铯-133 原子基态的两个超精细能级间跃迁对应辐射的 $9\,192\,631\,770$ 个周期的持续时间.

经典力学的绝对时空观与人们的感觉经验相协调,容易使人接受.但是它毕竟只是时空性质的一种假设.近代物理学表明空间和时间与物体的存在和运动是紧密联系的,绝对时空观只是实际时空性质的一种近似.

2. 参考系

物体的运动是绝对的,但是描述物体的运动却是相对的,即在具有不同运动状态的参考对象看来,同一个物体的运动状态是不同的.从站在路边的人的角度去看和从骑自行车的人的角度去看,一辆在公路上行驶的汽车的运动状态是不同的.但我们认为,在具有相同运动状态(相对静止)的参考对象看来,一个物体的运动状态是相同的.为了描述物体的运动,我们选择与一个确定的参考对象相对静止的所有物体作为一个系统,称为**参考系**.在一个确定的参考系中,物体的运动状态是可以确定的.

3. 坐标系

在选定参考系后,为了定量描述物体的运动,我们取参考系中的任意一点作为坐标原点建立坐标系.常用的坐标系有直角坐标系、极坐标系、柱坐标系、球坐标系等,另外,还有描述曲线运动的自然坐标系.

二、质点

在研究力学问题时,人们常常需要对研究对象进行模型化,最基本的力学模型是质点.所谓质点,是指忽略对象的大小和形状,并将全部质量集中在一个几何点上的模型.把物体当作质点来处理是有条件的、相对的,而不是无条件的、绝对的.例如,研究地球绕太阳公转时,由于地球至太阳的平均距离约为地球半径的 10^4 倍,则地球上各点相对于太阳的运动可以看作是相同的.因而,在研究地球绕太阳公转时,可以把地球当作质点.

研究对象可看作质点的条件如下:

(1)研究对象的尺度在所研究问题中相对很小,可忽略其大小和形状,看作质点.例如,研究地球绕太阳公转时,由于地球的尺度与公转轨道的尺度相比很小,可忽略其大小和形状,看作质点.

(2)研究对象发生平动,即对象上各点的运动状态完全相同时,可看作质点.

应当指出,把物体视为质点这种抽象的研究方法,在理论和实践上都有重要意义.当所研究的运动物体不能视为质点时,可以把整个物体看成是由许多质点所组成,弄清楚这些质点的运动,就可以弄清楚整个物体的运动.所以,研究质点的运动是研究物体运动的基础.

第二节 运动方程 速度 加速度

一、质点的位置矢量和运动方程

为了定量描述质点的运动,在选定的参考系上建立坐标系,则质点的位置就可以用从坐标原点 O 到质点所在位置 P 的矢量 r 来描述,称为位置矢量,简称位矢,如图 1-1 所示.在直角坐标系中,令 x 、 y 、 z 方向的单位矢量分别为 i 、 j 、 k ,则位置矢量的直角坐标系表达式为

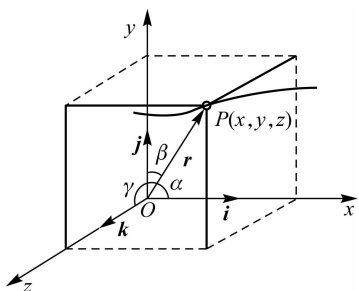


图 1-1 直角坐标系中的位矢

式

$$r = xi i + y j + z k \quad (1-1)$$

其中,位矢的大小为

$$r = |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1-2)$$

方向为

$$\cos \alpha = \frac{x}{|r|}, \cos \beta = \frac{y}{|r|}, \cos \gamma = \frac{z}{|r|}$$

当质点运动时,位置不断变化,位矢是时间的函数,即

$$r = r(t) \quad (1-3)$$

该函数描述了质点位置随时间变化的过程,称为运动方程.在不同的坐标系中,运动方程有不同的形式.在直角坐标系中,运动方程的矢量形式为

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (1-4)$$

其分量形式为

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

将运动方程分量形式中的 t 消去, 可得到质点运动的**轨迹方程**.

【例 1-1】 已知质点在直角坐标系中做平面运动, 其运动方程为

$$\mathbf{r}(t) = (t+2)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{4}t^2 + 2\right)\mathbf{j} \text{ (SI 单位)}$$

求质点的轨迹方程.

解: 由运动方程可知

$$\begin{aligned} x &= t+2 \\ y &= \frac{1}{4}t^2 + 2 \end{aligned}$$

消去 t 得质点的轨迹方程为

$$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 3 = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 + 2$$

显然, 质点运动的轨迹是一条抛物线.

二、质点的位移和路程

如图 1-2 所示, 在质点的运动过程中, 质点某一时刻 t 位于 A 点, 经过 Δt 时间间隔后位于 B 点, 相应的位置矢量由 \mathbf{r}_A 变为 \mathbf{r}_B . 人们定义在 Δt 时间间隔内位置矢量的增量为**位移矢量**(简称位移), 即

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad (1-6)$$

它表示在 Δt 时间间隔内质点位矢的变化. 在直角坐标系中可写为

$$\Delta \mathbf{r} = (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j} + z_B\mathbf{k}) - (x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k}) = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k} \quad (1-7)$$

其中, 位移大小为

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

位移方向由 A 指向 B .

需要注意位移大小 $|\Delta \mathbf{r}|$ 与 Δr 的区别. Δr 表示初末时刻位矢大小的变化量, 即

$$\Delta r = |\mathbf{r}_B| - |\mathbf{r}_A| = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} - \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$$

一般 $\Delta r \neq |\Delta \mathbf{r}|$ (见图 1-2).

在质点的运动过程中, 运动轨迹的长度称为质点在这一运动过程所经过的**路程**, 记作 Δs , 路程是标量.

位移与路程是两个不同的物理量. 位移为矢量, 而路程为标量, 并且位移的大小一般不等于路程, 即 $|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta s$. 只有当质点做单向直线运动时, 两者才相等; 或者在运动时间间隔 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 位移大小和路程相等, 即 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\Delta \mathbf{r}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s$, 或者 $|\mathrm{d}\mathbf{r}| = \mathrm{d}s$.

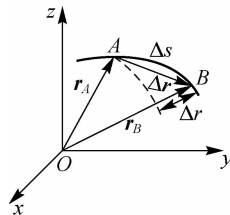


图 1-2 位移与路程

三、质点的速度和速率

为了定量描述质点运动的快慢,引入速度和速率这两个物理量.

1. 平均速度和瞬时速度

若质点在 Δt 时间内发生的位移为 $\Delta \mathbf{r}$,则定义 Δt 时间内质点的平均速度为

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (1-8)$$

平均速度是矢量,其方向为位移矢量 $\Delta \mathbf{r}$ 的方向. 平均速度只是某一个时间段内的平均效果,不能精细地描述质点每时刻的运动快慢. 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,平均速度的极限称为质点在 t 时刻的瞬时速度(简称速度),即

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1-9)$$

可见,速度是位矢对时间的一阶导数,式(1-9)在任意坐标系中均成立.

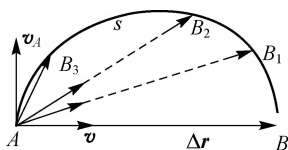


图 1-3 平均速度和瞬时速度

为什么可以这样定义质点在 t 时刻的瞬时速度? 如图 1-3 所示,当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,弧长 \widehat{AB} 趋近于弦长 \overline{AB} , 曲线 s 趋近于直线 AB , 其长度为 $|\Delta \mathbf{r}|$, 平均速度 $\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ 趋近于瞬时速度 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. 也就是说,当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, B 点 $\rightarrow B_1$ 点 $\rightarrow B_2$ 点 $\rightarrow B_3$ 点 \rightarrow 无限接近 A 点, AB 趋近于 A 点的切线. 速度方向沿运动轨迹的切线方向.

以下考虑直角坐标系的情况,速度可表示为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \quad (1-10)$$

其大小为

$$v = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1-11)$$

在国际单位制中,速度的单位为米/(m/s).

【例 1-2】 质点沿 x 轴运动,运动函数 $x = 3t^3$, 求时间在 $1 \sim 1.1$ s、 $1 \sim 1.01$ s、 $1 \sim 1.001$ s 内的平均速度和 $t = 1$ s 时的瞬时速度.

解: 由于是一维运动,可以将矢量运算简化为标量计算,于是,由平均速度的定义,有

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3t_2^3 - 3t_1^3}{t_2 - t_1} = 3(t_2^2 + t_2t_1 + t_1^2)$$

将 $t_1 = 1$ s 和 $t_2 = 1.1$ s、 1.01 s 及 1.001 s 分别代入上式,得

$$\bar{v}_1 = 3 \times (1.1^2 + 1.1 \times 1 + 1^2) = 9.9 \text{ m/s}$$

$$\bar{v}_2 = 3 \times (1.01^2 + 1.01 \times 1 + 1^2) = 9.09 \text{ m/s}$$

$$\bar{v}_3 = 3 \times (1.001^2 + 1.001 \times 1 + 1^2) = 9.009 \text{ m/s}$$

按瞬时速度的定义,有

$$v = v_x = \frac{dx}{dt} = 9t^2$$

将 $t = 1$ s 代入上式,得

$$v = 9 \times 1^2 = 9 \text{ m/s}$$

2. 平均速率和瞬时速率

若质点在 Δt 时间内发生的路程为 Δs , 则定义 Δt 时间内质点的平均速率为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1-12)$$

平均速率是标量. 由于一般情况下 $|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta s$, 因此平均速度的大小一般不等于平均速率, 即 $|\bar{\mathbf{v}}| \neq \bar{v}$.

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 平均速率的极限称为质点在 t 时刻的瞬时速率(简称速率), 即

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (1-13)$$

由于 $|d\mathbf{r}| = ds$, 因此瞬时速度的大小即为瞬时速率, 即

$$|\mathbf{v}| = \frac{|d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt} = v$$

四、质点的加速度

一般情况下, 质点沿某一轨迹运动时, 其速度随时间变化. 如图 1-4 所示, 在质点的运动过程中, 某一时刻 t 时质点位于 A 点, 速度为 \mathbf{v}_A ; 经过 Δt 时间后位于 B 点, 速度为 \mathbf{v}_B . 在 Δt 时间内, 速度的增量为 $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$, 定义 Δt 时间内质点的平均加速度为

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (1-14)$$

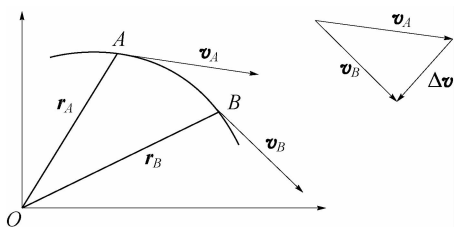


图 1-4 速度及其变化量

平均加速度是矢量, 其方向与 $\Delta \mathbf{v}$ 的方向相同.

平均加速度仅粗略地描述了质点速度在 Δt 时间内的变化情况. 要精确地描述质点速度变化的快慢, 令 $\Delta t \rightarrow 0$, 定义 t 时刻的瞬时加速度(简称加速度)为

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad (1-15)$$

可见, 加速度是速度对时间的一阶导数, 或位矢对时间的二阶导数. 同样地, 式(1-15)适用于任意坐标系.

在直角坐标系中, 加速度可表示为

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} = \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{k} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (1-16)$$

加速度是矢量, 其大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

方向沿 $\Delta \mathbf{v}$ 的极限方向.

在国际单位制中, 加速度的单位为米/秒² (m/s²).

第一篇 力学

从上述位矢 \mathbf{r} 、位移 $\Delta\mathbf{r}$ 、速度 \mathbf{v} 和加速度 \mathbf{a} 四个物理量的直角坐标分量描述中可知, 它们都满足运动独立性原理. 因此, 质点的空间运动都可看成沿 x 、 y 、 z 三个方向各自独立的直线运动的叠加.

五、直角坐标系中运动学的两类问题

在质点运动学中, 质点的运动状态常用位矢 \mathbf{r} 和速度 \mathbf{v} 来描述, 质点运动状态的变化常用加速度 \mathbf{a} 来描述. 在质点运动学中, 一般归纳为下述两类运动学问题. 现在, 以直角坐标系为例, 讨论两种类型的运动学问题.

1. 第一类问题

已知运动方程, 求质点的速度和加速度方程, 即已知 $\mathbf{r}(t)$, 求 $\mathbf{v}(t)$ 和 $\mathbf{a}(t)$. 此类问题只需要按公式

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ 和 } \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

直接将位矢函数 $\mathbf{r}(t)$ 对时间 t 求导, 即可求解.

【例 1-3】 已知质点的运动方程为

$$\mathbf{r} = a\cos \omega t \mathbf{i} + b\sin \omega t \mathbf{j} \quad (a, b, \omega \text{ 均为正值常数})$$

① 试证质点运动的轨迹为一椭圆, 其长轴和短轴分别为 $2a$ 和 $2b$;

② 计算质点在任意一点的速度和加速度, 并证明质点的加速度恒指向椭圆中心.

解: ① 已知

$$\mathbf{r} = a\cos \omega t \mathbf{i} + b\sin \omega t \mathbf{j}$$

则有

$$x = a\cos \omega t, y = b\sin \omega t$$

消去 t 后得

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

即运动轨迹为一椭圆, 其长轴和短轴分别为 $2a$ 和 $2b$.

② $v_x = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t, v_y = \frac{dy}{dt} = b\omega \cos \omega t$, 则有

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}$$

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{b}{a} \cot \omega t$$

或

$$\mathbf{v} = -a\omega \sin \omega t \mathbf{i} + b\omega \cos \omega t \mathbf{j}$$

其加速度为

$$a_x = -a\omega^2 \cos \omega t, a_y = -b\omega^2 \sin \omega t$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 \sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t}$$

$$\tan \varphi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{b}{a} \tan \omega t$$

或

$$\mathbf{a} = -a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - b\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j} = -\omega^2 (a\cos \omega t \mathbf{i} + b\sin \omega t \mathbf{j}) = -\omega^2 \mathbf{r}$$

可见 a 的方向与 r 的方向相反, 即恒指向椭圆中心.

由

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{\omega^2(a^2 - b^2) \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}}$$

分析可知, 只有当 $\omega t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ 时, 才有 $a_t = 0$, 即质点运动到这些点时, 其速度矢量和加速度矢量才相互垂直, 其余各点均不相互垂直.

【例 1-4】 一质点在外力的作用下从静止在原点到开始运动, 其加速度为 $a = 2x + 1$ (SI), 求质点运动到 10 m 时所具有的速度.

解: 已知加速度是位置的函数或速度的函数, 求位置和速度的函数关系, 即已知 $a(x)$ 或 $a(v)$, 求 $v(x)$. 此类问题可采用如下方法求解.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \frac{dx}{dx} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}$$

然后将含有 v 和 x 的部分分离变量, 积分求解. 本题中

$$a = v \frac{dv}{dx} = 2x + 1$$

分离变量积分, 得

$$\int_0^v v dv = \int_0^x (2x + 1) dx$$

则

$$v = \sqrt{2x^2 + 2x}$$

当 $x = 10$ m 时, 速度为 $v = \sqrt{2x^2 + 2x} = \sqrt{220}$ m/s ≈ 14.8 m/s.

2. 第二类问题

已知速度函数或加速度函数及初始条件 ($t = 0$ 时的初位矢 r_0 、初速度 v_0), 求质点的运动方程, 即已知 $v(t)$ 或 $a(t)$ 和 r_0, v_0 , 求 $r(t)$. 此类问题需要用积分法结合初始条件进行求解.

【例 1-5】 质点以加速度 a (a 为常量) 沿 x 轴运动, 开始时, 速度为 v_0 , 处于 x_0 的位置, 求质点在任意时刻的速度和位置.

解: 因为是沿 x 轴的一维运动, 所以各个运动量都可作为标量来处理, 即 $a = \frac{dv}{dt}$, 得

$$dv = a dt$$

两边积分, 有

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt = at$$

任意时刻的速度为

$$v = v_0 + at$$

同理, 由 $v = \frac{dx}{dt}$, 得 $dx = v dt$, 两边积分, 有

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt$$

任意时刻的位置为

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

第一篇 力学

这就是质点的运动方程. 当 $a > 0$ 时, 称为匀加速直线运动; 当 $a < 0$ 时, 称为匀减速直线运动. 在 v 和 t 的表达式中消去 t , 还可以得到速度与位置间的函数关系. 这一关系也可从下述推导中得到.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

即

$$v dv = a dx$$

两边积分有

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x a dx$$

得

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

这些结论都是人们熟知的匀变速直线运动公式.

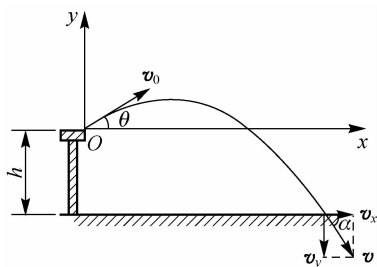


图 1-5 例 1-6 图

【例 1-6】 一人在阳台上以投射角 $\theta = 30^\circ$ 和速度 $v_0 = 20 \text{ m/s}$ 向台前地面投出一小球, 球离手时距离地面的高度为 $h = 10 \text{ m}$. 试求: 球投出后何时着地? 在何处着地? 着地时速度的大小和方向如何?

解: 这是二维问题. 以投出点为原点, 建立直角坐标系, 如图 1-5 所示, 则加速度为

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$$

初始条件是速度 $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos \theta \mathbf{i} + v_0 \sin \theta \mathbf{j}$, 位矢 $\mathbf{r}_0 = 0$, 由

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -g\mathbf{j}$$

结合初始条件积分得

$$\int_{v_0}^v d\mathbf{v} = - \int_0^t g\mathbf{j} dt$$

速度方程为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - gt\mathbf{j} = v_0 \cos \theta \mathbf{i} + (v_0 \sin \theta - gt)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_0 \cos \theta \mathbf{i} + (v_0 \sin \theta - gt)\mathbf{j}$$

结合初始条件积分得

$$\int_{r_0}^r d\mathbf{r} = \int_0^t [v_0 \cos \theta \mathbf{i} + (v_0 \sin \theta - gt)\mathbf{j}] dt$$

运动方程为

$$\mathbf{r} = v_0 t \cos \theta \mathbf{i} + \left(v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 \right) \mathbf{j}$$

当小球落地时, 位矢的 y 轴分量为 $-h$, 即

$$y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 = -h$$

取 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, 得

$$20 \times \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \times 9.8t^2 = -10$$

解得 $t = 2.78 \text{ s}$ ($t = -0.74 \text{ s}$ 舍去), 即球出手后 2.78 s 着地.

着地点与投射点的水平距离为

$$x = v_0 \cos \theta t = 20 \cos 30^\circ \times 2.78 = 48.1 \text{ m}$$

着地时小球的速度分量为

$$v_x = v_0 \cos \theta = 20 \cos 30^\circ = 17.3 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt = 20 \sin 30^\circ - 9.8 \times 2.78 = -17.2 \text{ m/s}$$

着地时速度的大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{17.3^2 + 17.2^2} = 24.4 \text{ m/s}$$

速度与 x 轴夹角为

$$\alpha = \arctan \frac{v_y}{v_x} = -44.8^\circ$$

需要注意, 以上两类问题都是在直角坐标系情况下的计算, 若在其他坐标系中研究运动学问题, 情况会有所不同.

第三节 圆周运动

一、自然坐标系 切向加速度和法向加速度

圆周运动是一类特殊的平面曲线运动. 质点做圆周运动时, 由于其轨道的曲率半径处处相等, 而速度方向始终在圆周的切线上. 因此, 对圆周运动的描述, 可采用以平面自然坐标系为基础的线量来描述.

自然坐标系是以质点的运动轨道为坐标轴的一维坐标系. 如图 1-6 所示, 在轨道曲线上, 任取一点 O 作为自然坐标原点, 沿轨道选取正方向, 以 O 点到质点的曲线长度 s 为自然坐标来确定质点的位置. 自然坐标系中的运动方程可写为

$$s = s(t)$$

在质点的轨道曲线(自然坐标系)上的任意一点 P , 存在着两个单位矢量 e_τ 和 e_n . 其中, e_τ 是切向单位矢量, 它沿着轨道在 P 点的切线并指向自然坐标系的正方向; e_n 是法向单位矢量, 它沿着轨道在 P 点的法线并指向轨道的凹侧, 这是一个动坐标系.

与直角坐标系的三个单位矢量 i, j, k 不同, e_τ 和 e_n 并非常矢量, 它们会随着自然坐标位置的变化而变化, 因此它们是时间的函数.

若质点在 t 时刻处于 P 点, 经过 Δt 时间后到达 Q 点, Δt 时间内质点的位置变化可由质点经过的路程来描述, 即

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) \quad (1-17)$$

需要注意, 在自然坐标系中路程是有正负的. 若 P 点到 Q 点沿正方向, 则 $\Delta s > 0$; 若 P 点到 Q 点沿负方向, 则 $\Delta s < 0$. 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 路程 Δs 可以写为 ds .

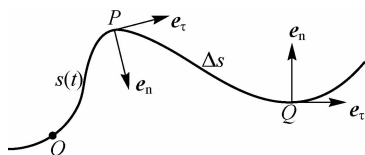


图 1-6 自然坐标系

第一篇 力学

由速度的定义 $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 知, 其大小为 $|\boldsymbol{v}| = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}$, 方向沿轨道的切线方向. 若质点沿轨道向正方向, 即沿 \boldsymbol{e}_τ 方向运动, 此时 $ds > 0$, 则在自然坐标系中, 质点的速度可表示为

$$\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}| \boldsymbol{e}_\tau = v \boldsymbol{e}_\tau = \frac{ds}{dt} \boldsymbol{e}_\tau$$

需要指出, 在自然坐标系中速率 v 是有正负的. 若速度沿正方向, 则 $v > 0$; 若速度沿负方向, 则 $v < 0$.

下面, 进一步深入讨论质点做圆周运动过程中的加速度 \boldsymbol{a} .

由加速度的定义有

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \boldsymbol{e}_\tau) = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{e}_\tau + v \frac{d\boldsymbol{e}_\tau}{dt} \quad (1-18)$$

设质点做圆周运动, 如图 1-7 所示. 由于切向单位矢量 \boldsymbol{e}_τ 是时间 t 的函数 $\boldsymbol{e}_\tau(t)$, 则 $\frac{d\boldsymbol{e}_\tau}{dt} \neq 0$.

下面讨论 $\frac{d\boldsymbol{e}_\tau}{dt}$ 在自然坐标系中的形式.

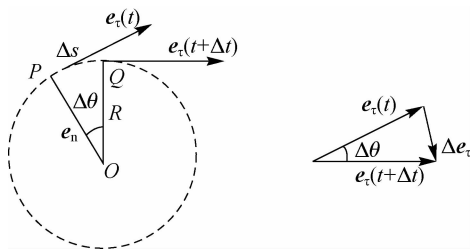


图 1-7 切向加速度和法向加速度

设 t 时刻质点位于 P 点, 切向单位矢量为 $\boldsymbol{e}_\tau(t)$; 经过 Δt 时间后, 质点运动到 Q 点, 切向单位矢量为 $\boldsymbol{e}_\tau(t + \Delta t)$. 此过程中切向单位矢量的变化量为

$$\Delta \boldsymbol{e}_\tau = \boldsymbol{e}_\tau(t + \Delta t) - \boldsymbol{e}_\tau(t)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 该过程中质点运动的路程 Δs 是半径为 R 的一段圆弧, Δs 对应的圆心角为 $\Delta\theta$, 即 $\Delta s = R\Delta\theta$ (见图 1-7), 此时切向单位矢量的变化量 $\Delta \boldsymbol{e}_\tau$ 的方向趋于垂直 \boldsymbol{e}_τ 方向, 即 \boldsymbol{e}_n 方向; 大小 $|\Delta \boldsymbol{e}_\tau| = \Delta\theta |\boldsymbol{e}_\tau| = \Delta\theta$, 即 $\Delta \boldsymbol{e}_\tau = |\Delta \boldsymbol{e}_\tau| \boldsymbol{e}_n = \Delta\theta \boldsymbol{e}_n$. 因此, 有

$$\frac{d\boldsymbol{e}_\tau}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{e}_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \boldsymbol{e}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{R\Delta t} \boldsymbol{e}_n = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} \boldsymbol{e}_n = \frac{v}{R} \boldsymbol{e}_n \quad (1-19)$$

将式(1-19)代入式(1-18), 可得

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{e}_\tau + \frac{v^2}{R} \boldsymbol{e}_n \quad (1-20)$$

由式(1-20)可以看出, 在自然坐标系中, 加速度可以沿切线方向和法线方向分解, 分别称为切向加速度 \boldsymbol{a}_τ 和法向加速度 \boldsymbol{a}_n , 即

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{e}_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} \boldsymbol{e}_\tau \\ \boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{R} \boldsymbol{e}_n \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \\ a_n = \frac{v^2}{R} \end{cases}$$

由切向加速度和法向加速度的定义可以看出, 切向加速度是改变质点运动速率的原因,

法向加速度是改变质点运动方向的原因。

总加速度大小为

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

一般情况下,质点做圆周运动的加速度的方向既不沿切向加速度 e_{τ} ,也不沿法向加速度 e_n ,而是与切线方向的夹角为 $\alpha = \arctan \frac{a_n}{a_{\tau}}$. 对于一般平面曲线运动,法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{R}$ 中的 R 可用曲率半径 ρ 来替代。

二、圆周运动的角量描述

用自然坐标系表述圆周运动中质点的位置、路程的量纲是长度时,人们将这种表述方法称为**线量表述**. 同一种运动还可采用不同的表述方法,既可以用自然坐标系,也可以用其他坐标系来描述圆周运动. 下面讨论圆周运动的平面极坐标系描述。

以圆心 O 为极点,任意射线为极轴 Ox 建立平面极坐标系. 质点的坐标可以由极径 r 和极角 θ 确定. 由于圆周运动中的极径 r 保持不变,因此质点的运动可以由极角 θ 完全表述. 这种表述方法称为**角量表述**,如图 1-8 所示。

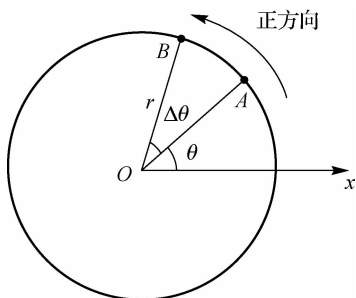


图 1-8 圆周运动的角量描述

1. 角位置和角位移

在平面极坐标系中,圆周运动中质点的位置可以由极角 θ 唯一确定,我们称极角 θ 为**角位置**。

一般规定逆时针方向为正方向,则从极轴初始位置开始,逆时针方向的角位置都是正的,顺时针方向的角位置都是负的. 角位置的单位是弧度(rad)。

在圆周运动中,角量描述的运动方程可以写为

$$\theta = \theta(t) \quad (1-21)$$

在圆周运动中,某一时刻 t 质点位于 A 点,经过 Δt 时间后位于 B 点,相应的角位置由 θ_A 变为 θ_B ,为描述角位置的变化,定义**角位移** $\Delta\theta$ 为

$$\Delta\theta = \theta_B - \theta_A \quad (1-22)$$

它表示在 Δt 时间内质点角位置的变化. 当从 t 时刻的 A 点到 $t + \Delta t$ 时刻的 B 点实际运动路径为逆时针时,角位移为正;当从 t 时刻的 A 点到 $t + \Delta t$ 时刻的 B 点实际运动路径为顺时针时,角位移为负. 角位移的单位是弧度(rad)。

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,称为无限小角位移,记为 $d\theta$ 。

2. 角速度

为了定量描述圆周运动中质点转动的快慢,引入**角速度** ω ,定义逆时针的右手螺旋方向为正方向,则

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (1-23)$$

在国际单位制中,角速度的单位为弧度/秒(rad/s)。

角速度实际是矢量,有大小和方向. 质点做平面圆周运动时,其角速度的方向遵循右手

第一篇 力学

螺旋法则,可知其方向为垂直运动平面,且沿大拇指竖直轴正方向,如图 1-9 所示.但是在圆周运动中,角速度矢量的方向只有两个方向,即沿着轴向上或向下.为了简便,在以后讨论质点做平面圆周运动时,角速度矢量可视为**标量**来处理,其方向用正负号来表示.

3. 角加速度

同样地,可以定义**角加速度** β 来描述角速度的变化快慢.定义逆时针的右手螺旋方向为正方向,则

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1-24)$$

与角速度一样,角加速度也有正负.

在国际单位制中,角加速度的单位为弧度/秒²(rad/s²).

4. 角量描述与线量描述的关系

在描述半径为 R 的圆周运动时,建立平面极坐标系和自然坐标系,如图 1-10 所示.以圆心为极点,任意射线为极轴 Ox 建立平面极坐标系,逆时针为极角 θ 的正方向.以极轴 Ox 与圆周的交点 $O'(\theta=0)$ 作为原点,以圆周为坐标轴,建立自然坐标系,逆时针为自然坐标 s 的正方向.

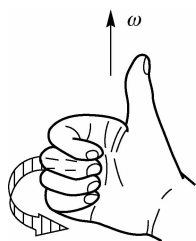


图 1-9 角速度的方向

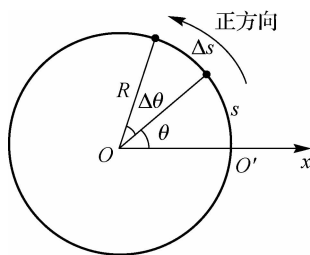


图 1-10 角量描述与线量描述的关系

角量描述与线量描述之间的关系如下.

自然坐标 s 与角位置 θ 的关系为

$$s = R\theta$$

路程 Δs 与角位移 $\Delta\theta$ 的关系为

$$\Delta s = R\Delta\theta$$

速率 v 与角速度 ω 的关系为

$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

切向加速度 a_t 为

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\beta$$

法向加速度 a_n 为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

【例 1-7】 一小球在水平面上以倾角 θ 斜抛出去,不计空气阻力,试求任意时刻小球的切向加速度和法向加速度.

解: 选取笛卡儿坐标系如图 1-11 所示,物体做抛物线运动,根据运动叠加原理,物体可

看作在水平方向做匀速直线运动,同时在铅垂方向做匀变速直线运动,加速度为 g ,于是有

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$$

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$$

则

$$v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = [v_0^2 + g^2 t^2 - 2(v_0 g t) \sin \theta_0]^{1/2}$$

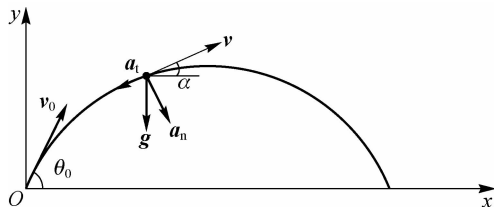


图 1-11 例 1-7 图

设速度 v 与 x 轴方向的夹角为 α ,由图可知

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}$$

$$\sin \alpha = \frac{v_y}{v}$$

$$a_n = g \cos \alpha$$

$$a_t = -g \sin \alpha$$

于是可得

$$a_n = g \cos \alpha = \frac{g v_x}{v} = \frac{g v_0 \cos \theta_0}{(v_0^2 + g^2 t^2 - 2 v_0 g t \sin \theta_0)^{1/2}}$$

$$a_t = -g \sin \alpha = \frac{g v_0 \sin \theta_0 - g^2 t}{(v_0^2 + g^2 t^2 - 2 v_0 g t \sin \theta_0)^{1/2}}$$

讨论:在轨迹的最高点, $\alpha = 0$, 则 $a_n = g, a_t = 0$.

【例 1-8】 如图 1-12 所示,一个半径为 0.1 m 的圆盘 D 可绕通过圆心的水平轴自由转动。一根细绳绕在盘的边缘,绳上系物体 A,设 A 匀加速下落,已知在 $t=0$ 时 A 的速度为 0.04 m/s,而且在 $t=2$ s 时物体 A 已下落了 0.2 m,试求圆盘边缘上任一点在任意时刻的切向加速度和法向加速度。

解:如图 1-12 所示,取 $t=0$ 时物体的位置为坐标原点,取竖直向下为 y 轴的正方向,于是物体 A 的运动方程为

$$y = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

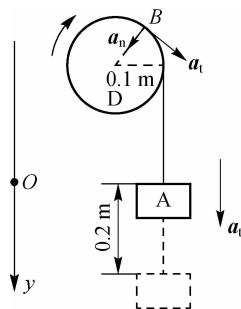


图 1-12 例 1-8 图

第一篇 力学

已知 $v_0 = 0.04 \text{ m/s}$, 因此

$$y = 0.04t + \frac{1}{2}at^2 \text{ (SI 单位)}$$

按题意, 在 $t = 2 \text{ s}$ 时, $y = 0.2 \text{ m}$, 代入上式可求得加速度

$$a = 0.06 \text{ m/s}^2$$

于是运动方程为

$$y = 0.04t + 0.03t^2$$

因此, A 的速率为

$$v = \frac{dy}{dt} = 0.04 + 0.06t$$

设细绳不伸长, 则圆盘边缘上任一点 B 的速率与 A 的速率相等, B 点的切向加速度与 A 的加速度相等, 得

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0.06 \text{ m/s}^2$$

因为 $R = 0.1 \text{ m}$, 所以 B 点的法向加速度为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{v^2}{R} = \frac{(0.04 + 0.06t)^2}{0.1} \\ &= 0.016 + 0.048t + 0.036t^2 \end{aligned}$$

式中, a_n 以 m/s^2 为单位, t 以 s 为单位.

第四节 相对运动

描述一个物体的运动时, 采用不同的参考系会有不同的结果. 若已知物体相对某一参考系 S 的运动, 现在希望知道该物体相对另一参考系 S' 的运动, 而 S' 又相对 S 在运动时, 那么就要讨论在两个不同参考系 S 和 S' 中, 描述质点 P 运动时的内在联系. 本节仅讨论最简单的情况, S' 相对 S 做平动, 即两个参考系坐标轴始终保持平行.

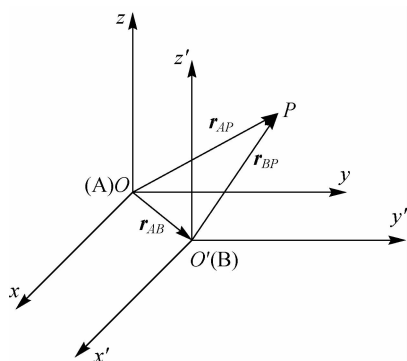


图 1-13 两个参考系中的质点运动

设参考系 S' 相对 S 做匀速直线运动, 且两参考系中直角坐标的对应坐标轴的相对取向始终相互平行. 首先取参考系 S 上任意点 O 为坐标原点, 建立坐标系 A, 然后取参考系 S' 上任意点 O' 为坐标原点, 建立坐标系 B. 在任意时刻 t , 质点 P 在坐标系 A 中的位矢为 \mathbf{r}_{AP} , 质点 P 在坐标系 B 中的位矢为 \mathbf{r}_{BP} , 坐标系 B 的原点 O' 在坐标系 A 中的位矢为 \mathbf{r}_{AB} , 如图 1-13 所示. 则这三个矢量之间的关系为

$$\mathbf{r}_{AP} = \mathbf{r}_{BP} + \mathbf{r}_{AB} \quad (1-25)$$

对时间求导, 可得

$$\frac{d\mathbf{r}_{AP}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{BP}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt}$$

式中, $\frac{d\mathbf{r}_{AP}}{dt}$ 为质点 P 相对于坐标系 A 的速度 \mathbf{v}_{PA} , $\frac{d\mathbf{r}_{BP}}{dt}$ 为质点 P 相对于坐标系 B 的速度 \mathbf{v}_{PB} ,

$\frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt}$ 为坐标系 B 相对于坐标系 A 的速度 \mathbf{v}_{BA} (称为牵连速度), 则有

$$\mathbf{v}_{PA} = \mathbf{v}_{PB} + \mathbf{v}_{BA} \quad (1-26)$$

式(1-26)称为速度合成公式. 再次对时间求导, 可得

$$\frac{d\mathbf{v}_{PA}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{PB}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{BA}}{dt}$$

式中, $\frac{d\mathbf{v}_{PA}}{dt}$ 为质点 P 相对于坐标系 A 的加速度 \mathbf{a}_{PA} , $\frac{d\mathbf{v}_{PB}}{dt}$ 为质点 P 相对于坐标系 B 的加速度 \mathbf{a}_{PB} , $\frac{d\mathbf{v}_{BA}}{dt}$ 为坐标系 B 相对于坐标系 A 的加速度 \mathbf{a}_{BA} (称为牵连加速度), 则有

$$\mathbf{a}_{PA} = \mathbf{a}_{PB} + \mathbf{a}_{BA} \quad (1-27)$$

式(1-27)称为加速度合成公式.

【例 1-9】 电车以速率 $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 向东行驶, 风裹着雨使雨有 $7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 向西的分速度. 坐在行驶的电车中, 人可以看到雨与竖直方向成 45° 角下落. 求雨相对于地面的速率.

解: 以雨滴为研究对象, 分别以地面和电车为参考系, 雨在两个参考系中的速度分别为 \mathbf{v} 和 \mathbf{v}' , 电车相对于地面的速度(牵连速度)为 \mathbf{v}_0 , 则

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0$$

已知 \mathbf{v} 的水平分量 v_x 为 7 m/s 向西, \mathbf{v}' 与竖直方向成 45° 角, $|\mathbf{v}_0| = v_0 = 10 \text{ m/s}$, 方向向东, 如图 1-14 所示. 则雨相对于地面的速率为

$$v = \sqrt{(v_0 + v_x)^2 + v_x^2} = \sqrt{17^2 + 7^2} = 18.4 \text{ m/s}$$

【例 1-10】 当物体 A 从楼顶自由下落了 16 m 时, 物体 B 从离顶楼 26 m 的窗口处自由下落, A 与 B 同时到达地面, 求楼顶高.

解: A、B 都做自由落体运动, 加速度同为 \mathbf{g} , 因此 A、B 的相对运动是匀速直线运动, 我们选 A 为运动参考系 S' , 显然在 S' 中解题简单方便.

当 B 开始运动时,

$$v_A = \sqrt{2gh}, v_B = 0$$

因此, B 对 A 的相对速率为

$$v_r = \sqrt{2gh}$$

B 开始运动时它相对于 A 的初位置为

$$s = h' - h$$

由此得 A、B 相遇的时间为

$$t = \frac{s}{v_r} = \frac{h' - h}{\sqrt{2gh}}$$

因此, B 下落的高度为

$$h_B = \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2} \left(\frac{h' - h}{\sqrt{2gh}} \right)^2 = \frac{(h' - h)^2}{4h}$$

由题意知, $h = 16 \text{ m}$, $h' = 26 \text{ m}$, 代入上式得

$$h_B = \frac{100}{64} = 1.6 \text{ m}$$

由此可见楼顶的高度为

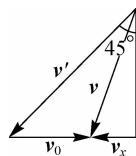


图 1-14 例 1-9 图

$$h_0 = h' + h_B = 26 + 1.6 = 27.6 \text{ m}$$

本章提要

1. 描述质点运动的物理量

(1) 位置矢量: \mathbf{r} , 运动方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

(2) 位移矢量: $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ 和路程 Δs .

(3) 平均速度: $\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$.

(4) 平均速率: $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

(5) 瞬时速度(速度): $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

(6) 瞬时速率(速率): $v = \frac{ds}{dt}$.

(7) 加速度: $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$.

这些定义与坐标系的选取无关, 在不同坐标系中有不同形式.

2. 直角坐标系中的运动学描述

(1) 位置矢量.

① 矢量形式: $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$.

② 分量形式:
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

(2) 位移矢量: $\Delta \mathbf{r} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}$.

(3) 速度.

① 矢量形式: $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$.

② 分量形式:
$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

(4) 速率.

$$v = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

(5) 加速度.

① 矢量形式: $\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$.

$$\textcircled{2} \text{分量形式: } \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases} .$$

3. 直角坐标系中的两类运动学问题

(1) 已知 $\mathbf{r}(t)$, 求 $\mathbf{v}(t)$ 和 $\mathbf{a}(t)$, 直接求导.

(2) 已知 $\mathbf{v}(t)$ 或 $\mathbf{a}(t)$ 和初始条件 $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$, 求 $\mathbf{r}(t)$, 结合初始条件积分.

4. 圆周运动

(1) 自然坐标系.

位置: 自然坐标 s , 运动方程 $s = s(t)$.

速度矢量: $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_\tau = \frac{ds}{dt}\mathbf{e}_\tau$, 分量形式 $v = \frac{ds}{dt}$.

加速度分为切向加速度 a_τ 和法向加速度 a_n :
$$\begin{cases} a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \\ a_n = \frac{v^2}{R} \end{cases} .$$

加速度大小: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$.

(2) 圆周运动的角量描述.

位置: 角位置 θ (极角), 运动方程 $\theta = \theta(t)$.

角速度: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

角加速度: $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$.

(3) 圆周运动线量描述和角量描述的关系.

① 自然坐标 s 与角位置 θ : $s = R\theta$.

② 速率 v 与角速度 ω : $v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$.

③ 切向加速度 a_τ : $a_\tau = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\beta$.

④ 法向加速度 a_n : $a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$.

5. 相对运动

(1) 位置关系: $\mathbf{r}_{AP} = \mathbf{r}_{BP} + \mathbf{r}_{AB}$.

(2) 速度关系: $\mathbf{v}_{PA} = \mathbf{v}_{PB} + \mathbf{v}_{BA}$.

(3) 加速度关系: $\mathbf{a}_{PA} = \mathbf{a}_{PB} + \mathbf{a}_{BA}$.

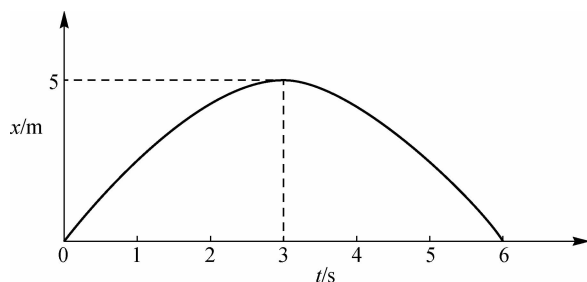
习 题

1-1 一质点做直线运动,其坐标 x 与时间 t 的关系曲线如题 1-1 图所示. 求:(1)该质点在第几秒时速度为零?

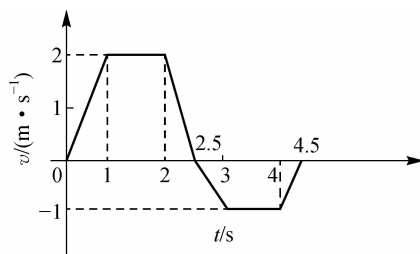
(2)在哪段时间内,速度和加速度方向相同?

1-2 小球沿斜面向上运动,其运动函数为 $s = 8 + 8t - t^2$ (SI),求小球运动到最高点的时刻.

1-3 一质点沿 z 轴做直线运动,其 $v-t$ 曲线如题 1-3 图所示. 设 $t=0$ 时,质点位于坐标原点,则求在 $t=4.5$ s 时,质点在 z 轴上的位置.



题 1-1 图



题 1-3 图

1-4 一质点沿 x 轴运动,其加速度 a 与位置坐标 x 的关系为 $a = 3 + 9x^2$ (SI). 如果质点在原点处的速度为零,求其在任意位置处的速度.

1-5 有一质点沿 x 轴做直线运动, t 时刻的坐标为 $x = 4.5t - 2t^3$ (SI). 求:

- (1)第二秒内的平均速度;
- (2)第二秒末的瞬时速度;
- (3)第二秒内的路程.

1-6 一艘正在行驶的快艇,在发动机关闭后,有一个与它的速度方向相反的加速度,其大小与它的速度平方成正比,即 $\frac{dv}{dt} = -kv^2$,式中 k 为恒量. 试证明:快艇在关闭发动机后又行驶 x 距离时的速度为 $v = v_0 e^{kx}$,其中 v_0 是发动机关闭时的速度.

1-7 在 Oxy 平面内有一个运动的质点,其运动函数为 $\mathbf{r} = 3t \mathbf{i} + 10t^2 \mathbf{j}$ (SI),求:

- (1) t 时刻的速度;
- (2)切向加速度和法向加速度的大小;
- (3)该质点运动的轨迹方程.

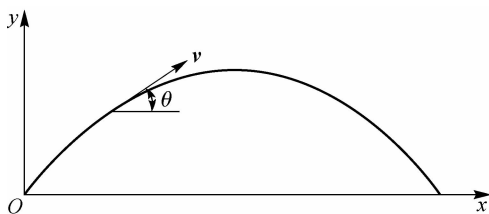
1-8 一物体以速度 v_0 开始下落,该物体可视为质点,其加速度与速度关系为 $a = A - Bv$,这里 A 、 B 为常量. 从物体开始下落时计时,并设开始下落点为坐标原点. 求物体的运动方程.

1-9 如题 1-9 图所示,以一定初速度斜向上抛出一物体. 若忽略空气阻力,求当物体的速度 \mathbf{v} 与水平面的夹角为 θ 时的切向加速度和法向加速度的大小.

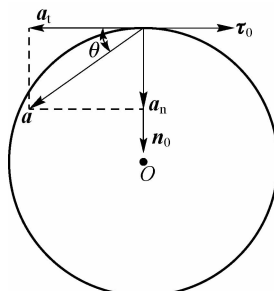
1-10 小船从岸边 A 点出发渡河, 如果它保持与河岸垂直向前划, 则经过时间 t_1 到达对岸下游 C 点; 如果小船以同样速率划行, 但垂直河岸横渡到正对岸 B 点, 则需要与 A、B 两点连成的直线成 α 角逆流划行, 经时间 t_2 到达 B 点. 若 B、C 两点之间的间距为 s , 求此河的宽度及 α 的数值.

1-11 一质点沿半径为 R 的圆周轨迹运动, 如题 1-11 图所示, 任意时刻走过的路程与 t 的关系为 $s = v_0 t - \frac{1}{2} b t^2$, 这里 v_0 和 b 均为常量. 求:

- (1) 任意时刻质点的加速度;
- (2) t 为何值时, 质点的加速度大小为 b ?

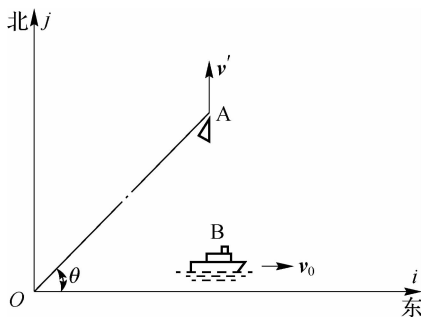


题 1-9 图



题 1-11 图

1-12 如题 1-12 图所示, 轮船 B 在江面上相对于岸边向东行驶, 其速度大小为 25 km/h. 该船上观察者看到一小船 A 以相对于轮船的速度为 40 km/h, 向北行驶, 试求岸上观察者观察到小船 A 的速度.



题 1-12 图

1-13 在相对于地面静止的坐标系内, A、B 两船都以 2 m/s 的速率匀速行驶, A 船沿 x 轴正向, B 船沿 y 轴正向. 今在 A 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系 (x 、 y 轴的单位矢量分别用 i 、 j 表示), 那么从 A 船看 B 船, 它对 A 船的速度为多少?

第 2 章

牛顿运动定律

动力学研究物体之间的相互作用对物体运动的影响。牛顿(Newton)在前人实践和研究的基础上,经过分析总结得出了物体机械运动状态变化与物体间相互作用的关系,即牛顿运动定律。

牛顿运动定律是动力学的核心,也是经典力学的基础。本章着重研究力对质点瞬时作用的规律,并介绍牛顿运动定律处理质点动力学问题的基本方法。

第一节 牛顿运动三定律

任何物体都具有保持静止或匀速直线运动状态不变的性质,这样的一种特性称为**惯性**。在研究物体相对运动时,选取的参考系是牛顿运动定律适用的参考系,这样的系统称为**惯性参考系**。凡是相对于某一已知的惯性系做匀速直线运动的参考系都是惯性参考系。地球有自转和公转,所以地球不是一个很好的惯性系。太阳也不是一个理想的惯性系,因为太阳绕银河系的中心旋转,银河系和河外系也都在总星系中旋转。如此说来,宇宙中严格的惯性系并不存在。不过,一个参考系能否被看作惯性系,只能根据观测和实验结果来判断。实验证明,在许多情况下,地球的自转和相互作用的影响可以忽略不计,固定在地球表面上的参考系和地心参考系可以看作近似程度相当好的惯性系;太阳绕银河系的中心旋转的角速度比地球自转和公转的角速度都小得多,因此,太阳参考系与惯性系的相似程度比地球高得多,天文观测的结果也证明了这一点。由此可以看出,只要将参考系在宇宙中不断地扩大,就能获得越来越精确的惯性系。严格的惯性系是参考系的一种理想模型,目前最好的实用惯性系是以选定的 1 535 颗恒星平均静止位形作为基准的参考系——FK4 系。

一、牛顿第一定律

牛顿将伽利略的发现总结为动力学的重要定律。1686 年,他在著名的《自然哲学的数学原理》中写道:任何物体都保持静止或匀速直线运动状态,直到其他物体作用的力迫使它改变这种状态为止。这就是**牛顿第一定律**,也称为**惯性定律**。

牛顿第一定律提出了两个力学基本概念,一个是物体的惯性,另一个就是力。仅当物体受到其他物体作用时才会改变其运动状态,这种作用称为**力**。也就是说,力是使物体改变运动状态的原因,而不是维持物体运动的原因。

在自然界中,完全不受其他物体作用的物体实际上是不存在的。任何物体总要受到接触

力或场力的作用,因此,牛顿第一定律不能简单地直接通过实验来验证.

二、牛顿第二定律

牛顿在《自然哲学的数学原理》一书中,对力与物体运动状态之间的规律提出了下述定量关系,即

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (2-1)$$

式(2-1)表明,物体所受的力等于物体动量的瞬时变化率,其中, $m\mathbf{v}$ 为物体的动量,记为 $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$,动量 \mathbf{p} 的方向与速度 \mathbf{v} 的方向相同.

在国际单位制中,动量的单位为千克·米/秒(kg·m/s).

式(2-1)可以写为

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2-2)$$

当物体在低速情况下运动,即物体运动的速度远远小于光速时,物体的质量可以视为不依赖于速度的常量,于是,式(2-2)可以写成

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (2-3)$$

这是人们比较熟悉的牛顿第二定律的形式.当物体的质量发生变化时,如火箭在发射过程中,火箭的质量随时间减少,此时,就不能用式(2-3)来分析这类变质量物体的运动.而且,当物体的速度接近光速时,即使物体在运动过程中并不喷出质量,物体的质量也将随速度而变化,因而式(2-3)也不再适用,但式(2-1)被实验证明依然是成立的.所以,式(2-1)具有更广泛的意义.

在国际单位制中,质量的单位为千克(kg),加速度的单位为米/秒⁻²(m/s²),力的单位为牛(N).

牛顿第二定律是牛顿运动定律的核心,对它必须有正确的理解.

应用牛顿第二定律时,必须明确:

(1)牛顿第二定律概括了力的**叠加原理**.实验表明,如果物体同时受到几个力 \mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 、 \mathbf{F}_3 、 \dots 的作用,它所产生的加速度等于合外力 $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$ 所产生的加速度,也等于每个力单独所产生的加速度 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 、 \mathbf{a}_3 、 \dots 的矢量和.也就是说,每个力对物体作用的结果,并不因为同时有其他力的作用而有所改变,这就是力的**叠加原理**.该原理的数学表达式为

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = m\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + \dots = m \sum_i \mathbf{a}_i = m\mathbf{a} \quad (2-4)$$

故 \mathbf{F} 应理解为所有外力的矢量和, \mathbf{a} 就是合外力作用下物体的加速度.

(2)矢量性.力和加速度都是矢量,式(2-3)是矢量关系.因此,在运用此定律时应采用矢量的法则来处理,为了运算方便,可选取适当的坐标系,把式(2-3)分解为各坐标方向上的分量形式.

在直角坐标系下,式(2-3)可分解为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ F_y &= ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} \\ F_z &= ma_z = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

在自然坐标系中,式(2-3)可分解为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_n &= m\mathbf{a}_n = m \frac{v^2}{R} \mathbf{e}_n \\ \mathbf{F}_\tau &= m\mathbf{a}_\tau = m \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_\tau \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

在式(2-6)中, \mathbf{F}_n 和 \mathbf{F}_τ 分别是质点在该时刻所受合力 \mathbf{F} 在法向和切向的分力. 这两组分量形式表现了牛顿运动定律的矢量意义, 即某方向的外力只能改变该方向上物体的运动状态, 只能在该方向上使物体产生加速度.

(3)瞬时性. 牛顿第二定律定量地表述了物体的加速度与所受合力之间的瞬时关系, \mathbf{a} 表示瞬时加速度, \mathbf{F} 表示瞬时力, 物体的加速度 \mathbf{a} 只在它受力作用时才产生, 它们同时产生, 同时消失. 如果在某一瞬间物体失去了力的作用, 那么物体的加速度立即消失, 此后, 物体将以这一时刻的速度做匀速直线运动, 这正是惯性的表现.

三、牛顿第三定律

两物体之间的作用力 \mathbf{F} 和反作用力 \mathbf{F}' , 沿同一直线, 大小相等, 方向相反, 分别作用在两个物体上, 即

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}' \quad (2-7)$$

上述规律就是**牛顿第三定律**. 这个规律中物体之间的作用总是相互的, 人们常把其中一个力称为作用力, 而把另一个力称为反作用力.

为了正确理解牛顿第三定律, 必须注意以下几点:

- (1)作用力和反作用力总是大小相等, 方向相反, 沿同一直线.
- (2)作用力和反作用力总是成对出现, 同时产生, 同时消失.
- (3)作用力和反作用力一定是同一性质的力.
- (4)作用力和反作用力分别作用在两个物体上, 因此, 绝对不是一对平衡力.

第二节 力学中常见的力

要应用牛顿运动定律解决问题, 首先必须能正确分析物体的受力情况. 在日常生活和工程技术中经常遇到的力有重力、弹力、摩擦力等. 关于它们的知识, 在高中物理中已经学习过, 在此只做一些简单的回顾.

一、几种常见的力

1. 重力

地球表面附近的任何物体都要受到地球引力的作用, 称为地球表面物体的**重力**, 它的大

小也常常被称为物体的重量. 若忽略地球自转的影响, 物体所受的重力就等于它所受的地球对它的万有引力, 其大小等于物体的质量 m 与重力加速度 g 的乘积, 用 G 表示物体的重力, 则

$$G = mg \quad (2-8)$$

在式(2-8)中, 重力加速度 g 的大小因所在地的纬度和离地面高度的不同而不同, 有时还受到所在地区的矿产结构的影响, 通常取 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

2. 弹性力

物体在外力作用下发生形变. 发生形变的物体, 由于要恢复原状, 就会对与它接触的物体产生力的作用, 这种力称为弹性力. 拉伸或压缩的弹簧作用于物体的力, 桌面作用于放在其上的物体的力, 绳子作用于系在其末端的物体的力等, 都属于弹性力. 实际上, 当两个物体直接接触时, 只要物体之间发生形变, 物体间就产生一种相互作用力, 并且在一定的弹性限度内, 形变越大, 力也越大; 形变消失, 力也随之消失. 这种与物体形变有关的力, 就称为弹性力. 弹性力是一种接触力, 弹性力的方向指向物体恢复原状的方向.

弹性力的存在形式很多, 下面只讨论三种常见的表现形式.

(1) 支持力(或正压力). 两个物体通过一定面积相互挤压, 这种相互挤压的物体都会发生形变(即使小到难以观察, 形变依然存在), 为了恢复所产生的形变, 便产生了支持力(或正压力), 其大小取决于相互挤压的程度, 其方向总是垂直于两物体的接触面指向对方.

(2) 绳子对物体的拉力. 这种拉力是由于绳子发生了形变而产生的, 其大小取决于绳子被拉紧的程度, 其方向总是沿着绳子指向绳子收缩的方向.

绳子产生拉力时, 其内部各段之间也有相互作用的弹性力存在, 这种绳子内部的弹性力称为张力. 一般来说, 绳子中各处的张力可以是不同的, 它由绳子的形变情况, 同时也由绳子的质量分布及运动状态决定. 在通常讨论的问题中, 绳子的质量都可以忽略不计, 这样, 不论绳子是处于静止状态还是做加速运动, 绳子上各处的张力都是相等的, 而且等于外力. 一旦绳子的质量不能忽略, 则当绳子做加速运动时, 绳子上各处的张力就不相等了.

(3) 弹簧的弹性力. 当弹簧被拉伸或压缩时, 弹簧发生形变, 它就会对与之相连的物体产生弹性力的作用, 这种弹性力总是要使弹簧恢复原长.

在弹性限度内, 弹性力的大小与形变量成正比, 若以 F 表示弹性力的大小, 以 x 表示被拉伸或压缩的长度(形变量), 如图 2-1 所示, 则根据胡克定律有

$$F = -kx \quad (2-9)$$

式中, k 为弹簧的劲度系数, 它的数值取决于弹簧本身的结构, 负号表示弹性力 F 的方向与形变的方向相反. 当 x 为正值时, 表示弹簧被拉伸, 则 F 为负值, 即弹性力 F 的方向沿着 x 轴的负方向; 当 x 为负值时, 表示弹簧被压缩, 则 F 为正值, 即弹性力 F 的方向沿着 x 轴的正方向. 可见, 弹簧的弹性力方向总是指向要恢复原状的方向.

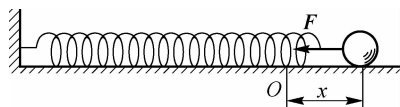


图 2-1 弹性力图示

3. 摩擦力

当一个物体在另一个物体表面上滑动或有滑动的趋势时, 在这两个物体的接触面上就

第一篇 力学

会产生阻碍物体间相对滑动的力,这种力就是摩擦力.当物体有相对滑动的趋势,但尚未运动时,物体间的摩擦力称为静摩擦力.静摩擦力的大小 f_s 因物体的外力大小的不同而不同,而且总与外力的大小相等,方向相反.另外,物体之间的静摩擦力有一个最大值,称为最大静摩擦力.实验表明,最大静摩擦力 f_{sm} 与接触面的正压力 N 的大小成正比,它们存在下面的关系,即

$$f_{sm} = \mu_0 N \quad (2-10)$$

静摩擦力的方向与相对运动趋势的方向相反.在式(2-10)中, μ_0 称为静摩擦系数,其数值由两个物体的表面状况和材料性质等因素决定,通常由实验测得.所以,静摩擦力的大小由外力决定,取值为 $0 \sim f_{sm}$.

当物体有相对滑动时,两物体接触面的摩擦力称为滑动摩擦力.实验表明,滑动摩擦力 f 的大小也与正压力 N 的大小成正比,即

$$f = \mu N \quad (2-11)$$

滑动摩擦力的方向与相对运动的方向相反.在式(2-11)中, μ 称为滑动摩擦系数,其数值主要由接触面的状况和材料性质等因素决定.对于给定的两个物体,其滑动摩擦系数 μ 略小于其静摩擦系数 μ_0 ,但在不严格区分的情况下,可以认为 $\mu = \mu_0$.

摩擦力是普遍存在的,是一种接触力,并在人们的生活和技术中起着重要作用,在地面上运动的物体,由于摩擦力的存在,其运动速度会逐渐减小;机床和车轮的转轴,由于摩擦力的存在,会逐渐损坏.在现代交通工具中,有 $10\% \sim 30\%$ 的功率由于要克服摩擦力而被消耗.但是,世界上如果不存在摩擦力,那么我们的生活将变得无法想象,人无法行走,车无法行驶,即便将车子开动起来也无法使其停止.

二、基本力

近代物理学证明,在自然界中,从宇宙天体到基本粒子这样广阔领域中的运动,均起因于四种基本相互作用力,它们是万有引力、电磁力、强力和弱力.

1. 万有引力

任何物体之间都存在着相互吸引力,称为万有引力.万有引力定律是牛顿在开普勒等前人研究成果的基础上总结出来的.

质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点,相距 r 时, m_1 和 m_2 间的引力为

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (2-12)$$

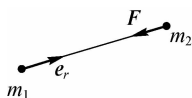


图 2-2 m_2 受 m_1 的万有引力

式中, G 称为万有引力常量,它是对任何物体都适用的普适恒量,这个规律称为万有引力定律,在国际单位制中,它的大小经测定为 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$; \mathbf{e}_r 为施力者指向受力者的单位矢量,式中的负号则表示该力的方向与 \mathbf{e}_r 的方向相反,如图 2-2 所示.

万有引力常量 G 的数量级很小,因此,通常地面上两物体之间的引力很小,可以忽略不计.但是,质量很大的天体之间的引力及天体附近物体间的引力就不可忽略了.所以只有在所涉及的物体中至少包括一个天体时,万有引力才是重要的.

近代物理研究指出,两个物体之间的万有引力是通过一种称为引力场的特殊物质来相

互作用的. 万有引力定律把天上的运动和地面上的运动统一起来, 被称为物理学的第一次伟大的综合, 它打破了自古以来人们对天体的神秘感, 增强了人们认识自然界的信心.

2. 电磁力

存在于静止电荷之间的电性力及存在于运动电荷之间的电性力和磁性力, 由于它们在本质上相互联系, 19 世纪末, 麦克斯韦把它们统一为电磁的相互作用, 称为电磁力.

由于分子和原子都是由电荷组成的系统, 因而, 它们之间的作用力基本上就是它们的电荷之间的电磁力.

从物质的微观结构看, 弹性力起源于构成物质的微粒之间的电磁力, 而摩擦力也与分子间的引力作用和静电作用有关, 它们均属于电磁力.

3. 强力

进入 20 世纪, 人们认识到原子核由质子和中子组成. 虽然质子间具有强大的电排斥作用, 但却能聚集在原子核的小体积内. 当人们对物质结构的探索进入比原子还小的微观领域时, 发现在核子、介子等之间存在一种强力, 正是这种强力把原子内的质子和中子紧紧束缚在一起, 形成原子核. 强力是一种短程力, 其作用范围很短, 作用距离为 10^{-15} m. 当粒子间的距离超过 10^{-15} m 时, 强力可以忽略; 当粒子间的距离小于 10^{-15} m 时, 强力占主要支配地位.

4. 弱力

同样地, 进入 20 世纪, 在微观领域中人们还发现一种短程力, 称为弱力. 弱力在导致 β 衰变放出电子和中微子时显示出它的重要性. 贝克勒尔和居里夫人发现了原子核的放射现象, 表明即使有强力存在, 原子核也会裂变, 质子也会从原子核中挣脱出来. 研究表明, 这是一种弱相互作用, 称为弱力, 弱力的作用距离只有约 10^{-17} m.

综上所述, 自然界中各种各样的力, 就其本质而言, 都归结为四种基本力——万有引力、电磁力、强力和弱力. 重力属于万有引力, 而弹性力、摩擦力, 甚至浮力、黏滞阻力、气体的压力等, 从本质上讲都属于电磁力.

第三节 牛顿运动定律的应用

必须指出: 牛顿运动定律应用的对象是质点. 牛顿运动定律不但是质点动力学的基础, 而且是研究一般物体机械运动的基础. 因此, 应该深刻领会牛顿运动三定律的含义, 并在理解有关概念, 掌握有关规律的基础上, 学会应用其解决具体的力学问题.

利用牛顿运动定律解题时, 最好按下述思路分析.

1. 认物体

在有关问题中选定一个物体(抽象为质点)作为分析的对象. 如果问题涉及几个物体, 就一个一个地作为对象进行分析, 认出每个物体的质量.

2. 看运动

分析所选定物体的运动状态, 包括它的轨迹、速度和加速度. 如果问题涉及几个物体, 还要找出它们运动间的联系, 即它们的速度和加速度之间的关系.

3. 查受力

找出被选定的物体所受的所有外力, 画出简单的示意图表示物体受力的情况, 这种图称

第一篇 力学

为示力图.

4. 列方程

把上述分析出的质量、速度、加速度和力,用牛顿第二定律联系起来,列出方程.利用直角坐标系的分量式列式时,在图中应注明坐标轴的方向.在方程式足够的情况下,就可以求解未知量了.

在质点动力学中,一般有两类问题:第一类,已知力的作用情况,求运动;第二类,已知运动情况,求力.这两类问题的分析方法是相同的,都可以按上述步骤进行.

【例 2-1】 一质量为 0.80 kg 的物体放在倾角为 30° 的斜面上,设物体与斜面的滑动摩擦系数为 0.30 . 试求下面四种情形下作用到物体上的外力 F .

- ① 物体沿斜面向上匀速滑动;
- ② 物体沿斜面向上以加速度 0.10 m/s^2 做匀加速运动;
- ③ 物体沿斜面向下匀速滑动;
- ④ 物体沿斜面向下以加速度 0.10 m/s^2 做匀加速运动.

解: 以物体为研究对象,取地面为参考系.

首先考虑物体沿斜面向上的运动,此时作用在物体上的力如图 2-3(a)所示. 它们是向下的重力 $G=mg$; 作用力 F (假定沿斜面向上); 摩擦力 $F_f=\mu F_N$, 它与相对运动的方向相反,沿斜面向下; 斜面对物体的支持力 F_N . 作平面直角坐标系 Oxy , 取 x 轴的正方向沿斜面向上, 物体沿 x 轴方向的运动方程为

$$F - mg \sin \alpha - \mu F_N = ma_x = ma \quad (1)$$

物体沿 y 方向的运动方程为

$$F_N - mg \cos \alpha = ma_y = 0 \quad (2)$$

由式②得,斜面给予物体的支持力为

$$F_N = mg \cos \alpha \quad (3)$$

把式③代入式①得

$$F - mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = ma$$

由此得

$$F = m[a + g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)] \quad (4)$$

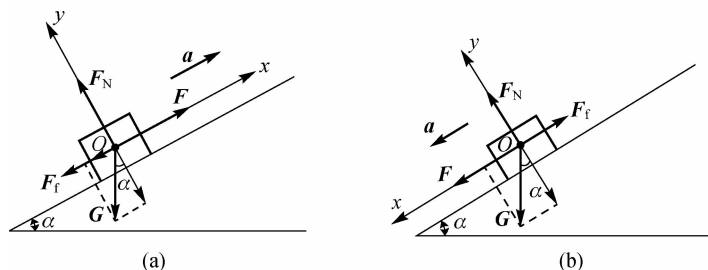


图 2-3 例 2-1 图

(a) 物体沿斜面向上运动 (b) 物体沿斜面向下运动

① 物体做匀速运动, $a=0$, 把已知数据代入上式, 得

$$F = 0.80 \times 9.8 \times (\sin 30^\circ + 0.30 \cos 30^\circ) = 5.96 \text{ N}$$

②物体以 0.10 m/s^2 的加速度运动,在式④中代入相应的数据得

$$F=0.80 \times [0.10+9.8 \times (\sin 30^\circ+0.30 \cos 30^\circ)]=6.04 \text{ N}$$

再考虑物体沿斜面向下的运动,此时作用在物体上的力如图 2-3(b)所示.假定力 F 的指向沿斜面向下,而摩擦力的指向必定沿斜面向上以阻碍物体的相对运动.取沿斜面向下为 x 轴的正方向,则运动方程为

$$F+mg \sin \alpha-\mu F_N=ma$$

因为 $F_N=mg \cos \alpha$,故

$$F=m[a-g(\sin \alpha-\mu \cos \alpha)]$$

③物体的运动是匀速的($a=0$),由式④可得

$$F=0.80 \times [-9.8 \times (\sin 30^\circ-0.30 \cos 30^\circ)]=-1.88 \text{ N}$$

④物体以 0.10 m/s^2 的加速度向下滑动,由式④可得

$$F=0.80 \times [0.10-9.8 \times (\sin 30^\circ-0.30 \cos 30^\circ)]=-1.80 \text{ N}$$

这两个结果中的负号表明,力 F 的指向应沿斜面向上.

【例 2-2】 一个质量为 m 的雨滴在空气中自高处自由下落,设雨滴在下落过程中受到的空气阻力与其速率成正比(比例系数为 μ),方向与运动速度方向相反,即 $f_r=-\mu v$.以开始下落时为计时零点,求此雨滴落地前任意时刻的速度和雨滴的运动方向.

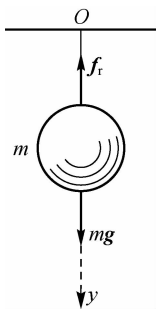


图 2-4 例 2-2 图

解:雨滴受力情况如图 2-4 所示.取 y 轴正方向竖直向下,原点 O 为起始位置,设某一时刻雨滴的加速度为 a ,则根据牛顿第二定律有

$$mg-\mu v=ma=m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

上式可化为

$$\frac{dv}{mg-\mu v}=\frac{\mu}{m} dt$$

两边积分并根据初始条件得

$$\ln \frac{mg-\mu v}{mg-\mu v_0}=-\frac{\mu}{m} t$$

即

$$v = \frac{mg}{\mu} (1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}) \quad (2)$$

这就是雨滴落地前速度随时间的变化规律.

雨滴在空气阻力作用下,其加速度会越来越小,最终以恒定的速度(称为收尾速度)下落.当雨滴以恒定的速度下落时,其加速度为零,即 $dv/dt=0$,这样由式①可得收尾速度的大小为

$$v = \frac{mg}{\mu}$$

由式②可得

$$dy = \frac{mg}{\mu} (1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}) \cdot dt$$

两边积分,并由初始条件(当 $t=0$ 时, $y_0=0$)可得

$$y = \frac{mg}{\mu} t - \frac{m^2}{\mu^2} g (1 - e^{-\frac{\mu}{m}t})$$

该式即为所求雨滴的运动方程.

第四节 惯性参考系和惯性力

运动是绝对的,而对运动的描述是相对的,为了具体描述运动,必须选择参考系,对于不同的参考系,同一物体的运动描述可以不同,但是,如果问题涉及的是运动和力的关系,即要应用牛顿运动定律时,参考系就不能任意选择,因为牛顿运动定律并非在任何参考系中都成立.

一、惯性参考系

实验表明,在有些参考系中,牛顿运动定律是成立的,而在另一些参考系中,牛顿运动定律却并不适用.例如,地面上放着一个静止的物体,人站在地面上观察该物体时,物体静止着,加速度为零,这是作用在它上面的力相互平衡,即合力为零的缘故.因此,以地面为参考系观察该物体,符合牛顿运动定律.如果此人坐在一辆沿路面加速行驶的汽车上观察此物体,那么在车上看到的该物体的情况就大不一样了,该物体是向与汽车相反的方向做加速运动的,该物体的受力情况没有变化,合力仍然为零,但却有了加速度,这显然是不符合牛顿运动定律的.因此,以相对于地面做加速行驶的汽车作为参考系,牛顿运动定律不再成立.由此可见,牛顿运动定律并不是对任何参考系都适用.

人们把牛顿运动定律成立的参考系称为**惯性参考系**,简称惯性系;而牛顿运动定律不成立的参考系称为**非惯性参考系**,简称非惯性系.

确定一个参考系是否是惯性参考系,只能依靠观察和实验,如果在所选择的参考系中应用牛顿运动定律,所得的结果在要求的精确度范围内与实验相符合,就可以认为该参考系是惯性参考系.从天体运动的研究可知,如果选定太阳为参考系,以太阳的中心为原点,指向任一恒星的直线为坐标轴,那么所观察到的大量天文现象,都能和根据牛顿运动定律及万有引力定律所推算的结果相符合,因此,通常把太阳参考系认为是惯性参考系.实验还表明,相对

于惯性参考系做匀速直线运动的参考系也都是惯性参考系,而相对于惯性参考系做变速运动的参考系不是惯性参考系.

生产实践和实验表明,地球可视为惯性参考系,但不是一个严格的惯性系,因为地球对太阳有公转和自转.也就是说,地心相对于太阳及地面对地心都有加速度.但是,如果把地球对太阳的向心加速度和地面对地心的向心加速度计算出来,可以发现,这些向心加速度都是极其微小的,因此,在一般计算范围内,地球或静止在地面上的任一物体都可以近似看成惯性参考系.同样地,在地面上做匀速直线运动的物体也可近似看成惯性参考系,但是在地面上做变速运动的物体就不能看成惯性参考系,不能直接应用牛顿运动定律.

二、惯性力

通过前面的学习可知,牛顿运动定律只在惯性系中成立.然而,在实际情况下,往往要考虑非惯性系.因为在实际问题中,需要在非惯性系中观察和处理物体的运动现象.若仍然希望能在非惯性系中运用牛顿运动定律处理动力学问题,则必须引入一种惯性力.

1. 直线加速参考系的惯性力

设有一个质点,质量为 m ,相对于某一惯性系 k ,在实际的外力 F 作用下获得加速度 a ,根据牛顿第二定律,有

$$F=ma$$

设想有另一非惯性系 k' ,相对于惯性系 k 以加速度 a_0 平动.设质点在非惯性系 k' 中的加速度为 a' .由运动的相对性可得

$$a=a'+a_0$$

联立以上两式得

$$F=ma'+ma_0$$

也可写成

$$F+(-ma_0)=ma'$$

此式说明,质点受的合外力 F 并不等于 ma ,因此,牛顿运动定律在非惯性系 k' 中不成立.若仍要在非惯性系 k' 中应用牛顿运动定律观测该质点的运动,则可认为质点除了受到实际的外力 F 外,还受到一个大小和方向由 $(-ma_0)$ 表示的力,称此力为惯性力,用 F_0 表示,即

$$F_0=-ma_0 \quad (2-13)$$

式(2-13)表明,在直线加速参考系中,惯性力的大小等于质点的质量和此非惯性系相对于惯性系的加速度 a_0 的乘积,而方向与此加速度 a_0 的方向相反.惯性力是为了在非惯性系中应用牛顿第二定律而必须引入的力.

引入了惯性力,在非惯性系中就有了牛顿第二定律的形式,即

$$F+F_0=ma' \quad (2-14)$$

式中, F 是实际存在的各种力(或它们的合力),它们是物体之间的相互作用,是前面提到的常见力和基本力,属于真实力,而惯性力 F_0 是一种假想力.因为惯性力并不是来自物体间的相互作用,所以惯性力无施力物体,也就不存在相互作用力,它只是物体的惯性在非惯性系中的表现.

2. 匀速转动参考系的惯性力

如图 2-5 所示,长度为 r 的细绳的一端系一个质量为 m 的小球,另一端固定于圆盘的中

第一篇 力学

心. 当圆盘以匀角速度 ω 绕通过盘心并垂直于盘面的竖直轴旋转时, 小球也随圆盘一起转动. 若以地面为参考系, 绳子给予小球的拉力 T 使小球做圆周运动, 这是符合牛顿运动定律的, 而且

$$T = ma_n$$

$$T = ma_n = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 r$$

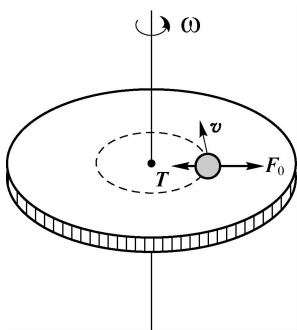


图 2-5 做匀角速度转动的参考系中的惯性力

若以转动的圆盘这个非惯性系为参考系, 小球受到细绳的拉力 T 的作用, 但却是静止的, 这是不符合牛顿第二定律的. 若还要使用牛顿第二定律, 则必须认为小球除了受到细绳的拉力 T 作用外, 还受到惯性力 F_0 的作用, 惯性力 F_0 与拉力 T 相平衡, 这样相对于圆盘非惯性系, 小球受力满足下面的关系.

$$T + F_0 = 0$$

$$F_0 = -T = -ma_n$$

即

$$F_0 = -ma_n \quad (2-15)$$

显然, 这种惯性力的方向总是与法向加速度 a_n 的方向相反, 总是背离轴心沿着半径向外, 故称为**惯性离心力**, 即把相对于转动参考系静止的物体所受的惯性力称为惯性离心力.

由前面的分析可知, 惯性离心力和在惯性系中观察到的向心力大小相等, 方向相反, 因此常有人认为惯性离心力是向心力的反作用力, 其实这是一种误解. 向心力是真实力作用的表现, 而惯性离心力是一种假想力, 它只是运动物体的惯性在参考系中的表现, 它没有反作用力. 因此, 不能说惯性离心力是向心力的反作用力.

【例 2-3】 如图 2-6 所示, 在刹车时卡车有一恒定的加速度 $a = 7.0 \text{ m/s}^2$, 刹车一开始, 原来停上面的一个箱子就开始滑动, 它在卡车车厢上滑动了 $L = 2 \text{ m}$ 后撞上了卡车的前帮, 问此箱子撞上前帮时相对卡车的速度为多大? 设箱子与车厢底板之间的滑动摩擦系数 $\mu = 0.5$.

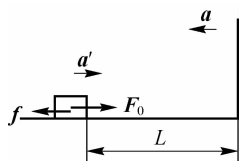


图 2-6 例 2-3 图

即

解: 以车厢为参考系, 由于车厢是非惯性参考系, 因此, 箱子在水平方向除了受到摩擦力 f 外, 还要受到惯性力 $F_0 = ma$ 的作用. 设箱子相对于卡车的加速度为 a' , 由牛顿第二定律得

$$F_0 - f = ma'$$

$$ma - \mu mg = ma'$$

所以

$$a' = \frac{ma - \mu mg}{m} = a - \mu g$$

再由 $v^2 = 2a'L$ 得箱子碰上车厢前帮时相对于卡车的速度为

$$v = \sqrt{2a'L} = \sqrt{2(a - \mu g)L} = \sqrt{2 \times (7 - 0.5 \times 9.8) \times 2} = 2.9 \text{ m/s}$$

本章提要

1. 牛顿运动三定律

牛顿第一定律:任何物体都将保持静止或匀速直线运动状态,直到外力迫使它改变这种状态为止.

牛顿第二定律: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. 当 m 变化时, $\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$.

牛顿第二定律在直角坐标系中的分量式为

$$\begin{cases} F_x = ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \\ F_y = ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} \\ F_z = ma_z = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

牛顿第二定律在自然坐标系中的分量式为

$$\begin{cases} \mathbf{F}_n = m\mathbf{a}_n = m \frac{v^2}{R} \mathbf{e}_n \\ \mathbf{F}_\tau = m\mathbf{a}_\tau = m \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_\tau \end{cases}$$

牛顿第三定律: $\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$.

2. 几种常见的力

- (1) 重力: $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$.
- (2) 弹簧的弹性力: $\mathbf{F} = kx$.
- (3) 最大静摩擦力: $f_{sm} = \mu_0 N$, μ_0 为静摩擦系数.
- (4) 滑动摩擦力: $f = \mu N$.
- (5) 万有引力: $\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$.

3. 惯性系和惯性力

牛顿运动定律成立的参考系称为惯性系,牛顿运动定律不成立的参考系称为非惯性系.

惯性力: $\mathbf{F}_0 = -m\mathbf{a}$.

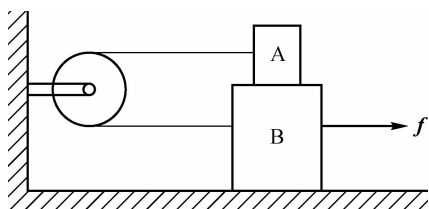
习 题

2-1 一人在平地上拉一质量为 M 的木箱匀速前进. 木箱与地面间的摩擦系数 $\mu=0.6$. 设此人前进时肩上绳的支撑点距地面高度为 $h=1.5\text{ m}$, 问绳长 l 为多长时最省力?

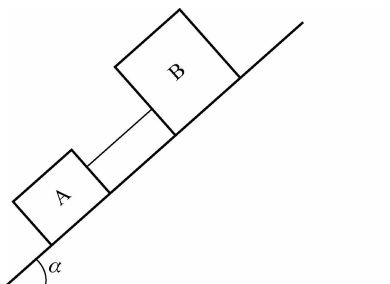
2-2 质量 $m=2.0\text{ kg}$ 的匀细绳, 长为 $L=1.0\text{ m}$, 两端分别连接重物 A 和 B, $m_A=8.0\text{ kg}$, $m_B=5.0\text{ kg}$, 今在 B 物上施以大小为 $F=180\text{ N}$ 的向上拉力, 使绳和两物体向上运动, 求绳中距离 A 端为 x 处的张力 $F_T(x)$ 的大小.

2-3 质量分别为 $m_A=4\text{ kg}$ 和 $m_B=8\text{ kg}$ 的两个物体 A 和 B 叠置在一起放在水平桌面上, 并用一细绳跨过定滑轮将两物体相连, 如题 2-3 图所示. 设物体 A 和 B 及 B 和桌面之间的静摩擦系数均为 $\mu_0=0.25$. 试求: 用多大的水平力 f 拉物体 B, 才能刚好使它开始向右运动? 这时绳子的张力 F_T 有多大?

2-4 质量分别为 $m_A=1\text{ kg}$ 和 $m_B=2\text{ kg}$ 的两物体 A 和 B, 用细绳连接后放在仰角为 $\alpha=30^\circ$ 的斜面上, 如题 2-4 图所示. 已知 A 和 B 与斜面间的滑动摩擦系数分别为 $\mu_A=0.20$ 和 $\mu_B=0.30$. 求两物体的加速度和绳中的张力.



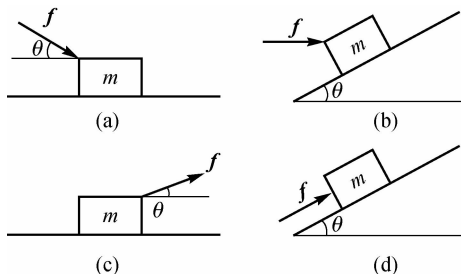
题 2-3 图



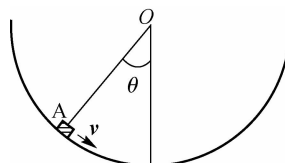
题 2-4 图

2-5 求题 2-5 图所示的四种情况下物体的加速度及平面或斜面受到的正压力. 假定各种情况下的摩擦系数均为 μ .

2-6 如题 2-6 图所示, 质量为 m 的小物块 A 沿圆心在 O 点、半径为 R 的光滑半圆形槽下滑. 当滑到图示位置时, 其速度为 v , 此时小物块与 O 点的连线 OA 和铅垂方向成 θ 角, 求这时小物块的切向加速度和它对槽的压力.



题 2-5 图

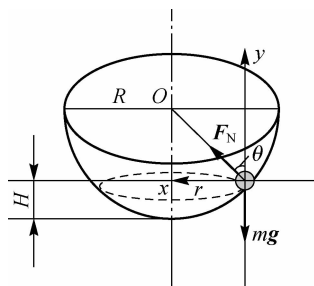


题 2-6 图

2-7 质量分别为 m 和 M 的滑块 A 和 B 叠置在一起, 放在光滑水平面上 (A 置于 B 之

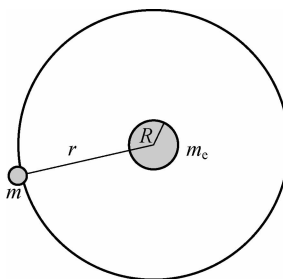
上). A、B 间的静摩擦系数为 μ_s , 滑动摩擦系数为 μ_k , 系统原先处于静止状态. 今将水平力 F 作用于 B 上, 要使 A、B 间不发生滑动, 证明: $F \leq \mu_s(m+M)g$.

2-8 在半径为 R 的光滑半球形容容器内, 质量为 m 的小球以角速度 ω 在一水平面内做匀速圆周运动. 试求该小球做圆周运动的平面距碗底的高度 H .



题 2-8 图

2-9 地球同步卫星质量为 m , 每 24 小时绕质量为 m_e 的地球一周, 因此它相对于地面是静止的, 如题 2-9 图所示. 试求绕地球的同步卫星轨道的半径.



题 2-9 图

第 3 章

动量守恒

牛顿运动定律,特别是牛顿第二定律给出了力的瞬时作用规律.实际上,力对物体的作用总是要延续一段时间.在这段时间内,力的作用将积累起来产生一个总效果.揭示力的时间积累效应的规律就是动量定理.把动量定理应用于质点系,导出一个重要的守恒定律——动量守恒定律.动量守恒定律和功能原理深刻反映了机械运动与其他运动形式之间相互转化的关系,具有普遍的意义,它们是自然界最基本、最普遍的规律.

第一节 冲量 质点的动量定理

一、质点的动量定理

前面在讲述牛顿第二定律时已经引入了动量这一物理量,引入动量后,牛顿第二定律可以写成

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

在实际生产实践中发现,仅讨论力的瞬时效应是不够的.如果作用在物体上的力持续一段时间,就会产生不同于牛顿第二定律的作用效果,即力作用一段时间,将上式改写成

$$\mathbf{F}dt = d\mathbf{p} \quad (3-1)$$

这一关系称为**动量定理的微分形式**,其中, $\mathbf{F}dt$ 表示质点所受合外力 \mathbf{F} 在 dt 时间内的累积量,称为在 dt 时间内质点所受合力 \mathbf{F} 的**元冲量**,用 $d\mathbf{I}$ 表示,即

$$d\mathbf{I} = \mathbf{F}dt \quad (3-2)$$

如果合力 \mathbf{F} 持续地从 t_0 时刻作用到 t 时刻,设 t 时刻质点的动量为 \mathbf{p} , t_0 时刻质点的动量为 \mathbf{p}_0 ,那么对式(3-2)积分,就可以求出这段时间力的持续作用效果为

$$\mathbf{I} = \int d\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}dt = \int_{p_0}^p d\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \quad (3-3)$$

式中, \mathbf{I} 为在 $t \rightarrow t_0$ 时间内的**冲量**,即 $\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}dt$,于是得到

$$\mathbf{I} = m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 \quad (3-4)$$

此式表明,质点在运动过程中,作用于质点的合力的冲量等于质点动量的增量.这个结论称为**质点的动量定理**.

由 $\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}dt$ 可知,冲量定义为合外力在一段时间内的积分,即冲量是描述力的时间累

积效应的物理量. 质点从一个状态变化到另一个状态中间要经历某种过程. 有一类物理量是用来描述过程的, 称为过程量; 另一类物理量是用来描述状态的, 称为状态量. 显然, 冲量是过程量, 动量是状态量, 动量定理表明力的持续作用的时间效果, 它给出了过程量(冲量 \mathbf{I}) 和该过程初、末两状态的状态量(动量 $m\mathbf{v}_0$ 和 $m\mathbf{v}$) 之间的定量关系.

冲量是矢量, 方向与质点动量增量的方向相同, 仅在恒力的情况下, 冲量的方向才与合外力的方向一致, 冲量的单位是牛顿·秒($\text{N}\cdot\text{s}$).

虽然动量定理与牛顿第二定律一样, 都反映质点运动状态的变化与力的作用关系, 但它们是有区别的. 牛顿第二定律所表示的是在力的作用下动量的瞬时变化规律, 而动量定理则表示在力的作用下质点动量的持续变化情形, 反映一段时间内力对质点作用的累积效果.

动量定理是直接由牛顿第二定律得到的, 所以它也只在惯性参考系中成立.

动量定理在打击和碰撞等问题中实用性很强, 在打击和碰撞的极短时间内质点间的相互作用力称为冲力, 冲力的特点是作用时间极短, 大小随时间而急剧变化, 冲力随时间的变化情况往往很复杂, 有时无法知道冲力与时间的函数关系, 因此引入平均冲力的概念, 如图 3-1 所示, 冲量的大小 $I = \int_{t_0}^{t_1} F dt$, 它等于冲力随时间变化曲线下的面积. 现在找出一个恒力 \bar{F} , 使它在同样时间 $t_1 - t_0$ 内的冲量与 \mathbf{I} 相等, 也就是图中所示矩形的阴影面积与冲力曲线下的面积相等, 即

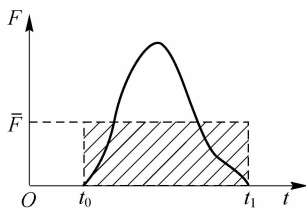


图 3-1 平均冲力示意图

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt = \bar{\mathbf{F}}(t_1 - t_0)$$

称恒力为平均冲力, 因此平均冲力定义为

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{t_1 - t_0} \mathbf{I} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt = \frac{m\mathbf{v}_1 - m\mathbf{v}_0}{t_1 - t_0} \quad (3-5)$$

由式(3-5)可以看出, 平均冲力也是一个矢量, 其方向与冲量 \mathbf{I} 的方向相同.

有了平均冲力的概念, 在打击、碰撞这类问题中, 可以在实验中测定物体在碰撞前后的动量, 借助于动量定理来确定物体所受的冲量, 从而估算冲力的平均值. 尽管这个平均冲力并不是冲力的确切描述, 但在不少实际问题中, 这样估算就足够了.

【例 3-1】 夯的质量为 20 kg, 把它举高到 1.2 m 处, 然后使它自由下落, 试分别求出下面两种情形下地面受到的平均冲力.

①若夯落在松软的土地上, 它刚着地到静止所需时间为 0.25 s;

②若夯落在坚硬的土地上, 它刚着地到静止所需时间为 0.01 s.

解: 取夯为研究对象. 在夯与地面碰撞的过程中, 它共受两个力作用: 重力 \mathbf{G} , 方向竖直向下; 地面对夯的平均冲力 $\bar{\mathbf{F}}$, 方向竖直向上, 作用于夯的总冲量为 $(\bar{\mathbf{F}} + \mathbf{G})\Delta t$. 夯在与地面碰撞前的初动量为 $m\mathbf{v}_0$, 碰撞后的末动量为零, 若取竖直向上方向为坐标轴的正方向, 则根据动量定理, 有

$$(\bar{\mathbf{F}} - mg)\Delta t = 0 - (-m\mathbf{v}_0) = m\mathbf{v}_0 \quad (1)$$

由自由落体公式知

$$v_0 = \sqrt{2gh} \quad (2)$$

第一篇 力学

把式②代入式①,可得

$$\bar{F} = \frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t} + mg = mg \left(\frac{1}{\Delta t} \sqrt{\frac{2h}{g}} + 1 \right)$$

把 $m=20 \text{ kg}$, $h=1.2$, $g=9.8 \text{ m/s}^2$ 代入上式.

(1) 当 $\Delta t=0.25 \text{ s}$ 时,有

$$\bar{F} = 20 \times 9.8 \times \left(\frac{1}{0.25} \times \sqrt{\frac{2 \times 1.2}{9.8}} + 1 \right) = 5.8 \times 10^2 \text{ N}$$

(2) 当 $\Delta t=0.01 \text{ s}$ 时,有

$$\bar{F} = 20 \times 9.8 \times \left(\frac{1}{0.01} \times \sqrt{\frac{2 \times 1.2}{9.8}} + 1 \right) = 9.9 \times 10^3 \text{ N}$$

地面对夯的平均冲力 \bar{F} 的大小在两种情况下分别等于 $5.8 \times 10^2 \text{ N}$ 和 $9.9 \times 10^3 \text{ N}$, 方向竖直向上. 按照牛顿第三定律, 夯对地面的平均冲力与 \bar{F} 等值反向.

从以上计算中可见, 夯的重量 ($mg=196 \text{ N}$) 对算出的平均冲力的大小是有影响的, 但在两种情况下影响不一定. 在第二种情况下, 夯的重量同平均冲力相比相差几十倍, 所以在计算中可以把它忽略, 由此带来的误差不大.

【例 3-2】 质量 $M=3 \times 10^3 \text{ kg}$ 的重锤, 自高 $h=1.0 \text{ m}$ 处自由落到受锻压的工件上, 在 $\Delta t=10^{-3} \text{ s}$ 时间内完全停止, 如图 3-2 所示. 求重锤对工件的平均冲力.

解: 由于工件无状态变化, 因此取重锤为研究对象, 在 Δt 时间内, 作用在重锤上的力有两个: 重力 P , 方向向下; 工件对重锤的抵抗力 F_N , 方向向上. 抵抗力是个变力, 在 Δt 时间内迅速变化, 故用平均抵抗力 \bar{F}_N 来代替.

重锤刚接触工件的速度, 由自由落体公式可得为 $v_0 = \sqrt{2gh}$. 在极短时间 Δt 内, 重锤的速度由初速度 v_0 变到末速度 0. 如果取竖直向上的方向为坐标轴的正方向, 那么根据动量定理可得

$$(\bar{F}_N - P)\Delta t = 0 - (-Mv_0) = M\sqrt{2gh}$$

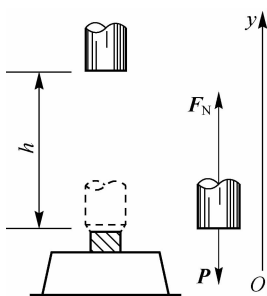


图 3-2 例 3-2 图

由此得

$$\begin{aligned} \bar{F}_N &= \frac{M\sqrt{2gh}}{\Delta t} + Mg = \frac{3 \times 10^3 \times \sqrt{2 \times 9.8 \times 1}}{10^{-3}} + 3 \times 10^3 \times 9.8 \\ &= 13.31 \times 10^6 \text{ N} \end{aligned}$$

\bar{F}_N 是重锤所受的平均抵抗力, 方向向上, 它的反作用力就是重锤对工件的平均冲力

\bar{F}'_N , 方向向下, 即

$$\bar{F}'_N = -\bar{F}_N = -13.31 \times 10^6 \text{ N}$$

如果将重锤放在工件上, 只能产生 $29.4 \times 10^3 \text{ N}$ 的压力, 而在冲击时却能产生 450 倍以上的压力, 从这里可大致体会到锻压的作用.

二、动量定理的分量形式

动量定理是矢量方程, 它表明合力的冲量方向就是动量增量 $\Delta \mathbf{p}$ 的方向. 为了正确地找出冲量 \mathbf{I} , 就必须用矢量作图法来处理. 因此, 在处理具体问题时, 常使用动量定理的分量形式.

在直角坐标系中, 动量定理在各坐标轴的分量形式为

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_0}^t F_x dt = \bar{F}_x(t - t_0) = mv_x - mv_{x_0} \\ I_y = \int_{t_0}^t F_y dt = \bar{F}_y(t - t_0) = mv_y - mv_{y_0} \\ I_z = \int_{t_0}^t F_z dt = \bar{F}_z(t - t_0) = mv_z - mv_{z_0} \end{cases} \quad (3-6)$$

这些分量式表明, 冲量在某个方向的分量等于在该方向上质点动量分量的增量, 即冲量在任一方向的分量只能改变它自己方向的动量分量, 而不能改变与它相垂直的其他方向的动量分量. 由此可以看到, 如果作用于质点的冲量在某个方向上的分量等于零, 尽管质点的总动量在改变, 但在这个方向的动量分量却保持不变.

在应用动量定理的分量式时, 应该注意各个分量都是代数量, 其正负号由坐标轴的方向来确定.

【例 3-3】 一个小球在弹簧的作用下做简谐振动, 弹性力 $F = -kx$, 而 $x = A \cos \omega t$. 其中, k 、 A 、 ω 都是常量. 求在 $t=0$ 到 $t = \frac{\pi}{2\omega}$ 的时间间隔内弹性力施于小球的冲量.

解: 由冲量的积分形式 $\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt$ 可知所求的冲量为

$$I = \int_0^{\pi/2\omega} F dt = -k \int_0^{\pi/2\omega} A \cos \omega t dt = -\frac{kA}{\omega}$$

负号表示此冲量的方向与轴的正方向相反.

第二节 质点系的动量定理

一、质点系的内力和外力

前面所讨论的都是一个质点的运动, 今后还要讨论一组质点的运动. 在分析运动问题时, 常可以把有相互作用的若干物体作为一个整体加以考虑. 当这些物体都可以看成质点时, 这一组质点称为一个系统, 简称质点系, 一个质点系由两个或更多的质点构成.

在一个质点系构成的力学系统中, 人们把系统外的物体对系统内的各质点的作用力称

为外力,把系统内各质点间的相互作用力称为内力. 一个力是内力还是外力,取决于所取系统的范围. 例如,把地球和下落的重物看成一个质点系,它们之间的引力是系统的内力,而空气作用在下落重物上的阻力则属于外力;如果把地球、重物和空气看成一个质点系,那么空气阻力就是内力. 因此,同一个力,在一种情况下是内力,而在另一种情况下就有可能是外力.

二、质点系的动量定理

一个质点的动量定理已经明确,那么一个质点系的动量定理就可以由每个质点满足的动量定理矢量叠加得到.

系统由 N 个质点组成,在系统中任取一个质点 i ,其质量为 m_i . 设该质点受到的外力 \mathbf{F}_i 和系统内其他质点 j 对质点 i 施加的内力作用 \mathbf{f}_{ij} ,则该质点的动量定理的微分形式为

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_{ij} = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}$$

质点系中的每个质点都可以列出这样一个方程,将 N 个方程相加,就可以得到质点系满足的动力学方程,即

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i + \sum_{i,j=1}^N \mathbf{f}_{ij} = \frac{d(\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i)}{dt} \quad (3-7)$$

设 $\mathbf{F}_{\text{外}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$, $\mathbf{F}_{\text{内}} = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{f}_{ij}$, $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$. 其中,系统内力由很多成对作用力和反作用力组成. 如图 3-3 所示,由牛顿第三定律可知, \mathbf{f}_{12} 和 \mathbf{f}_{21} 是一对作用力和反作用力, $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$, 可得系统的内力之和 $\mathbf{F}_{\text{内}} = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{f}_{ij} = 0$. 因此,式(3-7)可写为

$$\mathbf{F}_{\text{外}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (3-8)$$

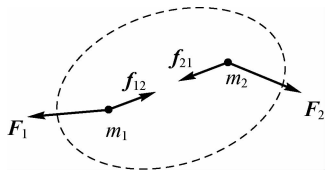


图 3-3 质点系的内力和外力

式(3-8)称为质点系的动力学方程. 这个方程与质点的牛顿第二定律类似,但它不同于牛顿动力学方程. 这个方程也可称为质点系的动量定理的微分形式. 考虑 $\mathbf{F}_{\text{外}}$ 持续作用 dt 时间,质点系的动量定理的微分形式可写为

$$\mathbf{F}_{\text{外}} dt = d\mathbf{p}$$

其中,等式左端 $\mathbf{F}_{\text{外}} dt$ 是质点系所受合外力在 dt 时间内累积的元冲量,等式右端是质点系的总动量变化. 如果 $\mathbf{F}_{\text{外}}$ 从 t_0 持续作用到末时刻 t ,那么

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}_{\text{外}} dt = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_{i0} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \quad (3-9)$$

式中, \mathbf{p} 和 \mathbf{p}_0 分别为系统的末动量和初动量.

式(3-9)表明,作用于质点系的外力矢量之和的冲量等于质点系动量的增量,这就是质点

系的动量定理,式(3-9)也可写成直角坐标系的分量形式.

从上面的讨论可知,系统的内力可以改变系统内单个质点的动量,但不能改变系统的总动量.

三、质心动量

质心是力学一个重要的概念,涉及质点系动力学问题都回避不了这个概念.质点系的动量可以表示为质心的动量.

由质点系的动量定义得

$$\boldsymbol{p} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \quad (3-10)$$

以 m 表示质点系的总质量, $m = \sum_i m_i$, 则质点系的动量可表示为

$$\boldsymbol{p} = m \frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt} \quad (3-11)$$

其中,

$$\boldsymbol{r}_C \equiv \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (3-12)$$

式(3-12)为质心矢径的定义. \boldsymbol{r}_C 与参考系有关,可以证明由式(3-12)所确定的质心 C 点相对于一定质量分布的质点系是完全确定的.质心是质点系的物理量,它是由质点系的质量决定的,与其质量分布有关,是质点的位矢对质量的加权平均.式(3-11)中的 $\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}$ 是质心的运动速度,用 \boldsymbol{v}_C 表示,则

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_C \quad (3-13)$$

因此,可以把质点系的动量看成这样一个“质点”的动量,这个“质点”集中了质点系的全部质量并以质心速度运动.

四、质心运动定律

有了质心的概念,式(3-8)可以表达为

$$\boldsymbol{F}_{\text{外}} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m \frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt} = m\boldsymbol{a}_C \quad (3-14)$$

式中, \boldsymbol{a}_C 为质心加速度,作用在质点系上的合外力等于质点系质量 m 与质心加速度 \boldsymbol{a}_C 的乘积,这就是质心运动定律.从以上推导过程可以看出,质心运动定律就是质点系的动量定理的微分形式.

【例 3-4】 如图 3-4 所示,在水平光滑的轨道上有一辆小车,长为 l ,质量为 m_0 ,一个质量为 m 的人站在小车的右端,人和车都静止不动.现在,人从车的右端向左运动,问当人走到车的左端时,人和车相对地面各走了多少距离?

解: 选人和小车为系统,重力与轨道的支持力抵消,轨道是光滑的,所以系统所受外力的矢量和为零.因此,在人行走的过程中,由质心运动定律知质心的加速度为零.因为最初人和车都静止,所以质心静止.由此可知,在人走动过程中质心将始终保持静止不动.

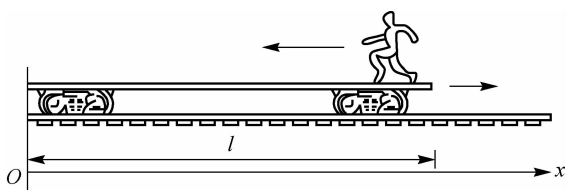


图 3-4 例 3-4 图

取车的左端为坐标原点,沿轨道作 Ox 轴. 为了方便起见,不妨把小车视为质量集中在小车的质心处的质点,设车的质心距离左端为 l_0 .

人站在车的右端开始运动时,系统质心的位置为

$$x_C = ml + m_0 l_0 \quad (1)$$

当人走到车的左端时,设车相对地面走了 x ,则人的末位置等于 x ,而车质心的位置为 $x + l_0$,因此系统质心的位置为

$$x'_C = mx + m_0(x + l_0) \quad (2)$$

因为质心静止不动,所以

$$x'_C = x$$

把式①、式②代入解得

$$x = \frac{ml}{m + m_0}$$

人相对地面走了

$$x' = -l + x = -\frac{m_0 l}{m + m_0}$$

负号表示人相对于地是向左运动的.

第三节 动量守恒定律

一、动量守恒定律的内容

由质点系的动量定理可以看出,合外力的冲量使系统的动量发生变化,当系统不受外力或外力的矢量和为零时,系统的总动量保持不变.

由式(3-9)可见,若 $F_{\text{外}} = 0$,则有

$$\sum_{i=1}^N m_i v_i - \sum_{i=1}^N m_i v_{i0} = 0$$

或

$$\sum_{i=1}^N m_i v_i = \sum_{i=1}^N m_i v_{i0} = \text{常矢量} \quad (3-15)$$

式(3-15)表明,如果系统所受外力的矢量和为零,那么系统的总动量保持不变,这就是动量守恒定律.

如果质点系由两个质点组成,那么动量守恒定律可表示为

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}_{10} + m_2\boldsymbol{v}_{20}$$

将上式移项,可得

$$m_1\boldsymbol{v}_1 - m_1\boldsymbol{v}_{10} = -(m_2\boldsymbol{v}_2 - m_2\boldsymbol{v}_{20})$$

上式表明,这两个质点的动量都有改变,但它们各自的动量增量大小相等,方向相反,即一个质点的动量增量恰好等于另一个质点的动量减少量,动量在两个质点之间进行了交换.所以,一般来说,当系统动量守恒时,系统内各质点的动量都可以发生变化,但这种变化只能是动量守恒系统内各个质点之间动量的交换,而系统内动量的交换是通过系统内各质点相互作用的内力实现的,系统中内力的作用可以使动量在系统内各个质点之间交换,但不改变系统的总动量,系统的总动量保持不变.

二、动量守恒定律的分量形式

动量守恒定律是一个矢量守恒式,在实际应用动量守恒定律时,常利用动量守恒定律的分量形式.在直角坐标系中,动量守恒定律的分量式如下:

当 $\sum F_{ix} = 0$ 时, $\sum m_i v_{ix} = p_x = \text{常量}$;

当 $\sum F_{iy} = 0$ 时, $\sum m_i v_{iy} = p_y = \text{常量}$;

当 $\sum F_{iz} = 0$ 时, $\sum m_i v_{iz} = p_z = \text{常量}$.

上式说明,若系统所受合外力不为零,但外力在某个方向上的代数和为零,则系统的总动量虽然不守恒,但在该方向上动量的分量守恒.

为了正确理解和应用动量守恒定律,需要注意以下几点:

- (1) 动量守恒定律成立的条件是系统所受的合外力等于零,即 $\boldsymbol{F}_{\text{外}} = 0$;
- (2) 若系统所受的合外力不为零,但在某一方向上外力分量的代数和等于零,则在该方向上动量的分量守恒;
- (3) 若系统所受的合外力不为零,但外力远小于内力,也可以近似认为动量守恒;
- (4) 动量守恒定律比牛顿运动定律更加普遍,是物理学最普遍、最基本的定律之一;
- (5) 动量守恒定律是由牛顿运动定律推导出来的,它只适用于惯性参考系.

虽然动量守恒定律是从牛顿运动定律出发推导出来的,但物理学的发展进入高速运动和微观粒子运动的领域之后,如大到天体间的相互作用,小到质子、中子、电子等基本粒子间的相互作用,动量守恒定律都适用;而在原子、原子核等微观领域中,牛顿运动定律却不适用了,因此,动量守恒定律比牛顿运动定律更加广泛.

应用动量守恒定律解决具体问题时,式中的动量都应是相对于同一惯性参考系的.应用动量守恒定律解决动力学问题时,可以不考虑系统在内力作用下的复杂变化,只需考虑变化前后系统的总动量,因此可以带来很大方便.所以,只要满足守恒条件,可以不必过问过程中系统内质点动量变化的细节,只需考虑过程始末状态系统总动量的关系,这是应用动量守恒定律求解问题比用牛顿运动定律优越的方面.

【例 3-5】 一小船质量为 140 kg,船头到船尾共长 4.0 m,静止于静水中.现有一质量为 60 kg 的人从船尾走到船头,船头将移动多少距离(假定水的阻力不计)?

解: 设人相对于地面的速度为 \boldsymbol{v} ,质量为 m ;船相对于地面的速度为 \boldsymbol{V} ,质量为 M .

第一篇 力学

确定人与船为一系统,选水平方向为 x 轴(见图 3-5). 据题意知,此系统至少在 x 轴方向不受外力作用,所以在 x 轴方向动量守恒,即

$$-mv + MV = 0$$

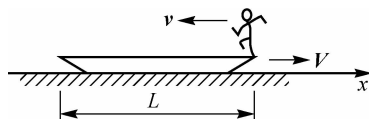


图 3-5 例 3-5 图

于是

$$v = \frac{MV}{m}$$

可求得人相对于船的速度大小为

$$u = v + V = \frac{(m+M)V}{m}$$

因为已知船长 L , 所以, 人从船尾走到船头共花时间

$$\Delta t = \frac{L}{u} = \frac{mL}{(m+M)V}$$

于是可求得船头移动距离为

$$x = V\Delta t = V \frac{mL}{(m+M)V} = \frac{mL}{m+M} = \frac{60 \times 4.0}{60+140} = 1.2 \text{ m}$$

本章提要

(1) 动量: $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$.

(2) 冲量: $\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt$.

(3) 质点的动量定理: $\mathbf{I} = \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$.

(4) 质点系的动量定理: $\int_{t_0}^t \mathbf{F}_{\text{外}} dt = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_{i0} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$.

(5) 质点系的动量定理的微分形式: $\mathbf{F}_{\text{外}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a}_c$ (质心运动定律).

(6) 动量守恒定律: $\mathbf{F}_{\text{外}} = 0$ 时, $\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_{i0} = \text{常矢量}$.

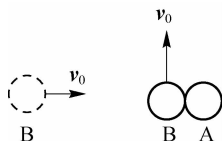
习 题

3-1 如题 3-1 图所示, 两个质量相同的小球, A 球静止, B 球沿水平方向以初速度 v_0 与 A 球碰撞, 碰撞后 B 球在垂直方向以 v_0 运动, 则 A 球的速度为 () (取水平方向、垂直方向的单位矢量为 \mathbf{i} 、 \mathbf{j}).

A. $v_0 i$

 B. $v_0 j$

 C. $v_0(i-j)$

 D. $v_0(i+j)$


题 3-1 图

3-2 把质量 $m=0.5 \text{ kg}$ 的物体以初速度 $v_0=6 \text{ m/s}$ 沿水平方向抛出,经过 0.8 s 后物体动量的增量为().(取 $g=10 \text{ m/s}^2$, 竖直向下的方向为 j)

 A. $3 \text{ kg} \cdot \text{m/s } i$

 B. $4 \text{ kg} \cdot \text{m/s } j$

 C. $3 \text{ kg} \cdot \text{m/s } i+4 \text{ kg} \cdot \text{m/s } j$

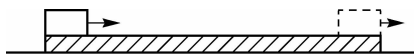
 D. $3 \text{ kg} \cdot \text{m/s } i-4 \text{ kg} \cdot \text{m/s } j$

3-3 如题 3-3 图所示,质量为 4.0 kg 的木板静止在光滑的水平面上,一个质量为 1.0 kg 的小滑块以 6.0 m/s 的初速度从木板的左端滑进,以 4.4 m/s 的速度从木板的右端滑出. 滑块滑出后木板的速度为().

 A. 0.40 m/s

 B. 0.32 m/s

 C. 2.60 m/s

 D. 2.10 m/s


题 3-3 图

3-4 一枪身质量 $m_1=6 \text{ kg}$ 的枪,射出质量 $m_2=0.05 \text{ kg}$ 、速率 $v=300 \text{ m/s}$ 的子弹.

(1) 计算枪身的反冲速度;

 (2) 该枪托在士兵的肩上,士兵用 0.05 s 的时间阻止枪身后退,计算枪身作用在士兵肩上的平均冲力.

3-5 如题 3-5 图所示,一质量为 0.30 kg 的小球,以 6.0 m/s 的速率与墙成 30° 角击中墙,然后以相同的速率和相同的角度反弹出. 设球与墙接触的时间为 $10 \times 10^{-3} \text{ s}$, 求:

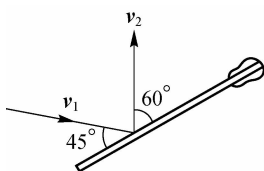
(1) 小球受到的冲量;

(2) 小球对墙所施的平均冲力.



题 3-5 图

3-6 如题 3-6 图所示,一质量为 $2.5 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 的乒乓球,以速率 $v_1=10 \text{ m/s}$ 飞来,用乒乓板推挡后,乒乓球又以 $v_2=20 \text{ m/s}$ 的速率飞出. 设推挡前后的运动方向与板的夹角分别为 45° 和 60° , 求推挡时乒乓球所受的冲量. 如果撞击的时间为 0.01 s , 求板施于乒乓球的平均冲力.

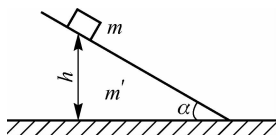


题 3-6 图

3-7 质量为 60 kg 的人以 8 km/h 的速度从后面跳上质量为 80 kg 、速度为 2.9 km/h 的小车,问:

- (1) 小车运动的速度变为多大?
- (2) 如果人迎面跳上小车,小车的速度变为多大?

3-8 如题 3-8 图所示,质量为 m 的木块静止于质量为 m' 的劈上,劈静止于水平桌面上,所有接触面均为光滑。今使木块从离桌面 h 高处沿劈面下滑,问当木块滑到劈的底端时,劈的速度为多大?



题 3-8 图

前面讨论了牛顿运动定律和动量定理. 牛顿运动定律给出了质点受力和它的运动状态变化之间的瞬时关系. 动量定理则从力的时间累积作用入手, 讨论冲量和动量. 本章将在前面内容的基础上, 从力的空间累积作用入手, 讨论功和能及它们之间的转换关系. 能量守恒定律是自然界最基本的定律之一, 从能量关系分析问题, 是物理学中的一种重要方法. 因此, 本章的内容对学习物理学是十分重要的.

第一节 功和功率

一、功

功是人类在长期的生产实践中逐渐形成的概念. 下面先讨论恒力做功的情形.

1. 恒力的功

如图 4-1 所示, 设一质点做直线运动, 在恒力 F 的作用下, 发生一段位移 Δr , 则恒力 F 所做的功 W 为

$$W = F |\Delta r| \cos \theta \quad (4-1)$$

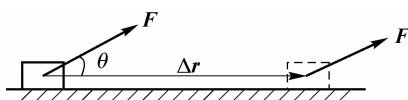


图 4-1 恒力做功图示

力做的功等于力的大小与位移沿力的方向的分量的乘积. 由此看出, 功是力的空间累积作用. 功也可以用力 F 与位移 Δr 的标积表示, 即

$$W = F \cdot \Delta r \quad (4-2)$$

功是一个标量, 但有正负之分, 功的正负由 F 与 Δr 之间的夹角 θ 决定. 在国际单位制中, 功的单位是牛顿·米 ($N \cdot m$).

2. 变力的功

式(4-2)为恒力做功的定义式, 但在一般情况下作用在物体上的力不一定是恒力, 质点也不一定做直线运动. 这时, 不能直接用式(4-2)来讨论变力的功, 那么如何计算变力的功呢?

设有一个质点, 在大小和方向都随时间变化的力 F 作用下, 沿任意曲线从 a 点运动到 b

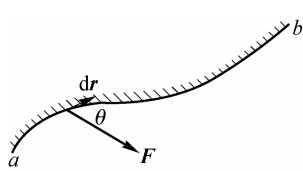


图 4-2 变力的功

点,如图 4-2 所示. 可以把整个曲线分成许多小段,任取一小段位移,称为位移元,用 dr 表示. 只要每段都足够短,就可以把这段路程近似看成直线,可以认为质点在 dr 这一段上移动的过程中,作用在它上面的力仍为恒力. 这样,对这段位移 dr 可按照式(4-2)计算力所做的元功为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{F}| \cdot |d\mathbf{r}| \cdot \cos \theta = F ds \cos \theta \quad (4-3)$$

式中, $|d\mathbf{r}| = ds$, ds 是与 $|d\mathbf{r}|$ 相对应的路程元.

那么,在质点由位置 a 沿曲线路径运动到位置 b 的整个过程中,力 \mathbf{F} 做的总功应当是各级位移元上的元功之和. 当 dr 无限小时,总功就是对元功的积分,即

$$W = \int dW = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F ds \cos \theta \quad (4-4)$$

式(4-4)称为变力做功的表达式.

在直角坐标系中,变力做功可表示为

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F_x dx + \int_a^b F_y dy + \int_a^b F_z dz$$

功的计算是积分运算,功的几何意义为 $\mathbf{F}-r$ 图中曲线下所包围的面积,如图 4-3 所示.

如果一个质点同时受到几个力的作用,设质点所受的各力分别为 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$,沿任一路径由 a 运动到 b 时,合力为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F}_i$$

则合力的功为

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_a^b \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_a^b \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{r}$$

所以

$$W = W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

由上式可知,合力的功等于每个分力功的代数和.

二、一对相互作用的力的功

如果研究对象是由若干质点构成的质点系,可以把作用在这些质点上的力分为内力和外力,根据牛顿第三定律,内力总是成对出现的. 那么,在质点系范围内考察,这些成对出现的内力所做的功具有怎样的特征? 是不是也和内力的冲量一样,一定等于零呢?

设有两个质点 m_1 和 m_2 相互作用,把它们看成一个系统,若 m_1 受到 m_2 的作用力是 \mathbf{f}_1 ,发生的位移为 $d\mathbf{r}_1$; m_2 受到 m_1 的作用力是 \mathbf{f}_2 ,发生的位移为 $d\mathbf{r}_2$,则这一对相互作用的内力的功为

$$dW = dW_1 + dW_2$$

因为

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2$$

所以

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 - \mathbf{f}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 \\ &= \mathbf{f}_1 \cdot (d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2) = \mathbf{f}_2 \cdot d\mathbf{r}_{12} \end{aligned} \quad (4-5)$$

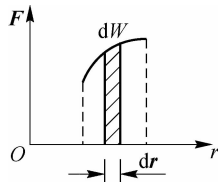


图 4-3 变力做功图

在式(4-5)中, $d\mathbf{r}_{12}$ 是 m_1 相对于 m_2 的位移, 此相对位移与参考系的选择无关. 由式(4-5)分析可知, 系统内的质点没有相对位移时, 一对相互作用力的功等于零; 若系统内质点间有相对位移, 但是相互作用力与相对位移垂直, 则一对相互作用力的功也为零, 除此之外, 一对相互作用力的功不等于零.

可见, 一对相互作用力所做的功只与作用力及相对位移有关, 而与各个质点各自的运动无关. 这说明, 任何一对相互作用力所做的功具有与参考系选择无关的不变性质, 只要是一对作用力和反作用力, 无论从什么参考系去计算, 其做功的结果都一样, 这是个很重要的性质. 例如, 若把人体看成一个质点系, 一举手、一投足, 都使构成人体的质点有了相对位移, 而在这些相对位移发生的同时, 人体各部分之间的内力都做了功, 从而消耗了存储于身体的能量, 转换为人体运动的机械能和热能等.

三、功率

在实际问题中, 不仅要知道做功的大小, 而且要知道做功的快慢. 单位时间内所做的功称为**功率**, 用 P 表示, 则有

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (4-6)$$

由式(4-3)得

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (4-7)$$

即力对质点的瞬时功率等于作用力与质点在该时刻速度的标积.

在国际单位制中, 功率的单位是瓦特(W).

【例 4-1】 质量为 2 kg 的物体由静止出发沿直线运动, 作用在物体上的力为 $F = 6t$ (SI). 试求在开始 2 s 内, 此力对物体所做的功.

解: 由题意可知, 这是变力做功问题, 由于是做直线运动, 因此在 dt 时间内变力 \mathbf{F} 对质点所做的元功为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 6t dx$$

要求在开始 2 s 内的总功必须对上式进行积分. 显然需把上式的积分变量统一, 由牛顿第二定律可得质点做直线运动的加速度为

$$a_x = \frac{F}{m} = \frac{6t}{2} = 3t$$

由 $a_x = dv_x/dt$ 可得

$$dv_x = a_x dt = 3t dt$$

对上式积分

$$\int_0^{v_x} dv_x = \int_0^t 3t dt$$

得

$$v_x = \frac{3}{2} t^2$$

又由 $v_x = dx/dt$ 得

$$dx = v_x dt = \frac{3}{2} t^2 dt$$

第一篇 力学

将上式代入元功表达式,得

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 6t dx = 9t^3 dt$$

则开始 2 s 内的总功为

$$W = \int dW = \int_0^2 9t^3 dt = 36.0 \text{ J}$$

【例 4-2】 如图 4-4 所示,一根轻绳跨过滑轮系在质量为 1.0 kg 的物体上,物体最初静止在光滑的水平面上,用一大小为 5 N、方向竖直向下的恒力作用在绳的另一端,使物体向右做加速运动.当系在物体上的绳与水平面的夹角由 30° 变为 37° 时,力对物体所做的功是多少? 已知滑轮顶点与水平面之间的距离 $h=1.0 \text{ m}$ (滑轮质量可以忽略).

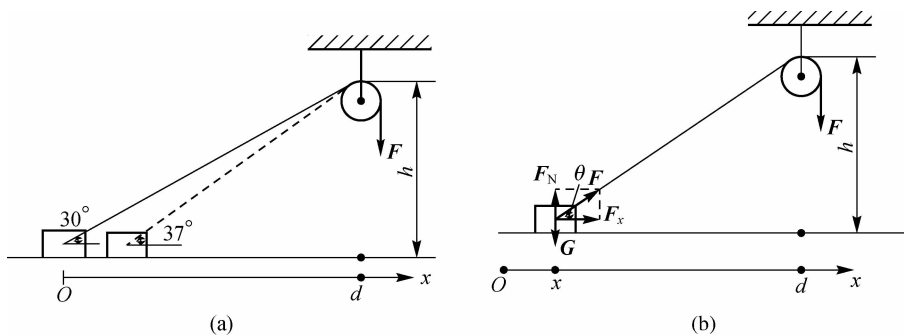


图 4-4 例 4-2 图

解:取物体为研究对象,它受三个作用力:重力 G 、绳的拉力 F 和地面支持力 F_N ,如图 4-4(b)所示.取物体初位置(绳与水平面的夹角为 30°)为坐标原点 O ,作水平向右的 x 轴.

物体处于位置 x 时,绳与 x 轴的夹角为 θ ,绳作用在物体上的拉力 F 在物体位移方向上的分量为

$$F_x = F \cos \theta$$

可见,绳的拉力对物体所做的功是变力做功问题,需要用积分方法进行计算.

由图 4-4(b)可知

$$\cos \theta = \frac{d-x}{\sqrt{h^2 + (d-x)^2}}$$

d 为物体开始运动时与滑轮正下方的距离.

物体运动时,拉力 F 的元功为

$$dW = F_x dx = \frac{F(d-x)dx}{\sqrt{h^2 + (d-x)^2}} = -\frac{F(d-x)d(d-x)}{\sqrt{h^2 + (d-x)^2}}$$

物体运动过程中拉力的总功为

$$\begin{aligned} W &= \int dW = \int_d^{x'} -\frac{F[d-x]d(d-x)}{\sqrt{h^2 + (d-x)^2}} \\ &= \int_{x'}^d \frac{F(d-x)d(d-x)}{\sqrt{h^2 + (d-x)^2}} = F(\sqrt{h^2 + d^2} - \sqrt{h^2 + x'^2}) \end{aligned}$$

按题意得

$$d = \frac{h}{\tan 30^\circ}, x' = \frac{h}{\tan 37^\circ}$$

把 $h=1.0 \text{ m}$ 代入上式得

$$d = \frac{1.0}{\tan 30^\circ} = 1.73 \text{ m}$$

$$x' = \frac{1.0}{\tan 37^\circ} = 1.33 \text{ m}$$

把已知数据代入,得拉力的功为

$$\begin{aligned} W &= 5 \times (\sqrt{1^2 + 1.73^2} - \sqrt{1^2 + 1.33^2}) \\ &= 1.67 \text{ J} \end{aligned}$$

第二节 动能 动能定理

一、质点的动能定理

由前面的学习可知,力的时间累积效应,即冲量引起了质点的动量变化.那么,力的空间累积效应,即做功将产生怎样的效果呢?

设质量为 m 的质点在合外力 \mathbf{F} 的持续作用下从 a 点运动到 b 点,如图 4-5 所示.同时,它的速度从 v_0 变为 v ,则当质点产生位移元 $d\mathbf{r}$ 时,相应地,合外力所做的元功为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

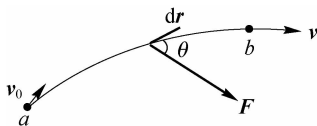


图 4-5 质点的动能定理

则质点在从 a 点运动到 b 点的过程中,合外力 \mathbf{F} 做的总功为

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{v_0}^v d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (4-8)$$

在式(4-8)中, $\frac{1}{2}mv^2$ 就是动能 E_k ,它是质点由于运动而具有的能量,式(4-8)可改写为

$$W = E_k - E_{k0} \quad (4-9)$$

式(4-9)说明,合外力对质点所做的功等于质点动能的增量,这个结论称为质点的动能定理.

(1)质点的动能定理适用于质点的任何运动过程.物体在合外力的持续作用下,在某一段路程中,不管力是恒力还是变力,也不管物体运动状态的变化情况如何复杂,合外力对物体做的功总是等于质点动能的增量;如果知道了物体动能的变化,就得合外力所做的功等于质点的末动能与初动能之差.这样,动能定理就可以用于讨论一个过程中力对质点做的功与质点始末状态的动能之间的关系,而无须详细分析过程中的细节,这对于解决某些力学问题比直接应用牛顿运动定律要方便得多.

以上分析也说明一个重要概念,功不是与动能 E_k 相联系,而是与动能的增量 ΔE_k 相联系的.物体动能的变化是通过做功的过程来实现的,动能是描述物体运动状态的量,而功则是一个与状态变化过程相联系的过程量.

(2)对于一个质量为 m 、以速度 \mathbf{v} 运动的质点,可以用两个物理量来描述它,一个是动量,另一个是动能.这两个量都是由物体的质量和速度决定的,它们也都是运动状态的函数,但是它们的物理意义不同.

动量是矢量,不但有大小,而且有方向,这是机械运动的性质;动能是标量,而且永远为正,它是能量的一种形式,能量并不限于机械运动.除了动能外,还有其他各种形式的能量,如电能、热能、光能、原子能等.动能与这些能量是可以相互转化的.

另外,与动量变化相联系的是力的冲量,冲量是力的时间累积作用,其效果是使物体的动量发生变化.而与动能变化相联系的是力所做的功,功是力的空间累积作用,其效果是使物体的动能发生变化.这两个物理量各自遵从一定的规律,它们是从不同侧面来描写物体机械运动的物理量.

当然,动量和动能还是有联系的,动量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$,动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.因为它们都是物体运动状态的函数,所以,不难看出,这两个物理量在数量上的关系为

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

动量和动能还具有共同的特征,力的冲量与经历的时间有关,但是由它所造成的动量改变却仅由物体的始末状态决定;同样地,力做的功与物体经历的空间有关,但是由功所造成的动能的改变也仅由物体的始末状态决定.

(3)由于动能定理是从牛顿运动定律导出的,因此动能定理只在惯性参考系中才成立.

二、质点系的动能定理

质点系由很多质点组成,对其中每个质点应用动能定理,就可以得出质点系的动能定理.

为简单起见,先研究由两个相互作用的质点 m_1 和 m_2 组成的质点系,如图 4-6 所示.设 \mathbf{F}_1 和 \mathbf{F}_2 分别表示作用于 m_1 和 m_2 的合外力, \mathbf{f}_{12} 和 \mathbf{f}_{21} 分别表示两质点的相互作用内力,这两个内力对每个质点而言仍属外力,对每个质点应用动能定理.

$$(1) \text{对 } m_1: \int_{a_1}^{b_1} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{a_1}^{b_1} \mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_1 v_{10}^2.$$

$$(2) \text{对 } m_2: \int_{a_2}^{b_2} \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \int_{a_2}^{b_2} \mathbf{f}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}m_2 v_{20}^2.$$

两式相加,可得

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{b_1} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{a_2}^{b_2} \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 + \int_{a_1}^{b_1} \mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{a_2}^{b_2} \mathbf{f}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2 \\ &= \left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{20}^2 \right) \end{aligned}$$

在上式中,令 $\mathbf{W}_{\text{外}} = \int_{a_1}^{b_1} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{a_2}^{b_2} \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2$, 表示外力对质点系所做的功之和;令 $\mathbf{W}_{\text{内}} =$

$\int_{a_1}^{b_1} \mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{a_2}^{b_2} \mathbf{f}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2$, 表示质点系内力所做功之和; 令 $E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$, $E_{k0} = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2$, 分别表示质点系的末状态和初状态的动能, 这样就有

$$W_{\text{外}} + W_{\text{内}} = E_k - E_{k0} \quad (4-10)$$

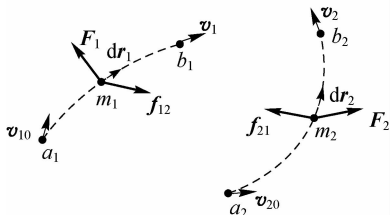


图 4-6 质点系的动能定理图示

如果把质点系从两个质点扩大为 n 个质点, 式(4-10)依然成立. 这说明, 一切外力对质点系做的功和一切内力对质点系做的功之和等于质点系动能的增量, 这个结论称为质点系的动能定理.

在式(4-10)中, $W_{\text{内}} = \int_{a_1}^{b_1} \mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{a_2}^{b_2} \mathbf{f}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2$, 尽管根据牛顿第三定律有 $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$, 但是, 因为系统内各质点的位移元一般不相同, 即 $d\mathbf{r}_1 \neq d\mathbf{r}_2$, 所以系统内力做功的代数和并不一定为零, 即 $W_{\text{内}} \neq 0$, 因而可以改变系统的总动能. 比较质点系的动能定理和上一章讨论的质点系的动量定理, 可以看到, 系统动量的改变仅仅决定于系统所受的外力, 而系统动能的变化不仅与外力有关, 而且与内力有关. 例如, 地雷爆炸后, 弹片向四面八方飞散, 它们的总动能显然比爆炸前增加了. 在这里, 火药的爆炸力也就是内力对各个弹片做了正功. 因此, 内力能够改变系统的总动能, 但不能改变系统的总动量.

第三节 保守力 势能

一、保守力的功

无论什么性质的力做功, 均会引起物体动能的变化, 但进一步研究发现, 不同性质的力所做的功有不同的特点, 因此根据做功的特点, 可以把作用力分为保守力和非保守力.

1. 重力的功

设一个质量为 m 的物体, 在重力作用下, 从 a 点沿任意路径 acb 运动到 b 点, a 点和 b 点距地面的高度分别为 y_1 和 y_2 , 如图 4-7 所示, 把曲线 acb 分成许多位移元 $d\mathbf{r}$ 中, 重力所做的元功为

$$dW = \mathbf{mg} \cdot d\mathbf{r} = mg |d\mathbf{r}| \cos \theta = mg dr \cos \theta = -mg dy$$

式中, θ 为 \mathbf{mg} 与 $d\mathbf{r}$ 的夹角, 所以 $dr \cos \theta = -dy$. 那么, 质点由 a 点到 b 点, 重力做的总功为

$$W = \int dW = \int_{y_1}^{y_2} -mg dy = -(mgy_2 - mgy_1) \quad (4-11)$$

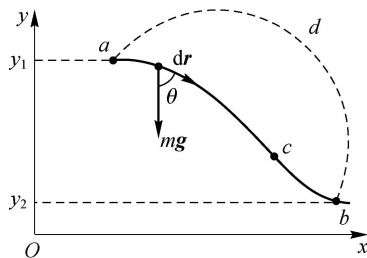


图 4-7 重力的功

第一篇 力学

不论质点从 $a \rightarrow c \rightarrow b$ 还是从 $a \rightarrow d \rightarrow b$, 或者其他路径, 只要始末位置不变, 重力做的功都是上述结果. 这就说明重力所做的功与路径无关, 只与始末位置有关.

同重力一样, 若某种力做的功与路径无关, 只与始末位置有关, 则这种力称为保守力, 不具有这种特性的力称为非保守力或耗散力. 因此, 重力属于保守力.

若某一个力 \mathbf{F} 为保守力, 则它沿任一闭合路径的功可表示为

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (4-12)$$

式中, 符号 \oint 表示沿闭合曲线的积分, 即质点沿任一闭合路径绕行一周, 保守力对其所做的功恒为零.

如果力所做的功与路径有关, 或沿闭合路径的功不为零, 即不满足式(4-12)的力, 称为非保守力. 例如, 摩擦力所做的功与路径有关. 当把放在地面上的物体从一处拉到另一处时, 若经历的路径不同, 则摩擦力所做的功不同. 因此, 摩擦力属于非保守力.

2. 弹性力的功

将劲度系数为 k 的轻弹簧一端固定, 另一端与一质量为 m 的物体相连, 当弹簧在水平方向不受外力作用时, 它将不发生形变, 此时, 物体位于 O 点, 即 $x=0$ 处, 这一位置为平衡位置, 如图 4-8 所示.



图 4-8 弹性力做功图示

当弹簧被拉伸或压缩时, 物体将受到弹簧所产生的弹性力的作用, 根据胡克定律可表示为

$$F = -kx$$

负号表示弹性力的方向总是指向原点 O . 在物体由位置 a 运动到位置 b 的过程中, 弹性力为变力, 但弹簧伸长 dx 时的弹性力可近似看成不变的. 于是, 物体发生位移 dx 时, 弹性力做的元功为

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = -kx dx$$

那么, 在物体由 a 运动到 b 的整个过程中, 弹性力做的总功为

$$W = \int dW = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) \quad (4-13)$$

式(4-13)说明, 弹簧的弹性力所做的功只与弹簧的始末位置有关, 而与弹簧形变的过程无关. 因此, 弹性力也是保守力.

3. 万有引力的功

人造地球卫星运动时受到地球对它的万有引力, 太阳系的行星运动时受到太阳的万有引力, 这类问题可归结为运动质点受到来自另一个固定质点的万有引力作用, 现在来计算万有引力对运动质点所做的功.

如图 4-9 所示, 设有两个质量分别为 M 和 m 的质点, 假定质点 M 固定不动, m 在万有引力作用下由 a 点沿任意路径 acb 运动到 b 点, m 相对于固定质点 M 的位矢为 \mathbf{r} , \mathbf{e}_r 为沿位矢 \mathbf{r} 的单位矢量, a 、 b 两点相对 M 的位矢分别为 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 . 在质点运动过程中, 它所受到的万有引力的大小和方向都在改变, 当 m 沿路径移动位移元 $d\mathbf{r}$ 时, 万有引力做的元功为

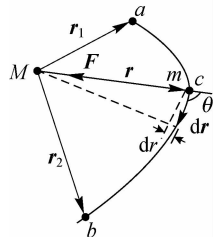


图 4-9 万有引力做功图示

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} = -G \frac{mM}{r^2} |d\mathbf{r}| \cos \theta$$

因为

$$|d\mathbf{r}| \cos \theta = dr$$

所以

$$dW = -G \frac{mM}{r^2} dr$$

在质点 m 由 a 点运动到 b 点的过程中, 万有引力所做的总功为

$$W = \int_{r_1}^{r_2} dW = \int_{r_1}^{r_2} -G \frac{mM}{r^2} dr = -GmM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

即

$$W = - \left[\left(-G \frac{mM}{r_2} \right) - \left(-G \frac{mM}{r_1} \right) \right] \quad (4-14)$$

式(4-14)表明, 万有引力做功同样与质点的运动路径无关, 只取决于物体的始末位置. 因此, 万有引力也属于保守力.

二、势能

动能是机械运动形式中能量的一种, 它由运动的状态决定. 与位置有关的另一种机械运动的能量是势能. 前面已讨论, 重力、弹性力和万有引力都具有做功与路径无关, 而仅取决于质点始末位置的特点, 从这一特点出发分别引出重力势能、弹性势能和万有引力势能的概念.

势能是由物体之间的相互作用和相对位置决定的能量.

前面已经讨论过, 有关重力做功、弹性力做功和万有引力做功的公式分别为

$$\begin{aligned} W_{\text{重}} &= -(mgy_2 - mgy_1) \\ W_{\text{弹}} &= - \left(\frac{1}{2} kx_2^2 - \frac{1}{2} kx_1^2 \right) \\ W_{\text{引}} &= - \left[\left(-G \frac{mM}{r_2} \right) - \left(-G \frac{mM}{r_1} \right) \right] \end{aligned}$$

上面三个式子表明了保守力做功的特点, 它们等号的右边有着相似的形式, 都是两个与位置有关的函数之差, 可以共同地写成

$$W_{\text{保}} = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p \quad (4-15)$$

式中, E_p 是一个与位置有关的函数, 称为**势能**; E_{p1} 和 E_{p2} 分别是物体在始位置和末位置的势能. 式(4-15)表明, 保守力对物体做的功等于势能增量的负值. 保守力做正功, 势能减少; 保守力做负功, 势能增加. 不同的保守力, 各自势能的函数形式不同.

式(4-15)定义了两个位置的势能之差与保守力做功的关系. 如果选定质点在某一位置的势能为零, 即 $E_{p2} = 0$, 那么三个保守力对应的势能形式分别如下:

$$(1) \text{重力势能} \quad E_p = mgy \quad (4-16)$$

此式是选取某一位置为势能零点, 质点相对于势能零点的高度为 y 时的重力势能.

$$(2) \text{弹性势能} \quad E_p = \frac{1}{2} kx^2 \quad (4-17)$$

此式是选取弹簧自然长度时的位置为势能零点, 弹簧发生形变 x 时的弹性势能.

$$(3) \text{ 万有引力势能} \quad E_p = -G \frac{Mm}{r} \quad (4-18)$$

此式是选取无限远为势能零点, 物体 m 与 M 相距 r 时的引力势能.

势能是一个标量, 单位是焦耳(J).

由于势能的概念反映了保守力做功与路径无关的特性, 因此只能对保守力引入势能, 对非保守力不能引入势能.

为了正确理解势能的概念, 需说明以下几点:

(1) 势能是状态的函数. 我们知道, 质点在某时刻的位置及速度表示该时刻质点的运动状态, 而势能只与位置有关. 因此, 势能是状态的函数, 即

$$E_p = E_p(x, y, z)$$

(2) 势能的物理意义. 在保守力做功的过程中, 只要质点的始末位置确定了, 保守力做的功就确定了. 如果质点长期处于保守力场中的某个位置, 那么, 势能便会长期保持恒定. 可见势能是一种可以长期储存的能量. 如果保守力做正功, 说明势能减少, 表明保守力做功是以势能的减少为代价的; 如果保守力做负功, 说明势能增加, 表明外力做正功并以势能的形式储存了起来.

(3) 势能具有相对性. 势能的数值与势能零点的选取有关, 在式(4-16)~式(4-18)中, 势能的公式就已经事先选定了势能零点. 实际上, 势能零点可以任意选取, 但选取不同的势能零点, 势能的值将有所不同. 所以, 势能具有相对意义. 但是, 不论势能零点的位置如何选取, 任意两个给定位置的势能之差都是一定的, 与势能零点的选择无关.

(4) 势能属于系统. 势能是由于系统内各物体间具有保守力作用而产生的. 因此, 它属于系统的, 单独谈单个物体的势能是没有意义的. 例如, 由 $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ 可知, 弹性势能是由物体间的形变决定的. 所以, 弹性势能不属于某一个质点, 而属于由保守力相互作用的质点所组成的系统的能量.

【例 4-3】 有一种说法认为地球上的一次灾难性物种(如恐龙)绝灭是由于 6 500 万年前一颗大的小行星撞入地球引起的. 设小行星的半径为 10 km, 密度为 $6.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 它撞入地球时将释放多少引力势能? 这能量是唐山地震估计能量(唐山地震释放的能量约为 10^{18} J)的多少倍?

解: 设地球的质量为 M , 小行星的质量为 m , 地球的半径为 R , 小行星的半径为 r , 小行星的运行轨道半径为 R' , 则小行星落到地面上所释放的能量为

$$\Delta E = \left(-\frac{GMm}{R'} \right) - \left(-\frac{GMm}{R} \right)$$

由于小行星运行的轨道半径 R' 比地球半径 R 大得多, 因此有

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{GMm}{R} = \frac{GM}{R} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \\ &= \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24} \times 4 \times \pi \times (10^4)^3 \times 6.0 \times 10^3}{6\,400 \times 10^3 \times 3} \\ &= 1.6 \times 10^{24} \text{ J} \end{aligned}$$

此能量约为唐山地震释放能量的 1.6×10^6 倍.

第四节 功能原理 机械能守恒定律

一、功能原理

前节已经得出了质点系的动能定理公式,即

$$W_{\text{外}} + W_{\text{内}} = E_{\text{k}} - E_{\text{k}0}$$

现在,对质点系的动能定理做进一步讨论, $W_{\text{外}}$ 表示系统的外力对各物体做功之和, $W_{\text{内}}$ 表示系统的内力对各物体做功之和.而 E_{k} 和 $E_{\text{k}0}$ 分别表示系统末状态和始状态的总动能.而对于 $W_{\text{内}}$,在系统的内力中可能既有保守力又有非保守力.因此,内力的功 $W_{\text{内}}$ 可以写成保守内力的功 $W_{\text{保内}}$ 和非保守内力的功 $W_{\text{非保内}}$ 之和.于是有

$$W_{\text{内}} = W_{\text{保内}} + W_{\text{非保内}}$$

那么,质点系的动能定理公式可以改写为

$$W_{\text{外}} + W_{\text{保内}} + W_{\text{非保内}} = E_{\text{k}} - E_{\text{k}0} \quad (4-19)$$

根据保守力做功的特点,人们定义了势能的概念,即

$$W_{\text{保内}} = -\Delta E_{\text{p}} = E_{\text{p}0} - E_{\text{p}}$$

将 $W_{\text{保内}} = -\Delta E_{\text{p}} = E_{\text{p}0} - E_{\text{p}}$ 代入式(4-19)中,可得

$$W_{\text{外}} + (E_{\text{p}0} - E_{\text{p}}) + W_{\text{非保内}} = E_{\text{k}} - E_{\text{k}0}$$

移项整理后,得

$$W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = (E_{\text{k}} + E_{\text{p}}) - (E_{\text{k}0} + E_{\text{p}0}) \quad (4-20)$$

人们把系统的动能与势能之和称为系统的机械能,用符号 E 表示,则

$$E = E_{\text{k}} + E_{\text{p}} \quad (4-21)$$

用 E_0 和 E 分别表示系统在初、末两个状态时的机械能,则式(4-20)可表示为

$$W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = E - E_0 \quad (4-22)$$

式(4-22)表明,质点系在运动过程中,它所受的所有外力与系统内非保守力做功的代数和等于系统机械能的增量.这一结论称为**质点系的功能原理**.功能原理指出:外力和非保守内力做功的代数和等于系统机械能的增量.这就全面概括了力学中的功能关系.因为它把力学中所有类型的力的功和所有类型的能量都考虑到了.为了进一步理解功能原理的物理定义,需说明以下几个问题:

(1)功能原理表明,外力和系统的非保守力做功都可以引起系统机械能的变化.外力对系统做功是外界物体的能量与系统的机械能之间的传递或转化,外力做正功时,有能量由外界传入系统,使系统的机械能增加;外力做负功时,外界从系统吸收能量,使系统的机械能减少.而系统内非保守力做功则反映了系统内部机械能与其他形式能量的转化.非保守内力做正功时,其他形式的能量转化为机械能;非保守内力做负功时,机械能转化为其他形式的能量.因此,非保守力做功意味着发生了机械能与其他形式能量的转化过程.例如,用升降机提升重物,重物由静止开始上升到某高度并且具有了一定的机械能.若将地球和重物看成一个质点系,则系统机械能的增加是升降机对系统做正功的结果.又如,若将电动机的定子和转子看成一个质点系,通电后,转子从静止转动起来,系统的机械能增加,这是电动机内的电流产生磁场力(属于非保守内力)做正功的结果;断电后,电动机的转子慢慢停止转动,系统的

机械能减少,这是摩擦力(非保守内力)做了负功的结果.

(2)功能原理是在质点系的动能定理中引入势能而得出的.因此,它们的物理本质是一致的,功能原理和质点系的动能定理都给出了系统的能量改变与功的关系.它们的区别在于从不同的角度来处理保守内力.质点系的动能定理反映的是动能的变化与功的关系,应当把所有力的功都计算在内,包括保守内力,强调了保守内力做功引起系统动能的变化;功能原理反映的是机械能的变化与功的关系,保守内力的作用体现在势能的变化中.保守内力的功通过势能的变化表现了出来.因此,只有外力和非保守内力才会改变系统的机械能.所以,应用功能原理解决问题时,只需要考虑除保守内力之外其他力的功.

(3)功能原理和质点系的动能定理一样,在惯性参考系中才成立.

【例 4-4】 一链条总长为 l , 质量为 m , 放在桌面上, 并使其下垂到桌面一侧的长度为 a ($a > \frac{\mu}{\mu+1}l$), 如图 4-10 所示. 设链条与桌面之间的滑动摩擦系数为 μ , 令链条由静止开始运动, 设链条质量均匀分布, 问:

- ①链条从开始运动到链条全部离开桌面的过程中, 摩擦力做了多少功?
- ②链条离开桌面时的速率是多少?

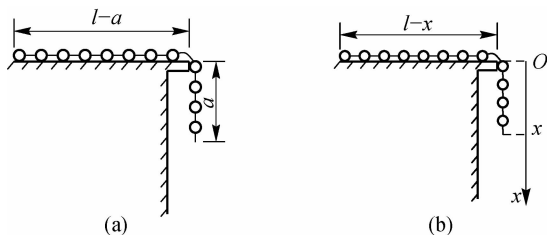


图 4-10 例 4-4 图

解: 链条在下落过程中, 由于在桌面上发生长度的变化, 因而受到的摩擦力发生变化, 所以摩擦力做功为变力做功, 而从开始到链条离开桌面, 可由功能原理求得离开桌面的动能, 从而求得速率.

①建立坐标系如图 4-10 所示, 设任意时刻链条下垂的长度为 x , 则摩擦力的大小为

$$f = \mu \frac{m}{l} (l-x) g$$

摩擦力的方向与位移方向相反, 故整个过程中摩擦力做功为

$$W_f = \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^l f \cos 180^\circ dx = \int_a^l -\mu \frac{m}{l} (l-x) g dx = -\frac{\mu mg}{2l} (l-a)^2 \quad ①$$

②以链条和地球作为系统, 取坐标原点为重力势能的零点, 设链条离开桌面时的速率为 v , 应用功能原理得

$$W_f = (E_k + E_p) - (E_{k0} + E_{p0}) \quad ②$$

其中,

$$E_{k0} = 0 \quad ③$$

$$E_{p0} = -\frac{m}{l} a g \frac{a}{2} = -\frac{mga^2}{2l} \quad ④$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad ⑤$$

$$E_p = -mg \frac{l}{2} \quad (6)$$

将式①、式③、式④、式⑤和式⑥代入式②得

$$-\frac{\mu mg}{2l}(l-a)^2 = -mg \frac{l}{2} + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{mga^2}{2l}$$

链条离开桌面时的速率为

$$v = \sqrt{\frac{[l^2 - a^2 - \mu(l-a)^2]g}{l}}$$

二、机械能守恒定律

由功能原理 $W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = E - E_0$ 可以看出,一个系统的机械能可以通过外力对系统做功而发生变化,也可以通过系统的非保守内力做功而发生变化,即

若 $W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} > 0$, 系统的机械能增加;

若 $W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} < 0$, 系统的机械能减少.

那么,当 $W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = 0$, 也就是说,在外力和非保守内力都不做功或两者做的总功等于零,即只有保守力做功的情况下,有

$$E = E_0 = \text{常量} \quad (4-23)$$

或者

$$E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0} = \text{常量}$$

上式表明,在外力和非保守内力都不做功或所做功的代数和为零的情况下,系统动能和势能之和保持不变,即系统的机械能保持恒定,这个结论称为**机械能守恒定律**.

机械能守恒定律还有进一步的物理意义,如果将式 $E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0}$ 改写为

$$E_k - E_{k0} = E_{p0} - E_p$$

即

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

上式表明,在机械能守恒的情况下,系统动能的增加量等于势能的减少量,即系统内各物体的动能和势能相互转换,但是这种能量转换是通过保守力做功来实现的.

应用机械能守恒定律解决相关问题时,应注意要满足的条件,即只有保守力做功或者 $W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = 0$.

在机械运动范围内,所涉及的能量只有动能和势能.由于物体运动形式的多样性,人们还将遇到其他形式的能量,如热能、电磁能、化学能、原子能等.若系统内有非保守力做功,则系统的机械能必将发生变化,但在机械能增加或减少的同时,必然有等值的其他形式的能量在减少或增加.在总结各种自然过程中,得出一个更为普遍的**能量守恒定律**:能量既不能消灭,也不能创生,它只能从一个物体传递给另一个物体,或从物体的一部分传递给另一部分,由一种形式转化为另一种形式,但总的能量保持不变.

机械能守恒定律是能量守恒定律的一个特例,它是由牛顿运动定律推导出来的,只适用于惯性系.

【例 4-5】 如图 4-11 所示,一根细线悬挂着质量为 m 的小球,线的长度为 l ,所能承受的最大张力为 $F_T = 1.5mg$. 现将线拉直至水平位置后放手,求细线与水平线夹角 θ 为何值时,

第一篇 力学

细线裂断(细线不可伸长、各种阻力不计)?

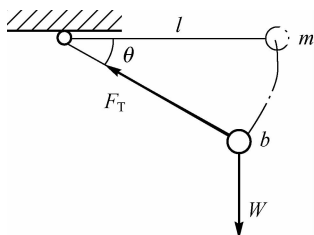


图 4-11 例 4-5 图

解: 设小球摆至位置 b 处, 细线断了, 小球此时的速度大小为 v , 选取 b 处为重力势能零点. 以小球与地球为系统, 绳子对小球的拉力 F_T 是系统的外力, 由于它在小球运动过程中处处垂直于小球的轨迹, 因此不做功, 即 $W_{\text{外}}=0$, 又据题意, 不计各种阻力, 则 $W_{\text{非保内}}=0$, 因而系统机械能守恒, 即在水平位置时系统的重力势能为 $mgl\sin\theta$, 在 b 点处系统的动能为 $\frac{1}{2}mv^2$, 则按机械能守恒定律的表达式, 有

$$0 + mgl\sin\theta = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

又在 b 点处对小球列出牛顿第二定律的法向分量式, 即

$$F_T - mg\sin\theta = m\frac{v^2}{l}$$

考虑到此时 $F_T = 1.5mg$, 则联立上述两式, 可求得

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

即

$$\theta = 30^\circ$$

【例 4-6】 以初速度 $v_0 = 5 \text{ km/s}$ 由地面垂直向上发射一物体, 若不计空气阻力, 此物体能上升的最大高度是多少(已知地球半径 $R = 6370 \text{ km}$, 地球质量 $M = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$)?

解: 选取物体与地球为系统, 设地球和物体的质量分别为 M 和 m . 据题意可知, 此系统在物体上升过程中, $W_{\text{外}}=0$, $W_{\text{非保内}}=0$, 故系统的机械能守恒. 若取无穷远处引力势能为零, 则有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R} = 0 - G\frac{Mm}{R+h}$$

可得

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2Gm}} - R \\ &= \frac{1}{\frac{1}{6.37 \times 10^6} - \frac{(5 \times 10^3)^2}{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}} - 6.37 \times 10^6 \\ &= 1.57 \times 10^6 \text{ m} = 1.57 \times 10^3 \text{ km} \end{aligned}$$

由此可见, 物体上升高度 h 与地球半径 R 是同一数量级. 所以本题不能用重力势能解

题,因为在从引力势能推导到重力势能时用了近似公式 $(R+h_a)(R+h_b)\approx R^2$,在本题,此近似公式不成立.

本章提要

1. 功

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{F}| \cdot |d\mathbf{r}| \cdot \cos \theta = F ds \cos \theta$$

$$W = \int dW = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F ds \cos \theta$$

2. 动能

$$\text{质点的动能: } E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

$$\text{质点的动能定理: } W = E_k - E_{k0}.$$

$$\text{质点系的动能定理: } W_{\text{外}} + W_{\text{内}} = E_k - E_{k0}.$$

3. 功能原理

$$W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = E - E_0$$

4. 保守力

$$\text{保守力的功: } \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

5. 势能

$$W_{\text{保}} = -\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2}$$

$$\text{重力势能: } E_p = mgy \text{ (以 } y=0 \text{ 处为势能零点).}$$

$$\text{弹性势能: } E_p = \frac{1}{2}kx^2 \text{ (以弹簧原长为势能零点).}$$

$$\text{引力势能: } E_p = -G\frac{Mm}{r} \text{ (以 } r \rightarrow \infty \text{ 为势能零点).}$$

6. 机械能守恒定律

只有保守力做功或者 $W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = 0$ 时,

$$E = E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0} = \text{常量}$$

习 题

4-1 对质点组有以下几种说法:①质点组总动量的改变与内力有关;②质点组总动能的改变与内力有关;③质点组机械能的改变与保守内力有关.下列对上述说法判断正确的是 ().

A. 只有①是正确的

B. 只有②是正确的

C. 只有③是正确的

D. ②、③是正确的

4-2 如题 4-2 图所示,质量分别为 m_1 和 m_2 的物体 A 和 B 置于光滑的桌面上, A 和 B 之间连有一轻弹簧.另有质量 m_1 和 m_2 的物体 C 和 D 分别置于物体 A 和 B 之上,且物体 A 和 C、B 和 D 之间的摩擦系数均不为零.先用外力沿水平方向相向推压 A 和 B,使弹簧被压

第一篇 力学

缩,然后撤掉外力,则在 A 和 B 弹开过程中,对 A、B、C、D 及弹簧组成的系统,有()。

- A. 动量守恒,机械能守恒
- B. 动量不守恒,机械能守恒
- C. 动量不守恒,机械能不守恒
- D. 动量守恒,机械能不一定守恒



题 4-2 图

4-3 对功的概念有以下几种说法:

- ①保守力做正功时,系统内相应的势能增加;
- ②质点运动经一闭合路径,保守力对质点做的功为零;
- ③作用力和反作用力大小相等、方向相反,所以两者所做功的代数和为零。

下列对上述说法判断正确的是()。

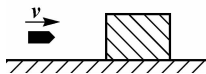
- A. ①、②是正确的
- B. ②、③是正确的
- C. ①、③是正确的
- D. 只有②是正确的

4-4 火车相对于地面以恒定的速度 u 运动.最初相对火车为静止的质点 m ,在时间 t 内受一恒力作用而被加速.若质点的加速度 a 与 u 的方向相同,那么以地面为参考系,质点动能的增量为()。

- A. $\frac{1}{2}ma^2t^2$
- B. $\frac{1}{2}ma^2t^2 + \frac{1}{2}mu^2 + ma ut$
- C. $\frac{1}{2}ma^2t^2 + \frac{1}{2}mu^2$
- D. $\frac{1}{2}ma^2t^2 + ma ut$

4-5 子弹射入放在水平光滑地面上静止的木块而不穿出,如题 4-5 图所示,以地面为参考系,下列说法中正确的是()。

- A. 子弹的动能转变为木块的动能
- B. 子弹-木块系统的动量守恒、机械能守恒
- C. 子弹动能的减少等于子弹克服木块阻力所做的功
- D. 子弹克服木块阻力所做的功等于这一过程中产生的热量



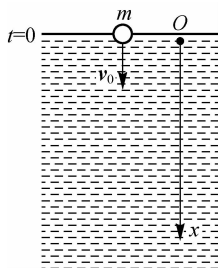
题 4-5 图

4-6 一人从 10.0 m 深的井中提水,起始桶中装有 10.0 kg 的水,由于水桶漏水,每升高 1.00 m 要漏去 0.20 kg 的水.水桶被匀速地从井中提到井口.求人所做的功.

4-7 一质量为 2 kg 的质点受合力 $F=3t^2i$ (N)作用从静止开始做直线运动,则从 $t=0$ 到 $t=2$ s 这段时间内,求力对质点所做的功.

4-8 如题 4-8 图所示,一质量为 m 的小球竖直落入水中,刚接触水面时其速率为 v_0 .设此球在水中所受的浮力与重力相等,水的阻力 $F_f=-bv$, b 为一常量.求阻力对球做的功与

时间的函数关系.



题 4-8 图

4-9 设一颗质量为 $5.00 \times 10^3 \text{ kg}$ 的地球卫星以半径 $8.00 \times 10^3 \text{ km}$ 沿圆形轨道运动. 由于微小阻力, 使其轨道半径收缩到 $6.50 \times 10^3 \text{ km}$. 试计算:

- (1) 速率的变化;
- (2) 动能和热能的变化;
- (3) 机械能的变化 (已知地球的质量 $M_e = 5.95 \times 10^{24} \text{ kg}$, 万有引力系数 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$).

4-10 质量为 M 的质点, $t=0$ 时位于 x_0 处, 速率为 v_0 , 在变力 $\mathbf{F} = -k/x^2 \mathbf{i}$ 的作用下做直线运动, 求:

- (1) 当质点运动到 x 处的速率;
- (2) 变力所做的功.

4-11 一物体按 $x = ct^3$ 的规律做直线运动, 设介质对物体的阻力与速率的平方成正比, 比例系数为 k . 求:

- (1) 物体从 $x_0 = 0$ 运动到 $x = l$ 时, 阻力所做的功;
- (2) 主动力所做的功.

第 5 章

刚体的定轴转动

对于机械运动的研究,只局限于质点的情况是很不够的.质点的运动只代表物体的平动.物体是有形状和大小的,它可以做平动、转动,甚至更为复杂的运动;而且在运动中,物体的形状也可能发生变化.本章讨论的刚体,只考虑其形状和大小,不考虑其形变,仍然是一个理想模型.

前面介绍了力学的基本概念和原理,如质点、位矢、位移、速度和加速度、牛顿定律、动量和冲量、功和能,以及动量、角动量和能量守恒定律.这些概念和定理、定律,不仅适用于质点,也适用于质点系.本章将介绍一种特殊的质点系——刚体及刚体所遵从的力学规律.这些规律实际上是前面的基本概念和原理在刚体上的应用.本章重点讨论刚体的定轴转动.重要的概念有转动惯量、力矩、角速度和角动量等,守恒定律同样适用于包括刚体的系统.角动量定理和角动量守恒定律在现代物理学和航天科技中有着特别重要的意义.

第一节 刚体运动的描述

一般物体在外力作用下,其形状和大小都要发生变化.但如果在外力作用下,物体的形状和大小保持不变,即物体内任意两点之间的距离不因外力而改变,这样的物体称为**刚体**.刚体可以看成由无数个连续分布的质点组成的质点系,每个质点称为刚体的一个质量元,这样刚体的每个质量元都服从质点力学规律.不同于质点,刚体这个特殊的质点系的力学规律有自己特殊的表现形式.

一、刚体的平动和转动

1. 刚体的平动

刚体在运动过程中,如果其上任意两点间所连的直线始终保持平行,那么这种运动称为刚体的平动.例如,汽缸中活塞的运动、车床上车刀的运动、升降机运动等,都属于平动.显然,刚体做平动时,刚体上任意一条直线在刚体平动过程中始终保持平行,如图 5-1 所示.直线上所有的点应有完全相同的位移、速度和加速度.在平动过程中,刚体上所有点的运动是完全相同的,它们都具有相同的位移、速度和加速度.因此,可以用刚体上任意一点的运动来代表整个刚体的平动.前面质点运动的描述和质点力学的规律,实际上是刚体的平动规律.

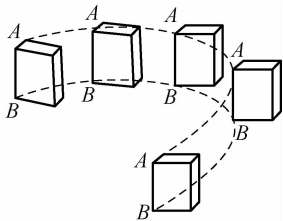


图 5-1 刚体的平动

2. 刚体的转动

刚体在运动过程中,如果其上所有的点都绕同一条直线做圆周运动,那么这种运动称为转动,这条直线称为**转轴**.如果转轴的位置或方向随时间变化,那么这种转动称为非定轴转动;如果转轴的位置或方向是固定不动的,那么这种转动称为**定轴转动**.

刚体的平动和转动是刚体运动中两种基本的形式,无论刚体做多么复杂的运动,都可以把它看成平动和转动的叠加.例如,车轮的滚动,如图 5-2 所示.不难看出,轮子的中心 O (质心)是在平动,而整个轮子绕通过质心 O 平行地面的转轴在转动.可见,车轮的滚动可看成车轮随着转轴的平动和整个车轮绕转轴的转动的叠加.因此,刚体的平动和转动的规律是研究刚体复杂运动的基础.



图 5-2 车轮的滚动

二、刚体的定轴转动

定轴转动是刚体转动中最简单的运动形式.

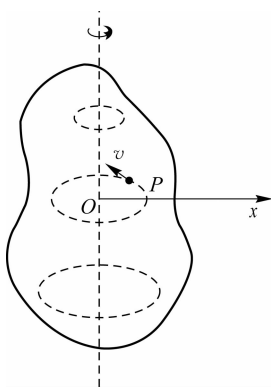


图 5-3 刚体的定轴转动图示

刚体做定轴转动时,刚体上各点都绕同一转轴做圆周运动,而转轴本身在空间的位置不动,轴上各点始终静止不动.例如,门的开或关、机器上飞轮的转动等都是定轴转动.如图 5-3 所示,刚体上 P 点处任意一个质元都将在通过该点且与转轴垂直的平面内做圆周运动,该平面称为**转动平面**,圆心 O 点是转轴与转动平面的交点.显然,这种转动平面可以有无数个,对于刚体的转动而言,它们是等价的,在研究刚体转动时可任选一个.因此可以看出,刚体的定轴转动实质上就是刚体上各个质元在垂直于转轴的转动平面内的圆周运动.

由于刚体是个特殊的质点系,各个质元之间没有相对位移.因此,在相同的一段时间内,各质元的半径扫过的角度相同,它们的角量,即角位移、角速度、角加速度都相同,但各质元到轴的距离不同.因此,各质元的线量,即位移、线速度、线加速度不同.这样在描述刚体的定轴转动时,用角量较为方便.

三、描述刚体定轴转动的物理量

用角量来描述刚体的定轴转动比较方便,那么以前讨论过的角位移、角速度和角加速度及有关公式,角量和线量的关系,对刚体的定轴转动都适用.

设一刚体绕 z 轴做定轴转动,取轴的指向为正方向,如图 5-4 所示.刚体做定轴转动时,刚体上到转轴的距离为 r 的一点的速度、切向加速度和法向加速度的大小与角速度、角加速度的关系为

$$v = \omega r$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\beta$$

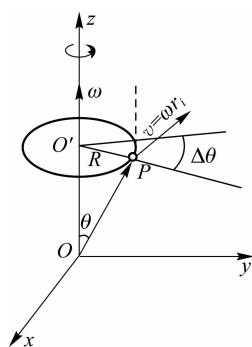


图 5-4 刚体的角量描述

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

刚体做匀变速转动时,可用下面的相应公式进行讨论.

$$\omega = \omega_0 + \beta t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0)$$

为了充分反映刚体转动的情况,常用矢量表示角速度及角加速度.在第一章中,人们把角速度的大小定义为

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

角速度的方向是这样规定的:让右手四指螺旋转动的方向与刚体的转动方向一致,那么拇指所指的方向就是角速度矢量的方向.

同样地,把角加速度的大小定义为

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

角加速度 β 的方向应当根据角速度的方向及刚体转动的情况共同决定,当刚体加速转动时, β 的方向与角速度方向相同;当刚体减速转动时, β 的方向与角速度方向相反.

第二节 刚体的定轴转动定律

一、力对转轴的力矩

对于刚体的定轴转动而言,若作用在刚体上 p 点的力 F 在转动平面内,力的作用点 p 相对于转轴的位矢为 r ,力臂为 d ,则力 F 对转轴的力矩为

$$M = r \times F$$

其中,力矩的大小 $M = Fr \sin \theta$,如图 5-5 所示.

如果作用在刚体上 p 点的力 F 不在转动平面内,如图 5-6 所示,设 p 点在转动平面内的位矢为 r ,将力分解为垂直于转轴 z 的分量 F_{\perp} 和平行于转轴 z 的分量 F_{\parallel} , F_{\parallel} 只能使刚体翻转,不能使刚体绕定轴转动,因此, F_{\parallel} 不能改变刚体的转动状态,对转轴不产生力矩.使刚体绕定轴转动的力只能是在转动平面内,力 F 垂直于转轴的分量 F_{\perp} ,它产生的力矩与图 5-5 所示的情况相同,即

$$M = r \times F_{\perp} \tag{5-1}$$

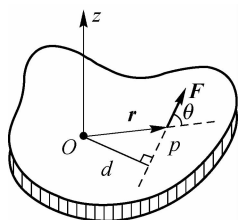


图 5-5 力在转动平面内

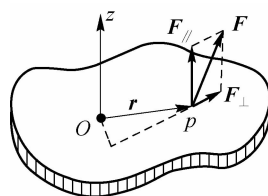


图 5-6 力不在转动平面内

由分析可知,在讨论刚体的定轴转动中力矩的作用时,用到的只是 F_{\perp} 这个分量,因此,只需考虑垂直于转轴的作用力或分力.既然如此,可以约定:以下所涉及的外力都认为是位于转动平面内的.

可以证明,一对相互作用力对同一转轴的力矩之和为零.如图 5-7 所示,设刚体上任意两质元 Δm_1 和 Δm_2 的相互作用力分别为 f_{12} 和 f_{21} , $f_{12} = -f_{21}$,它们对转轴的力矩大小分别为

$$M_1 = f_{12}d, M_2 = f_{21}d$$

而

$$M_1 = r_1 \times f_{12}, \text{方向沿转轴向下};$$

$M_2 = r_2 \times f_{21}$,方向沿转轴向上.所以,它们对同一转轴的合力矩为零.

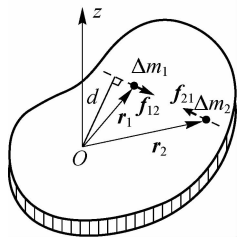


图 5-7 一对内力的力矩

【例 5-1】 一条缆索绕过一定滑轮拉动一升降机,如图 5-8(a) 所示. 滑轮半径 $r = 0.5 \text{ m}$,如果升降机从静止开始以加速度 $a = 0.4 \text{ m/s}^2$ 匀加速上升. 求:

- ①滑轮的角加速度;
- ②开始上升后, $t = 5 \text{ s}$ 末滑轮的角加速度;
- ③在 5 s 内滑轮转过的圈数;
- ④开始上升后, $t' = 1 \text{ s}$ 末滑轮边缘上一点的加速度(假设缆索和滑轮之间不打滑).

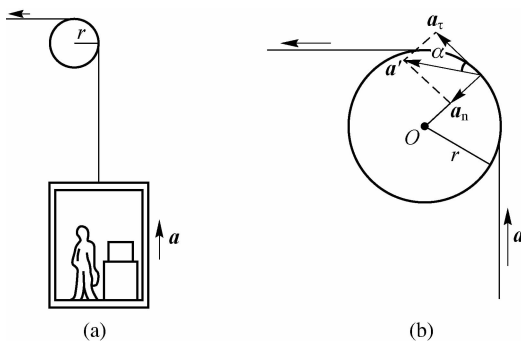


图 5-8 例 5-1 图

解: ①由于升降机的加速度和轮缘上一点的切向加速度相等,根据 $a_{\tau} = r\beta$,则

$$\beta = \frac{a_{\tau}}{r} = \frac{a}{r} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8 \text{ rad/s}^2$$

②由 $\omega = \beta t$, 得

$$\omega = 0.8 \times 5 = 4 \text{ rad/s}$$

③根据 $\theta = \frac{1}{2}\beta t^2$, 则

$$\theta = \frac{1}{2} \times 0.8 \times 5^2 = 10 \text{ rad}$$

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} = 1.6 \text{ 圈}$$

④如图 5-8(b) 所示,已知 $a_{\tau} = a = 0.4 \text{ m/s}^2$, 有

$$\omega' = \beta t' = 0.8 \times 1 = 0.8 \text{ rad/s}$$

第一篇 力学

法向加速度为

$$a_n = r\omega'^2 = 0.5 \times 0.8^2 = 0.32 \text{ m/s}^2$$

所以

$$a' = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{0.32^2 + 0.4^2} = 0.51 \text{ m/s}^2$$

加速度的方向与轮缘切线方向的夹角为

$$\alpha = \arctan \frac{a_n}{a_\tau} = \arctan \frac{0.32}{0.4} = 38.7^\circ$$

二、刚体定轴转动的转动定律

刚体的质量可以是连续分布的质点系,也可以是离散分布的质点系.对于质量连续分布的质点系,可将其看成由无数多个质元组成的,其中每个质元都服从牛顿运动定律.把构成刚体的全部质点的运动加以综合,就可以得出刚体的整个运动所服从的规律.下面从牛顿第二定律出发推导出刚体做定轴转动的规律.

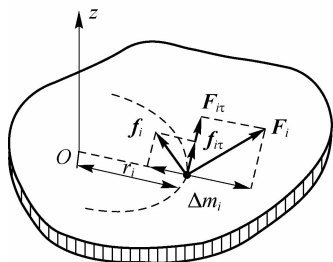


图 5-9 转动定律

如图 5-9 所示,假设一个刚体绕固定轴 Oz 轴转动,将此刚体分成许多质元,每个质元都在各自的转动平面上做圆周运动,它们各自的转动平面不尽相同,各自做圆周运动的圆心也不相同.但是,这些圆心都在 z 轴上.在刚体中取一质元 i ,其质量为 Δm_i ,离转轴的距离为 r_i ,设该质元受到的合外力为 \mathbf{F}_i ,来自刚体内其他质元对它的合内力为 \mathbf{f}_i ,并假设合外力 \mathbf{F}_i 和合内力 \mathbf{f}_i 都位于质元 i 所在的转动平面内(都与转轴垂直).设质元的加速度为 \mathbf{a}_i ,则有

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = (\Delta m_i) \mathbf{a}_i$$

将 \mathbf{F}_i 和 \mathbf{f}_i 分别分解为切向分力和法向分力,由于法向分力通过转轴,不产生力矩,因此,我们只考虑切向分力,由牛顿第二定律得

$$F_{i\tau} + f_{i\tau} = (\Delta m_i) a_{i\tau}$$

设刚体绕定轴转动的角速度为 ω ,角加速度为 β ,因为 $a_{i\tau} = r_i \beta$,所以上式变为

$$F_{i\tau} + f_{i\tau} = \Delta m_i r_i \beta$$

两边同乘以 r_i ,得

$$r_i F_{i\tau} + r_i f_{i\tau} = \Delta m_i r_i^2 \beta$$

式中, $r_i F_{i\tau}$ 和 $r_i f_{i\tau}$ 分别为合外力 \mathbf{F}_i 和合内力 \mathbf{f}_i 对转轴的力矩,对组成刚体的每个质元都可以列出这样的方程,把它们相加后得到

$$\sum (r_i F_{i\tau} + r_i f_{i\tau}) = \sum \Delta m_i r_i^2 \beta$$

式中, $\sum r_i f_{i\tau} = 0$, $M = \sum r_i F_{i\tau}$ 为刚体内所有质元受到的外力对转轴的力矩之和.于是,可得到

$$M = \left(\sum \Delta m_i r_i^2 \right) \beta$$

令

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2 \quad (5-2)$$

称为刚体对转轴的转动惯量,于是有

$$M = J\beta \quad (5-3)$$

式(5-3)表明,刚体做定轴转动时,在合外力矩 M 的作用下,所获得的角加速度 β 与合外力矩 M 成正比,与刚体的转动惯量 J 成反比.这一结论称为刚体定轴转动的转动定律.

刚体定轴转动的转动定律 $M = J\beta$ 与牛顿第二定律 $F = ma$ 在数学形式上是相似的,合外力矩 M 与合外力 F 相对应,转动惯量 J 与质量 m 相对应,角加速度 β 与加速度 a 相对应.可见,转动定律在刚体定轴转动中的地位与牛顿第二定律的地位是相当的,也是瞬时性的规律.外力矩与外力、角量与线量、转动惯量与质量这三对对应关系,贯穿了整个刚体的定轴转动.转动定律是解决刚体定轴转动问题的基本定律.

三、转动惯量

由转动定律的表达式 $M = J\beta$ 可以看出,在相同的外力矩作用下,刚体的转动惯量 J 越大,刚体所获得的角加速度 β 越小,则刚体的转动状态不易改变;刚体的转动惯量 J 越小,刚体所获得的角加速度 β 越大,刚体的转动状态容易发生变化.转动惯量 J 是和质量 m 相对应的物理量,物体的质量 m 是质点的平动惯性的量度,而刚体的转动惯量 J 是刚体转动惯性的量度.

由转动惯量的定义式 $J = \sum \Delta m_i r_i^2$ 可知,刚体相对于某转轴的转动惯量,是组成刚体的各部分质元与它们各自到该转轴距离平方的乘积之和,即

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2 = \sum \Delta m_1 r_1^2 + \sum \Delta m_2 r_2^2 + \cdots + \sum \Delta m_n r_n^2 \quad (5-4)$$

式(5-4)是刚体的质量离散分布时的转动惯量.

如果刚体的质量是连续分布的,只需要将上式的求和号改为积分形式即可,即

$$J = \int r^2 dm \quad (5-5)$$

在国际单位制中,转动惯量的单位是千克·米²($\text{kg} \cdot \text{m}^2$).

【例 5-2】 求质量为 m 、长为 l 的均匀细棒对下列转轴的转动惯量:

- ① 转轴通过棒的中心且与棒垂直.
- ② 转轴通过棒的一端且与棒垂直.
- ③ 转轴通过棒上离中心为 d 的一点且与棒垂直.

解:如图 5-10 所示,设转轴离棒的一端为 a .在细棒上取转轴所在点为原点 O ,沿棒的方向作 x 轴.

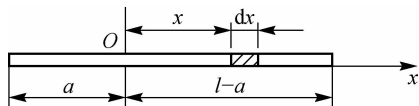


图 5-10 例 5-2 图

细棒上离原点为 x 处的质元的质量为

$$dm = \lambda dx$$

式中, $\lambda = \frac{m}{l}$ 为棒的质量线密度(单位长度上的质量).根据转动惯量的定义,有

$$J = \int r^2 dm = \int x^2 dm$$

$$\int_{-a}^{l-a} x^2 \lambda dx = \frac{1}{3} m(l^2 - 3la + 3a^2) \quad (1)$$

①当转轴通过中心时, $a = \frac{l}{2}$, 代入式①得

$$J = \frac{1}{12} ml^2$$

②当转轴通过棒的一端时, $a = 0$, 由式①得

$$J = \frac{1}{3} ml^2$$

③当转轴通过棒上离中心为 d 的一点时, $a = \frac{l}{2} - d$, 由式①得

$$J = \frac{1}{12} ml^2 + md^2$$

由此可见, 同一匀质细棒, 对不同位置的转轴的转动惯量不同.

【例 5-3】 用落体观测法测量车轮转动惯量的装置如图 5-11(a) 所示. 将车轮支承起来, 使它能绕水平轴转动; 在轮缘上绕一细绳, 绳的一端系着质量为 m 的重物. 测得重物由静止开始下落高度 H 的时间为 t , 车轮的半径为 R , 假设轴承的摩擦忽略不计, 试求车轮的转动惯量.

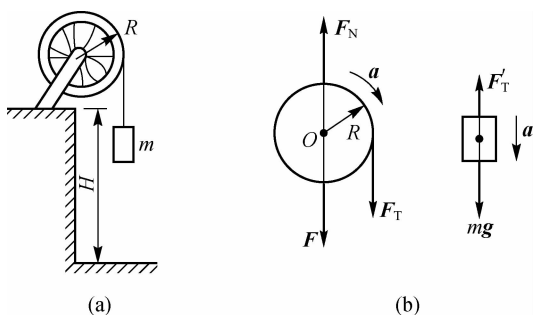


图 5-11 例 5-3 图

解: 分别以车轮和重物为研究对象. 它们的受力如图 5-11(b) 所示. 规定沿顺时针转动方向为正方向, 根据转动定律, 对车轮可列出方程为

$$F_T R = J\alpha$$

规定竖直向下为正方向, 根据牛顿第二定律, 对重物可列出方程为

$$mg - F_T' = ma$$

依照切向加速度与角加速度的关系, 有

$$a = R\alpha$$

再由匀变速直线运动公式得

$$H = \frac{1}{2} at^2$$

联立以上四个方程, 其中 $F_T' = F_T$, 解得车轮的转动惯量为

$$J = mR \left(\frac{gt^2}{2H} - 1 \right)$$

同一刚体,有相同的质量,对于不同转轴的转动惯量不同.实际上,两种转轴的转动惯量之间是有联系的,即

$$J_O = J_C + m \left(\frac{l}{2} \right)^2$$

这个关系式可归纳为**平行轴定理**,即刚体对任一转轴的转动惯量 J 等于刚体对通过质心 C 并与该轴平行的转动惯量 J_C 加上刚体质量 m 与两轴间距离 d 的二次方的乘积,如图 5-12 所示.平行轴定理可表达为

$$J = J_C + md^2 \quad (5-6)$$

在实际应用中,经常遇到由几部分不同形状和大小的刚体构成的一个整体.根据转动惯量的定义,其转动惯量应等于各部分刚体对同一转轴的转动惯量之和.

综上所述,刚体的转动惯量与以下因素有关:

(1)刚体的质量.各种形状的刚体,总质量越大,转动惯量越大.

(2)刚体质量的分布.总质量相同的刚体,质量分布不同,即刚体的形状不同,转动惯量也不同.质量分布离转轴越远,转动惯量越大.

(3)转轴的位置.同一刚体,转轴的位置不同,质量对转轴的分布也不同.因而转动惯量也不同.

以上例子是根据转动惯量的定义式(5-5)计算规则几何形状的刚体的转动惯量,对于几何形状较复杂的刚体通常要用实验测定.下表列出几种几何形状简单、规则,密度均匀的物体对通过质心的不同转轴的转动惯量.

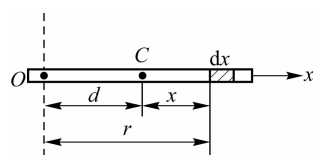
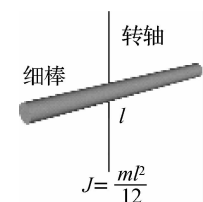
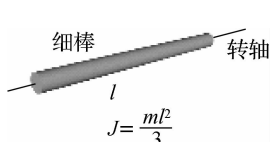
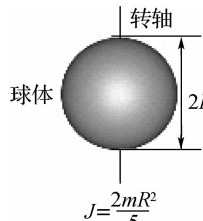
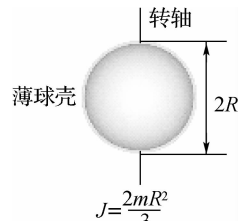


图 5-12 平行轴定理

几种常见形状刚体的转动惯量

<p>圆环</p> <p>转轴</p> <p>$J = mR^2$</p>	<p>圆筒</p> <p>转轴</p> <p>$J = \left(\frac{m}{2}\right)(R_1^2 + R_2^2)$</p>
<p>圆柱体</p> <p>转轴</p> <p>$J = \frac{mR^2}{2}$</p>	<p>圆柱体</p> <p>转轴</p> <p>$J = \frac{mR^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$</p>

(续表)

 <p>细棒 转轴 l $J = \frac{ml^2}{12}$</p>	 <p>细棒 转轴 l $J = \frac{ml^2}{3}$</p>
 <p>球体 转轴 $2R$ $J = \frac{2mR^2}{5}$</p>	 <p>薄球壳 转轴 $2R$ $J = \frac{2mR^2}{3}$</p>

四、转动定律的应用举例

应用刚体定轴转动的转动定律解题要特别注意以下问题：

(1) 首先，定轴转动定律是合外力矩对刚体的瞬时作用规律，表达式 $M = J\beta$ 中各个物理量均是同一时刻对同一刚体和同一转轴而言。

(2) 其次，在定轴转动中，由于力矩和角加速度包括角速度在内，它们的方向均沿转轴，通常用代数量表示。

在实际应用中，对一个力学系统而言，有的物体做平动，有的物体做转动，处理此类问题仍然采用隔离法。对于平动的物体利用牛顿第二定律列出动力学方程，对于定轴转动的物体利用定轴转动的转动定律列出动力学方程，然后对这些方程综合求解。

【例 5-4】 一细绳跨过定滑轮，两端分别挂有质量为 $m_A = 1.5 \times 10^{-1} \text{ kg}$ 和 $m_B = 2.0 \times 10^{-2} \text{ kg}$ 的物体 A 和 B (见图 5-13)。定滑轮是质量为 $m = 1.0 \times 10^{-2} \text{ kg}$ 的匀质圆盘。绳与滑轮之间无相对滑动。试计算两物体 A 和 B 的加速度和绳中的张力。

解：对定滑轮和物体 A、B 作隔离体图，分析其受力情况并选取 y 轴，如图 5-14 所示。

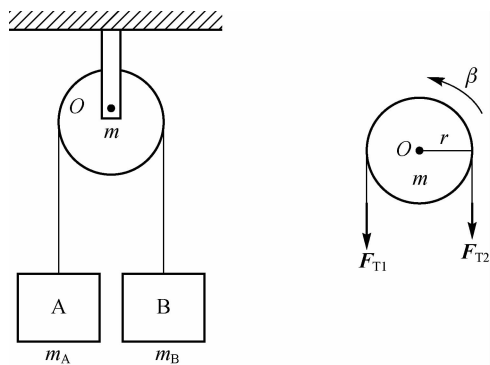


图 5-13 例 5-4 图

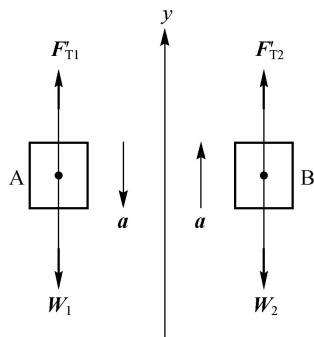


图 5-14 受力分析

设定滑轮半径为 r , 由上页表中可知, 它的转动惯量为 $J = \frac{1}{2}mr^2$, 又设它的角加速度为 β , 则由转动定律可列出方程为

$$F_{T1}r - F_{T2}r = \frac{1}{2}mr^2\beta$$

对 A、B 两物体, 由牛顿第二定律可列出方程(设两者加速度大小为 a)为

$$F'_{T1} - W_1 = -m_A a$$

$$F'_{T2} - W_2 = m_B a$$

且

$$a = r\beta, W_1 = m_A g, W_2 = m_B g$$

及

$$F_{T1} = F'_{T1}, F_{T2} = F'_{T2}$$

联立上述各式, 即可解得

$$a = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B + \frac{1}{2}m} g = \frac{0.15 - 0.02}{0.15 + 0.02 + \frac{1}{2} \times 0.01} \times 9.8 = 7.28 \text{ m/s}^2$$

$$F_{T1} = \frac{m_A \left(2m_B + \frac{1}{2}m \right)}{m_A + m_B + \frac{1}{2}m} g = \frac{0.15 \times \left(2 \times 0.02 + \frac{1}{2} \times 0.01 \right)}{0.15 + 0.02 + \frac{1}{2} \times 0.01} \times 9.8 = 0.38 \text{ N}$$

$$F_{T2} = \frac{m_B \left(2m_A + \frac{1}{2}m \right)}{m_A + m_B + \frac{1}{2}m} g = \frac{0.02 \times \left(2 \times 0.15 + \frac{1}{2} \times 0.01 \right)}{0.15 + 0.02 + \frac{1}{2} \times 0.01} \times 9.8 = 0.34 \text{ N}$$

如果本题定滑轮质量可忽略不计, 即 $m = 0$, 那么, 由上述文字式便可解出

$$a = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} g = \frac{0.15 - 0.02}{0.15 + 0.02} \times 9.8 = 7.49 \text{ m/s}^2$$

$$F_{T1} = F_{T2} = \frac{2m_A m_B}{m_A + m_B} g = \frac{2 \times 0.15 \times 0.02}{0.15 + 0.02} \times 9.8 = 0.35 \text{ N}$$

这就是质点动力学中解出的结果.

注意在分析定滑轮的受力情况时, 还应有它所受的重力及约束力, 但是这两个力对转轴的力矩为零, 所以未画出. 在其他题中若遇到类似情况, 也可做同样处理.

【例 5-5】 如图 5-15 所示, 一个可绕固定轴 O 自由转动的均质细棒, 质量为 m , 长度为 l , 初始时刻处于水平位置. 求其自由释放至 θ 角时的角加速度和角速度.

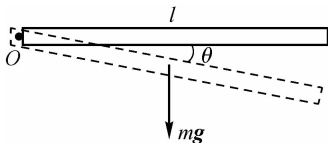


图 5-15 例 5-5 图

解: 取垂直于纸面向里为转轴的正方向, 则当棒释放至 θ 角时, 棒所受重力对 O 轴的力矩为

$$M = \frac{1}{2} mgl \cos \theta$$

棒绕 O 轴的转动惯量为

$$J = \frac{1}{3} ml^2$$

由转动定律得棒的角加速度为

$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{3g \cos \theta}{2l}$$

由角加速度的定义,得

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

所以

$$\omega d\omega = \alpha d\theta = \frac{3g \cos \theta}{2l} d\theta$$

积分

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^\theta \frac{3g}{2l} \cos \theta d\theta$$

得棒的角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{3g \sin \theta}{l}}$$

第三节 刚体定轴转动的角动量定理 角动量守恒定律

前面介绍用动量来量度物体的机械运动量. 当把这种量度方法用于物体的转动问题, 如研究匀质飞轮绕通过其中心并垂直于飞轮平面的定轴转动时, 人们发现, 虽然飞轮在转动, 但它的质心保持静止. 按质点系动量的定义, 飞轮的总动量为零. 这说明用动量来量度物体的转动运动量是不恰当的. 因此, 与在描述转动运动时引入与速度和加速度相对应的角量(角速度和角加速度)相类似, 人们引入与动量相对应的角量——角动量, 也称动量矩.

角动量的概念提出较晚, 18 世纪才定义, 19 世纪人们才把它视为力学中最基本的概念之一. 由于大到星系, 小到电子、中微子都有旋转运动, 发现微观粒子的角动量具有量子化的重要特征, 角动量遵循守恒定律, 20 世纪以来, 角动量在物理学中的地位日益重要. 角动量及其守恒定律已经成为物理学中最重要的概念和定律之一.

一、角动量及角动量定理

1. 角动量

(1) 质点的角动量. 设质量为 m 的质点某一时刻的运动速度为 \mathbf{v} , 该时刻相对于参考点 O 的位置矢量为 \mathbf{r} , 如图 5-16 所示. 质点的动量为 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, 我们定义质点相对于参考点 O 的角动量为

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (5-7)$$

上式表明, 一个质点相对于参考点 O 的角动量等于质点的位置矢量与其动量的矢积. 质

点的角动量 L 是一个矢量,其大小为

$$L = rmv \sin \theta \quad (5-8)$$

式中, θ 为位矢 r 与动量 p 之间的夹角, L 的方向由右手螺旋定则确定,把右手大拇指伸直,其余四指由位矢 r 通过小于 180° 的角转到矢量 p 的方向,大拇指所指的方向就是角动量 L 的方向,如图 5-17 所示.显然,角动量 L 的方向垂直于由位矢 r 和动量 p 所决定的平面.

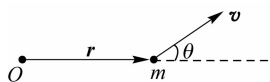


图 5-16 质点的角动量

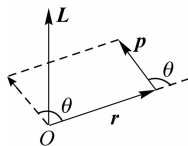


图 5-17 角动量的方向确定

在国际单位制中,角动量的单位是千克·米²/秒(kg·m²/s).

从角动量的定义式可以看出,质点的角动量 L 与位矢 r 有关,即与参考点 O 的选择有关.同一质点对不同参考点的位矢不同,因而角动量也不同.因此在表示质点的角动量时,必须指明是对哪一点的角动量.为了表示角动量 L 是相对于参考点 O 的,一般总把角动量 L 画在参考点 O 上.

若质量为 m 的质点做半径为 r 的圆周运动,如图 5-18 所示.某一时刻质点位于 a 点,速度为 v .若以圆心 O 为参考点,那么 r 与 v 总是相垂直的,则质点对圆心 O 的角动量 L 的大小为

$$L = rmv = mr^2\omega$$

式中, ω 为质点绕 O 点转动的角速度, L 的方向平行于 Oz 轴.

如果质点以恒定速度 v 做直线运动,对空间某一给定点也可能有角动量.如图 5-19 所示,当选取参考点 O 时,质点对 O 点的角动量大小为

$$a \text{ 点} \quad L_a = mvr_a \sin \theta_1$$

$$b \text{ 点} \quad L_b = mvr_b \sin \theta_2$$

因为

$$r_a \sin \theta_1 = r_b \sin \theta_2 = r$$

所以

$$L_a = L_b$$

这说明质点在匀速直线运动过程中对某一定点的角动量是恒定的,其方向始终垂直纸面向内.

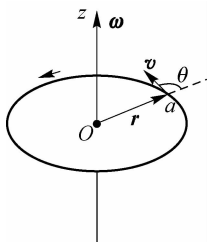


图 5-18 质点做圆周运动的角动量

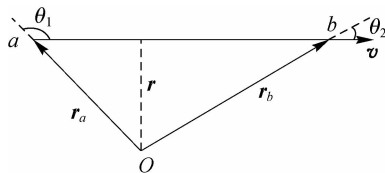


图 5-19 匀速直线运动的质点对参考点 O 的角动量

但当参考点选在该质点运动的直线上时,由于 $\sin \theta=0$,因此质点在运动过程中的角动量就是零.所以,这些做直线运动的质点,只有对不在此直线上的参考点才有角动量.

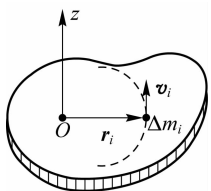


图 5-20 刚体的角动量

(2)刚体对定轴的角动量. 刚体是一个质点系,刚体对定轴的角动量就是所有质点对轴角动量的矢量和.

如图 5-20 所示,设刚体绕定轴 Oz 轴以角速度 ω 转动,刚体上每个质元都以相同的角速度 ω 绕 Oz 轴在各自的转动平面内做圆周运动. 设刚体中第 i 个质元的质量为 Δm_i ,该质元到转轴的距离为 r_i ,根据质点对参考点的角动量的大小的定义式,该质元对定轴的角动量为

$$L_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

由于组成刚体的每个质元对转轴的角动量都可以用上式表示,并且每个质点的角动量的方向都沿 Oz 轴. 因此,整个刚体对转轴的角动量应是刚体中所有质元对转轴的角动量大小之和,即

$$L = \sum \Delta m_i r_i^2 \omega$$

式中, $\sum \Delta m_i r_i^2$ 为刚体绕 Oz 轴的转动惯量 J ,于是刚体对定轴 Oz 轴的角动量为

$$L = J\omega \quad (5-9)$$

其方向沿 Oz 轴. 式(5-9)表明,刚体绕定轴转动的角动量等于刚体的转动惯量与角速度的乘积,其方向与角速度的方向相同. 在刚体定轴转动中,角动量的方向可用正负号表示. 刚体的角动量 $L = J\omega$ 与质点的动量 $p = mv$ 在形式上相互对应.

2. 力矩

对于一个静止的质点来说,当它受到外力作用时,将开始运动;但对于一个能够转动的物体而言,当它受到外力作用时,可能转动也可能不转动,这取决于此力是否产生力矩. 外力对物体产生力矩,物体就会转动;外力对物体不产生力矩,物体就不会转动. 因此,力矩反映了力对物体的转动效果.

力矩是相对于一个参考点定义的. 如图 5-21 所示,设在某一时刻质点 m 对某一参考点的位矢为 r ,作用在质点上的力为 F ,则位矢 r 与作用力 F 的矢积定义为力对参考点 O 的力矩 M ,即

$$M = r \times F \quad (5-10)$$

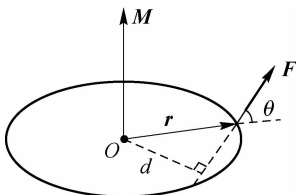


图 5-21 力对参考点 O 的力矩

力矩是矢量,其大小为 $M = Fr \sin \theta = Fd$,其中, θ 是 r 与 F 之间的夹角, d 为力对参考点的力臂. 力矩 M 的方向用右手螺旋法则来判定:把右手大拇指伸直,其余四指由位矢 r 通过小于 180° 的角转到矢量 F 的方向,这时大拇指所指的方向就是力矩 M 的方向. 由此可以判

定, \mathbf{M} 的方向垂直于位矢 \mathbf{r} 与 \mathbf{F} 所决定的平面.

在国际单位制中, 力矩的单位是牛顿·米 ($\text{N}\cdot\text{m}$).

由式(5-10)可知, 力矩 \mathbf{M} 与位矢 \mathbf{r} 有关, 即与参考点 O 的选取有关. 对于同样的作用力 \mathbf{F} , 选择不同的参考点, 力矩 \mathbf{M} 的大小和方向都会不同.

3. 角动量定理

(1) 质点的角动量定理. 以上定义了角动量和力矩这两个物理量, 现在就来导出它们之间的定量关系, 从而说明力矩的作用效果.

设质量为 m 的质点, 在合力 \mathbf{F} 的作用下, 某一时刻的动量为 $\mathbf{P}=m\mathbf{v}$, 该质点相对于某参考点 O 的位置矢量为 \mathbf{r} , 那么此时质点相对于参考点 O 的角动量为

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}$$

将上式对时间 t 求导, 可得

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\mathbf{v})=\mathbf{r}\times\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}+\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times m\mathbf{v}$$

根据牛顿第二定律, 应有

$$\mathbf{F}=\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

又由于

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

因此

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}+\mathbf{v}\times m\mathbf{v}$$

根据矢积的性质 $\mathbf{v}\times m\mathbf{v}=0$, 而 $\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{M}$, 于是有

$$\mathbf{M}=\frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (5-11)$$

式(5-11)表明, 作用在质点上的合外力对某参考点的力矩等于质点对同一参考点的角动量的时间变化率.

式(5-11)还可以写成

$$\mathbf{M}dt=d\mathbf{L} \quad (5-12)$$

式中, $\mathbf{M}dt$ 为质点在运动过程中力矩对时间的累积量, 称为冲量矩. 对式(5-12)两边取积分, 可得

$$\int_{t_0}^t \mathbf{M}dt = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0 \quad (5-13)$$

式(5-13)表明, 质点所受到的冲量矩等于质点角动量的增量. 这个结论称为质点的角动量定理.

式(5-11)和式(5-12)称为质点角动量定理的微分形式, 式(5-13)称为角动量定理的积分形式. 质点的角动量定理告诉人们, 力矩使物体的角动量发生改变.

关于质点的角动量定理, 需要注意以下几个问题:

- ① 角动量定理中的角动量 \mathbf{L} 和力矩 \mathbf{M} 必须是相对于同一参考点的.
- ② 角动量定理与牛顿第二定律在数学形式上相互对应, 即

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

可见,力矩 \mathbf{M} 和角动量 \mathbf{L} 是描述转动的物理量.

(2)刚体对定轴的角动量定理. 当刚体绕固定轴做定轴转动时,刚体对轴的转动惯量不随时间变化. 所以,由刚体定轴转动的转动定律可得

$$\mathbf{M}_{\text{外}} = J\boldsymbol{\beta} = J \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d(J\boldsymbol{\omega})}{dt}$$

引入刚体的角动量后,可得

$$\mathbf{M}_{\text{外}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (5-14)$$

即刚体所受到的合外力矩等于刚体的角动量对时间的变化率. 将上式变形可得

$$\mathbf{M}_{\text{外}} dt = d\mathbf{L} = d(J\boldsymbol{\omega})$$

如果刚体从 t_0 到 t 的时间内受到外力矩的作用,使它绕定轴转动的角速度由 $\boldsymbol{\omega}_0$ 变为 $\boldsymbol{\omega}$,那么可对上式积分得到

$$\int_{t_0}^t \mathbf{M}_{\text{外}} dt = J\boldsymbol{\omega} - J\boldsymbol{\omega}_0 \quad (5-15)$$

式(5-15)表示,作用在刚体上的合外力矩的时间积累称为 t_0 到 t 时间间隔内的冲量矩. 式(5-15)表明,作用于刚体上的合外力矩的冲量矩等于刚体角动量的增量. 这个结论称为**刚体定轴转动的角动量定理**. 不难看出,这个定理与质点的动量定理非常相似,它把过程量(冲量矩)和状态量(角动量)联系起来.

另外,与刚体定轴转动的转动定律 $\mathbf{M}_{\text{外}} = J\boldsymbol{\beta}$ 相比, $\mathbf{M}_{\text{外}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ 是转动定律的另一表达式,其适用范围更为广泛. 在刚体的转动惯量发生变化时, $\mathbf{M}_{\text{外}} = J\boldsymbol{\beta}$ 已不再适用,但 $\mathbf{M}_{\text{外}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ 仍然是成立的.

二、角动量守恒定律

1. 质点的角动量守恒定律

前面我们讨论了质点的角动量定理,即

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

如果作用于质点的合外力对参考点的力矩等于零,即 $\mathbf{M} = 0$,那么有

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

或者说

$$\mathbf{L} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = \text{常矢量} \quad (5-16)$$

式(5-16)表明,相对于某一参考点,如果质点所受的合外力矩等于零,那么质点的角动量保持不变. 这个结论称为**质点的角动量守恒定律**.

必须明确,质点的角动量守恒条件是合外力矩为零,即

$$\mathbf{M} = 0$$

力矩为零有以下三种情况:

(1) $\mathbf{F}=0$, 即质点不受外力作用时, 质点的角动量守恒.

(2) $\mathbf{r}=0$, 表示质点处于参考点而静止不动时, 质点的角动量守恒.

(3) \mathbf{r} 与 \mathbf{F} 都不为零, 但是 $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$, 即 $\sin \theta = 0$, 也就是 \mathbf{r} 与 \mathbf{F} 平行, 这时力的作用线通过参考点, 那么质点的角动量也是守恒的.

在第(3)种情况中, 质点并非不受外力, 而是力的作用线始终通过参考点而已. 这样的力称为有心力, 参考点称为力心. 所以不能笼统地认为, 凡是受力作用的质点其角动量都不守恒, 而是要看此力是否是有心力. 只要作用于质点的力是有心力, 那么此力对力心的力矩总等于零. 所以, 在有心力作用下, 质点对力心的角动量都是守恒的. 例如, 行星绕太阳转动时, 太阳对它们的引力指向太阳的中心; 原子核对核外电子的静电力总是指向原子核. 在这里, 行星受到的引力、核外电子受到的静电力都属于有心力, 因此, 在绕太阳转动的过程中, 行星对太阳的角动量守恒, 同样的道理, 在绕核转动过程中, 核外电子对核的角动量守恒.

从以上的分析可以得出, 质点的角动量守恒定律是物理学的一条很重要的基本规律, 在研究天体及微观粒子的运动时, 角动量守恒定律起着极为重要的作用.

【例 5-6】 一质量为 $m=1.2 \text{ kg}$ 、长为 $l=0.50 \text{ m}$ 的均匀细棒 OA , 可绕通过棒的端点 O 且与棒垂直的轴在水平面内转动, 如图 5-22 所示. 开始时棒是静止的, 一质量为 $m'=0.2 \text{ kg}$ 的小球, 以水平速度 $v_0=15 \text{ m/s}$ 运动, 并与棒的另一端 A 垂直于棒做弹性碰撞. 求碰撞后的小球弹回的速度 v 和棒的角速度 ω , 摩擦阻力不计.

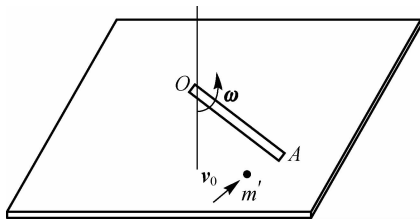


图 5-22 例 5-6 图

解: 设棒和小球为研究系统. 在碰撞过程中, 系统不受外力矩作用, 所以系统的角动量守恒. 碰撞前, 小球相对于转轴的角动量为 $m'v_0l$, 棒的角动量为零; 碰撞后, 小球相对于转轴的角动量为 $-m'vl$, 棒的角动量为 $J\omega$, 其中 $J = \frac{1}{3}ml^2$. 可列方程为

$$m'v_0l = \frac{1}{3}ml^2\omega - m'vl \quad (1)$$

又因为是弹性碰撞, 系统的动能也守恒, 故有

$$\frac{1}{2}m'v_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}m'v^2 \quad (2)$$

联立上述两式, 可得解

$$v = \frac{2m - 3m'}{2m + 3m'}v_0 = \frac{2 \times 1.2 - 3 \times 0.2}{2 \times 1.2 + 3 \times 0.2} \times 15 = 9.0 \text{ m/s}$$

$$\omega = \frac{12m'}{(2m + 3m')l}v_0 = \frac{12 \times 0.2}{(2 \times 1.2 + 3 \times 0.2) \times 0.50} \times 15 = 24 \text{ rad/s}$$

2. 刚体定轴转动的角动量守恒定律

在刚体的定轴转动中, 如果刚体所受的外力对定轴的合力矩为零, 即

$$M_{\text{外}}=0$$

那么由式(5-15),可得

$$J\omega = J\omega_0$$

或

$$J\omega = \text{常量} \quad (5-17)$$

式(5-17)表明,如果刚体所受的合外力矩等于零,那么刚体的角动量保持不变,这一结论称为刚体的角动量守恒定律.

必须指出,在推导角动量守恒定律的过程中,虽然受到了刚体、定轴等条件的限制,但是它的适用范围远远地超过了这些限制.

关于刚体的角动量守恒定律,需要说明以下几点:

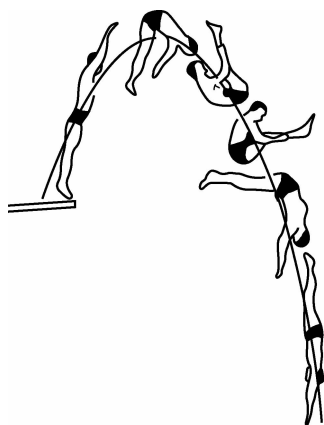


图 5-23 运用角动量守恒的跳水运动员

(1)对于绕固定轴转动的刚体,由于转动惯量 J 为一常数,因此,在角动量守恒的情况下,刚体将以恒定的角速度绕定轴转动.

(2)对于转动惯量可变的物体(如非刚体),在角动量守恒的情况下,若使转动惯量减小,则角速度增加;相反,若使转动惯量增大,则角速度减小,转动惯量和角速度的乘积保持不变,即 $J_0\omega_0 = J\omega$. 利用改变转动惯量来达到改变旋转角速度的例子很多. 例如,花样滑冰运动员(非刚体)做旋转动作时,往往先把两臂张开旋转(改变质量分布)以增大转动惯量,由于没有外力矩的作用,角动量守恒,这时的角速度较小;当运动员迅速收拢两臂靠近身体时,相对身体中心的转动惯量减小,结果使旋转角速度增大. 又如,跳水运动员为在空中实现快速翻转,在起跳后,

就必须将手和腿尽量蜷缩起来,以改变质量分布,减小转动惯量,从而增大翻转的角速度;入水前,为了能竖直进入水中减小水的阻力,使水花最小,又必须把手臂和腿逐渐展开,以增大转动惯量,减小角速度,如图 5-23 所示.

以上结论还可通过站在转台上、双手握哑铃的人的表演给予定性证明,如图 5-24 所示,若忽略转台轴间的摩擦力矩和空气阻力矩等,则人和转台组成的系统对转轴的角动量守恒. 开始时,先使人和转台一起转动,当人将握哑铃的手逐渐收回时,对转轴的转动惯量减小,角速度变大;当人伸平双臂时,转动惯量增大,转动的角速度变小.

(3)对于由多个物体组成的系统,系统内既有平动也有转动的现象,若对某一定轴的合外力矩为零,则此系统对该轴的角动量守恒,即

$$\sum J\omega + \sum r \times mv = \text{常矢量}$$

若此系统由两个物体组成,则有

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = \text{常矢量}$$

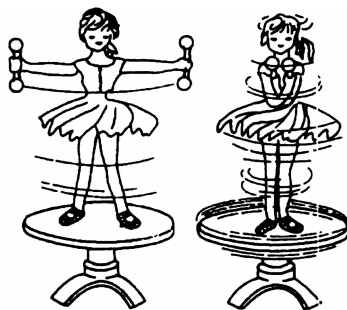


图 5-24 角动量守恒图示

也就是说,当系统内的一个物体的角动量发生变化时,另一个物体的角动量必须等值异号地改变,从而使总的角动量保持不变.

除了日常生活中有许多现象可用角动量守恒定律解释外,无数事实已经证明,在宏观领域可利用角动量守恒定律来研究天体的演化;在微观领域也可利用角动量守恒定律研究微观粒子的运动特征.可见,角动量守恒定律不仅适用于刚体,还适用于非刚体;不仅适用于天体运动,还适用于微观粒子的运动.因此,角动量守恒定律与动量守恒定律、能量守恒定律一样,是自然界中的普遍规律,虽然它们都是在经典牛顿力学的基础上导出的,但适用范围远远超出了原有条件的限制,它们不仅适用于牛顿力学所研究的宏观、低速领域,而且适用于牛顿力学失效的微观、高速领域.这三条守恒定律是比牛顿运动定律更基本、更普遍的物理定律.

第四节 刚体定轴转动的动能定理

一、刚体的转动动能

刚体绕定轴转动时,其每个质元都绕转轴做圆周运动,都具有一定的动能.那么,所有质元的动能之和就是刚体的转动动能.

设刚体以角速率 ω 绕定轴转动,其中每个质元都在各自的转动平面内以角速率 ω 做圆周运动,若第 i 个质元的质量为 Δm_i ,它到转轴的距离为 r_i ,其线速率 $v_i = r_i \omega$,那么第 i 个质元的动能为

$$E_{ki} = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

于是整个刚体的动能为

$$E_k = \sum E_{ki} = \frac{1}{2} \left(\sum \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

由于

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2$$

则刚体绕定轴的转动动能为

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (5-18)$$

由式(5-18)可以看出,刚体的转动动能 $E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$ 与物体的平动动能(质点的动能) $\frac{1}{2} m v^2$ 相比较,两者形式上十分相似,角速率 ω 与线速率 v 相对应,转动惯量 J 与质量 m 相对应,再次说明转动惯量是反映刚体转动惯性的物理量.

在国际单位制中,刚体的转动动能的单位是焦耳(J).

二、刚体的重力势能

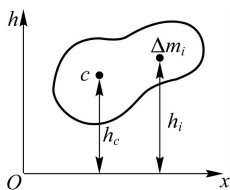


图 5-25 刚体的重力势能

如果刚体受到保守力的作用,也可以引入势能的概念.例如,在重力场中,刚体就具有一定的重力势能.一个质量为 m 的刚体,它的重力势能应当是组成刚体的所有质元的重力势能之和.如图 5-25 所示,若取地面坐标系来计算重力势能,则刚体的重力势能为

$$E_p = (\sum \Delta m_i h_i) g$$

根据质心的定义,此刚体的质心高度为

$$h_c = \frac{\sum \Delta m_i h_i}{m}$$

因此,上式改写为

$$E_p = mgh_c \quad (5-19)$$

上述结果表明,刚体的重力势能相当于它的全部质量 m 集中在质心处的质点的重力势能.无论刚体如何放置,都能得出式(5-19),也就是说,刚体的重力势能仅取决于质心的高度,与刚体的方位无关.这也体现了质心的概念在刚体力学中的重要性.

三、力矩做的功

在质点力学中,当质点在合力作用下沿力的方向发生位移时,力就对质点做了功,并且功可由作用力与质点沿力的方向移动的位移的乘积来表示.与之相似,当刚体在外力矩作用下转动时,力矩也对刚体做了功,做功的结果是使刚体的角速度发生了变化.

由于刚体是个特殊的质点系,质点之间的相对位置保持不变,因此内力是不做功的,只需考虑外力的功.如图 5-26 所示,刚体绕固定轴 Oz 轴转动,设在转动平面内的外力作用在刚体上的 p 点. p 点相对于 O 点的位矢是 r ,当刚体绕 Oz 轴转过一个微小的角位移 $d\theta$ 时, p 点的位移就是 dr , dr 的大小 $|dr| = ds = r d\theta$,在这个过程中,力 F 做的功为

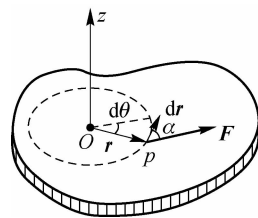


图 5-26 力矩做功图示

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_r ds = F_r r d\theta$$

式中, F_r 为力 F 在位移 dr 方向上的分量,它与位矢 r 垂直,所以 $F_r r$ 是力 F 对转轴的力矩 M ,因此,上式可以写成

$$dW = M d\theta \quad (5-20)$$

式(5-20)表明,定轴转动的刚体在转过 $d\theta$ 角的过程中,外力对刚体做的元功等于相应的力矩与角位移元的乘积,称为力矩的功.

如果刚体在力矩 M 的作用下绕固定轴从 θ_0 位置转到 θ 位置,那么力矩对刚体做的功为

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} M d\theta \quad (5-21)$$

如果刚体受到几个力的共同作用,那么式中的外力矩应表示为合力矩.

四、定轴转动的动能定理

当外力矩对刚体做功时,力矩的空间累积效应就是刚体的转动动能会发生变化.下面讨

论力矩做的功与刚体的转动动能之间的变化关系. 设刚体做定轴转动, 在合外力作用下绕定轴转过角位移 $d\theta$, 合外力矩对刚体所做的元功为

$$dW = Md\theta$$

将转动定律 $M = J\beta = J \frac{d\omega}{dt}$ 代入上式, 得到

$$dW = Md\theta = J \frac{d\omega}{dt} d\beta = J\omega d\omega$$

如果刚体在合外力矩 M 作用下绕定轴转动, 角速率由 ω_0 变为 ω , 那么在此过程中合外力矩对刚体做的总功为

$$W = \int dW = \int_{\omega_0}^{\omega} J\omega d\omega$$

即

$$W = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 \quad (5-22)$$

式中, $\frac{1}{2}J\omega_0^2$ 和 $\frac{1}{2}J\omega^2$ 分别为刚体在始末状态的转动动能.

式(5-22)表明, 合外力矩对刚体所做的功等于刚体转动动能的增量. 这就是**刚体定轴转动的动能定理**.

刚体绕定轴转动的动能定理在工程上有很多应用. 在工程上, 很多机器都配有飞轮, 转动的飞轮可以把能量以转动动能的形式储存起来, 在需要做功时又释放出来. 例如, 冲床在冲孔时, 冲力是很大的, 如果由电动机直接带动冲头, 电动机将无法承受如此大的负荷. 因此, 在电动机与冲头中间要装上减速箱和飞轮储能装置, 电动机通过减速箱带动飞轮转动, 使飞轮储有转动动能 $\frac{1}{2}J\omega_0^2$. 在冲孔时, 由飞轮带动冲头对钢板冲孔做功, 使飞轮转动动能减少到 $\frac{1}{2}J\omega^2$. 这样利用转动的飞轮释放能量, 可以大大减少电动机的负荷.

五、定轴转动的机械能守恒定律

比较刚体定轴转动的动能定理 $W = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$ 与质点的动能定理 $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$, 可以看出, 它们在形式上非常相似, 转动惯量 J 与质量 m 相对应, 用角速率 ω 与线速率 v 相对应. 这就是说, 刚体定轴转动的功和能的特点与质点系统的功和能的特点在形式上是完全相同的, 下面就来讨论关于刚体定轴转动的功和能的问题.

1. 刚体定轴转动的动能原理

如果刚体在定轴转动中除受到外力矩外, 还受到保守力矩的作用, 那么, 涉及的势能主要是重力势能. 所以, 保守力只考虑重力, 当系统取地球和刚体时, 式(5-22)可写为

$$\int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{外}} d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{保内}} d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{非保内}} d\theta = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 \quad (5-23)$$

在质点系动力学中, 保守力的功等于势能增量的负值, 在刚体定轴转动中, 保守力矩的功就是保守力的功, 即

$$\int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{保内}} d\theta = -\Delta E_p$$

因此

$$\int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{保内}} d\theta = -\Delta E_p = mgh_{C0} - mgh_C$$

式中, h_{C0} 和 h_C 分别为刚体在始末状态时质心距离零势能面的高度, 将上式代入式(5-23)得到

$$\int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{外}} d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{非保内}} d\theta = \left(mgh_C + \frac{1}{2}J\omega^2\right) - \left(mgh_{C0} + \frac{1}{2}J\omega_0^2\right) = E_2 - E_1 = \Delta E \quad (5-24)$$

式(5-24)表明, 在刚体定轴转动中, 合外力矩的功与非保守力矩做功的代数和等于刚体系统机械能的增量, 这个结论称为刚体定轴转动的功能原理.

2. 刚体定轴转动的机械能守恒定律

由式(5-24)可以看出, 若

$$\int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{外}} d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta} M_{\text{非保内}} d\theta = 0$$

则

$$\Delta E = 0$$

即

$$E = mgh_C + \frac{1}{2}J\omega^2 = \text{常量} \quad (5-25)$$

式(5-25)表明, 在只有保守力矩做功的情况下, 系统的转动动能和重力势能相互转化, 而总的机械能保持不变. 这就是刚体定轴转动的机械能守恒定律.

对于包含刚体在内的系统, 如果在运动过程中只有保守内力做功, 那么该系统的机械能守恒, 这样, 既要考虑质点的动能、重力势能、弹性势能, 还要考虑刚体定轴转动的转动动能及重力势能.

【例 5-7】 如图 5-27 所示, 一个质量为 M 、半径为 R 的定滑轮上绕有细绳. 绳的一端固定在滑轮边上, 另一端挂一个质量为 m 的物体而下垂. 忽略轴处摩擦, 求物体 m 由静止下落 h 高度时的速度和此刻滑轮的角速度.

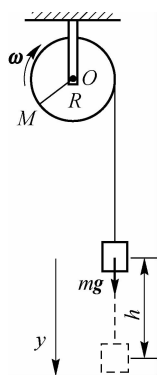


图 5-27 例 5-7 图

解: 选取滑轮、物体和地球为研究系统, 在质量为 m 的物体下降的过程中, 外力有滑轮轴对滑轮的作用力, 其做功为零. 因此, 系统只有保守内力, 即重力做功, 所以机械能守恒.

滑轮的重力势能不变, 可以不考虑. 取物体的初始位置为零势能点, 则系统始态的机械能为零, 末态的机械能为

$$\frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mg(-h)$$

由机械能守恒定律, 得

$$\frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mg(-h) = 0$$

将关系式 $J = \frac{1}{2}MR^2$ 和 $\omega = \frac{v}{R}$ 代入上式, 可得

$$\frac{1}{4}MR^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$v^2 \left(\frac{M+2m}{4}\right) = mgh$$

$$v = \sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}}$$

滑轮的角速度为

$$\omega = \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{4mgh}{(2m+M)R^2}}$$

【例 5-8】 如图 5-28 所示, 一根质量为 m 、长为 l 的匀质细棒, 可绕通过其一端的光滑轴 O 在竖直面内转动. 如果当棒在水平位置时把它自由释放, 求棒到竖直位置时的角速度和棒端 A 的速度.

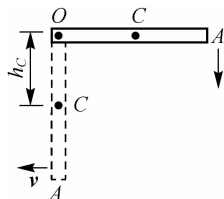


图 5-28 例 5-8 图

解: 选取棒和地球为研究系统, 在此系统中外力不做功, 只有重力矩做功, 故系统的机械能守恒.

选取棒在竖直方向时重心的位置为重力势能的零点, 则棒在水平方向时系统的机械能为

$$E_0 = E_{p0} = mgh_C = \frac{1}{2}mg$$

棒下落到竖直方向时, 系统的机械能为

$$E = E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$$

根据机械能守恒定律, 有

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

把 $J = \frac{ml^2}{3}$ 代入上式, 解得

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

$$v = l\omega = \sqrt{3gl}$$

本章提要

刚体的平动运动规律和定轴转动规律对比.

刚体的平动	刚体的定轴转动
速度 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$	角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
加速度 $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$	角加速度 $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
力 \mathbf{F}	力矩 $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
质量 m	转动惯量 $J = \int r^2 dm$
运动定律 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	转动定律 $\mathbf{M} = J\beta$
动量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, 动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$	动量 $\mathbf{p} = \sum_i \Delta m_i \mathbf{v}_i$, 动能 $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$
角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$	角动量 $\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}$
动量定理 $\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$	角动量定理 $\mathbf{M} = \frac{d(J\boldsymbol{\omega})}{dt} = J\boldsymbol{\beta}$
动量守恒 $\sum_i \mathbf{F}_i = 0, \sum_i m_i \mathbf{v} = \text{恒量}$	角动量守恒 $\mathbf{M} = 0, \sum_i J\boldsymbol{\omega} = \text{恒量}$
动能定理 $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$	动能定理 $W = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$

习 题

5-1 半径为 $r=0.5\text{ m}$ 的飞轮,初角速度 $\omega_0=12\text{ rad/s}$,角加速度 $\beta=-6\text{ rad/s}$. 飞轮在何时,其角位移为 0,并求此时轮缘上一点的线速度的大小 v .

5-2 砂轮直径为 0.2 m ,质量为 5.0 kg ,以 900 rad/min 的转速转动. 一工件以 10 N 的正压力作用在轮边缘上,使砂轮在 11.8 s 内停止. 求砂轮和工件间的摩擦系数(砂轮轴的摩擦可忽略不计,砂轮可按匀质圆盘计算其转动惯量).

5-3 如题 5-3 图所示,固定在一起的两个同轴薄圆盘,可绕通过盘心且垂直于盘面的光滑水平轴 O 转动. 大圆盘质量为 M ,半径为 R ;小圆盘质量为 m ,半径为 r . 在两圆盘边缘上都绕有细线,分别挂有质量为 m_1, m_2 的物体($m_1 > m_2$). 系统从静止开始在重力作用下运动,不计一切摩擦. 求:

(1) 圆盘的角加速度 β ;

(2) 各段绳的张力 F_{T1} 、 F_{T2} .

5-4 一定滑轮半径为 0.1 m , 相对中心轴的转动惯量为 $1.0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. 一个随时间 t 变化的变力 $F = 0.5t$ (SI) 沿切线方向作用在滑轮的边缘上. 如果滑轮最初处于静止状态, 试求它在 1 s 末的角速度.

5-5 一根长为 l 、质量为 m 的均匀直棒可绕其一端, 且与棒垂直的水平光滑固定轴转动. 抬起另一端使棒向上与水平面成 60° 角, 然后无初转速地将棒释放. 已知棒对轴的转动惯量为 $\frac{1}{3}ml^2$, 设 $l = 1 \text{ m}$. 求:

(1) 放手时棒的角加速度;

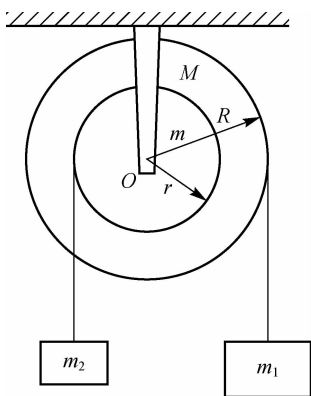
(2) 棒转到竖直位置时的角速度.

5-6 一飞轮的转动惯量为 J , 在 $t = 0$ 时角速度为 ω_0 . 此后飞轮经历制动过程. 阻力矩 M 的大小与角速度 ω 的平方成正比, 比例系数 $k > 0$, 求当 $\omega = \frac{1}{2}\omega_0$ 时, 飞轮的角速度 β .

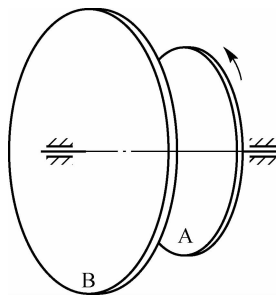
5-7 如题 5-7 图所示, 两个飞轮 A 和 B 的轴杆在同一中心线上, 设 A 轮、B 轮的转动惯量分别为 $J_A = 1.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 和 $J_B = 2.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. 开始时, A 轮转速为 $3\pi \text{ rad/s}$, B 轮静止, 然后两轮啮合, 使两轮转速相同, 啮合过程中无外力矩作用. 求:

(1) 两轮啮合后的共同角速度 ω ;

(2) 两轮各自所受的冲量矩.



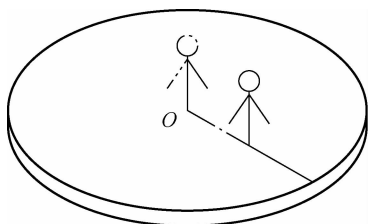
题 5-3 图



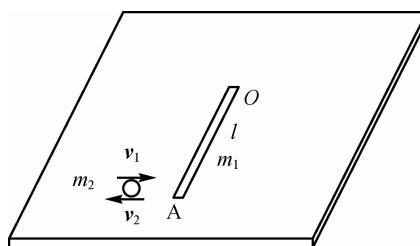
题 5-7 图

5-8 如题 5-8 图所示, 游乐场中一个大型平面圆转台可绕通过其圆心的铅垂光滑轴转动, 转台对轴的转动惯量为 $1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. 一质量为 60 kg 的人, 开始时站在台的中心, 此时转台每 10 s 转一圈, 随后他沿半径向外走去, 问当人离转台中心 2 m 时, 转台的角速度为多少 (设整个过程中, 无其他外力矩作用, 也不计阻力)?

5-9 如题 5-9 图所示, 一质量为 m_1 、长为 l 的均匀细棒, 静止平放在滑动摩擦系数为 μ 的水平桌面上, 它可绕通过其端点 O 、且与桌面垂直的固定光滑轴转动. 另有一水平运动的质量为 m_2 的小滑块, 从侧面垂直于棒与棒的另一端 A 相碰撞, 设碰撞时间极短. 已知小滑块在碰撞前、后的速度分别为 v_1 和 v_2 . 求碰撞后从细棒开始转动到停止转动过程所需的时间.



题 5-8 图

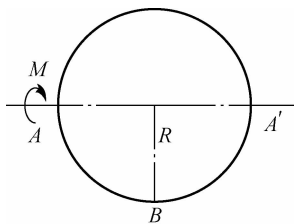


题 5-9 图

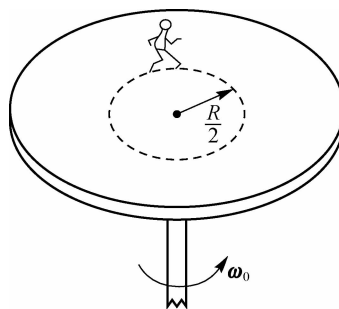
5-10 如题 5-10 图所示,一质量为 m 、半径为 R 的匀质薄圆盘,可绕通过其一直径的轴 AA' 转动,转动惯量 $J = \frac{1}{4}mR^2$. 该圆盘从静止开始在恒力矩 M 作用下转动,求经过时间 t 后位于与轴 AA' 相垂直的半径端点 B 点的切向加速度和法向加速度.

5-11 如题 5-11 图所示,在半径为 R 的水平圆形转盘上,有一人静止站立在距转轴为 $R/2$ 处,人的质量 m 是圆盘质量 m' 的 $1/10$,开始时盘载人相对于地以角速度 ω_0 匀速转动. 如果此人垂直于圆盘半径相对于盘以速率 v 沿与盘转动相反方向做圆周运动,已知圆盘中心轴的转动惯量为 $m'R^2/2$,求:

- (1) 圆盘对地的角速度 ω ;
- (2) 欲使圆盘对地静止,人沿着半径为 $R/2$ 的圆周对盘的速度 v 的大小和方向.



题 5-10 图



题 5-11 图

第二篇

热 学

人们在长期的生产实践中积累了许多有关热现象的知识,特别是在发明了蒸汽机等热力机械后,人们对热现象做了更为深入的研究.科学家从微观和宏观两个方面对热现象做了研究,并进而建立了统计物理学和热力学两门学科.

统计物理学的基本出发点是,认为物质是由大量相互作用的分子构成的,而分子又是在不停地做热运动,于是必须用统计的方法及一些理想的模型来研究宏观现象与微观现象之间的关系.统计物理学是研究热现象的微观理论.

热力学则通过观察和实验对某个热力学系统与外界的能量交换及其状态变化进行研究,从而得到一些规律,并确认一些可能或不可能发生的变化.热力学是研究热现象的宏观理论.

本篇介绍统计物理学中的气体动理论及热力学中的一些基本内容.

许多实验事实表明,自然界中的任何物体,如气体、液体和固体等常见的宏观物体都是由大量分子或原子组成的,虽然人们用肉眼不能直接观察到,但现在已能用高分辨率的显微镜观察到原子结构的图像.物体都是由大量微观粒子(分子、原子等)组成的,而这些微观粒子总是永不停息地做无规则的运动.物体的温度越高,这种运动就越剧烈,因此,人们把这种运动称为分子的热运动.本章主要讨论理想气体热现象和热运动的规律.

第一节 理想气体的描述

实验表明,一般在密度不太高、压强不太大(与大气压相比)和温度不太低(与室温相比)的实验条件下,实际的气体近似视为理想气体.理想气体是一个抽象的物理模型,可以想象为极其稀薄的气体.对理想气体热现象和热运动的规律,本书分别从宏观和微观两个角度描述.

一、理想气体的宏观描述

1. 热力学系统

热学的研究对象是由大量微观粒子(分子、原子等)组成的宏观物体,通常称研究对象为**热力学系统**,简称系统.在研究一个热力学系统的热现象规律时,不仅要注意系统内部的各种因素,同时也要注意外部环境对系统的影响.与系统发生相互作用的外部环境称为**外界**,即系统以外的部分.例如,当讨论对象为容器内的气体时,气体为系统,而容器的器壁为外界.一般情况下,系统与外界之间既有能量交换,又有物质交换.根据系统与外界交换的特点,通常把系统分为三种,即孤立系统、封闭系统和开放系统.孤立系统是一种不受外界影响的理想系统,它与外界既无能量交换,又无物质交换.封闭系统是与外界只有能量交换而无物质交换的系统.开放系统则是与外界既有能量交换又有物质交换的系统.在大学物理中,所研究的热力学系统通常是一个气体系统,固体和液体系统的热力学问题在这里不做具体研究.

2. 平衡态

要研究热力学系统的性质,首先必须认识它所处的状态.热力学系统根据所处状态的不同,可以分为平衡态和非平衡态.在不受外界影响的条件下,热力学系统经过足够长的时间后,必将达到一个稳定的状态,其宏观性质不再随时间变化,而无论系统的初始状态如何.我们把这种在不受外界影响的条件下,系统的宏观性质不随时间变化的状态称为**平衡态**.这里

所说的不受外界影响,是指外界对系统既不做功也不传热的情况.系统的宏观性质由系统的状态参量来描述,因此,可以说平衡态就是指在不受外界影响的条件下,系统的状态参量不随时间变化的状态.

实际上,并不存在完全不受外界影响、宏观性质绝对保持不变的孤立系统,所以平衡态只是一种理想状态,它是在一定条件下对实际情况的抽象和近似.在实际问题中,当系统受到的外界影响可以忽略、宏观性质变化很小时,系统的状态就可以近似认为是平衡态,从而可以比较简单地得出与实际情况基本相符的结论.这样,既抓住了问题的物理实质,又简化了问题的讨论.因此,平衡态是热学中一个重要的基本概念.

3. 状态参量

用来描述物体状态的物理量称为**状态参量**.在力学中,人们用位置矢量和速度来描述物体机械运动的状态,位置矢量和速度就是两个力学状态参量.在讨论由大量做热运动的分子构成的理想气体状态时,仅用力学状态参量是不够的.位矢和速度只能用来描述分子的运动状态,为了研究整个系统的状态,对于一定质量的气体,常用体积 V 、压强 p 和温度 T 来描述气体系统的状态,并把这几个物理量称为理想气体的状态参量.

(1) 体积. 气体的体积是指气体所能达到的空间. 由于分子热运动, 容器中的气体总是分散在容器中的各个空间部分, 因此, 气体的体积也就是盛气体的容器的容积. 在国际单位制中, 体积的单位是立方米(m^3). 常用单位还有升(L), $1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$.

(2) 压强. 气体的压强是大量气体分子频繁碰撞容器壁而产生的, 等于容器壁上单位面积所受的正压力, 即 $p = \frac{F}{S}$. 在国际单位制中, 压强的单位是帕斯卡, 用符号 Pa 表示. 实际应用中常用的压强单位还有标准大气压、厘米高汞柱等, 它们之间的关系为

$$1 \text{ atm}(\text{标准大气压}) = 76 \text{ cmHg} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

(3) 温度. 温度是用来表示物体冷热程度的物理量, 在本质上它与物体内部大量分子热运动的剧烈程度密切相关. 温度的数值表示方法称为温标, 常用的温标有两种, 即热力学温标和摄氏温标. 热力学温标是建立在热力学第二定律的基础上的, 根据 1987 年第 18 届国际计量大会对国际实用温标的决议, 以热力学温标为最基本的温标, 一切温度的测量最终都应以热力学温标为准. 在国际单位制中, 用热力学温标表示的温度称为热力学温度, 它是国际单位制中的七个基本量之一, 用符号 T 表示, 单位是开尔文(K). 在日常生活和工程技术中, 目前常使用摄氏温标, 它所确定的温度称为摄氏温度, 用符号 t 表示, 单位是摄氏度($^{\circ}\text{C}$). 热

力学温度 T 与摄氏温度 t 的关系为

$$T = 273.15 + t$$

一定质量的气体处于平衡态时, 其状态可以用一组 p 、 V 、 T 值来表示. 由于 p 、 V 、 T 之间存在一定关系, 因此, 任何一个平衡态都可以用 p - V 图上一个确定的点来表示. 不同的平衡态与 p - V 图上不同的点相对应, 图 6-1 中的点 $A(p_1, V_1, T_1)$ 和点 $B(p_2, V_2, T_2)$ 分别表示两个不同的状态.

4. 宏观量和微观量

体积 V 是几何量, 压强 p 是力学量, 而温度 T 是反映气体分子热运动剧烈程度的量, 是热运动特有的一个基本

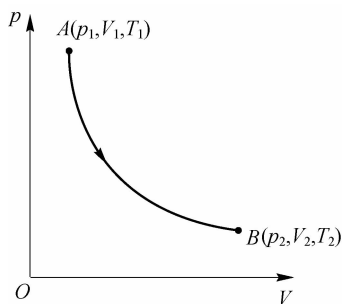


图 6-1 平衡态与准静态过程

量,属于热学量,它们都是用来描述气体系统整体特征的物理量,称为**宏观量**.而组成气体的每个分子都具有质量、速度、动量及能量等,这些描述个别分子的性质和运动状态的物理量称为**微观量**.用实验方法来测定这些微观量是相当困难的,一般是不可能的.一般在实验室中测得的是描述大量分子集体特性的宏观量.从物质的微观结构出发,根据每个粒子所遵循的力学规律,用统计平均的方法建立宏观量与微观量之间的关系,从而揭示宏观现象的微观本质.

5. 准静态过程

一个热力学系统,当受到外界影响(做功或传热)时,其状态就会发生变化.系统从一个状态变化到另一个状态的过程称为**热力学过程**,简称**过程**.例如,活塞汽缸内的气体系统由初始状态 (p_1, V_1, T_1) 过渡到最终状态 (p_2, V_2, T_2) ,就说系统经历了一个热力学过程.

一个实际热力学过程从初态到末态要经历许多中间状态,这些中间状态都不是平衡态,整个系统没有确定的参量,所以无法用系统本身的状态参量来描述过程的变化.在热力学中,为了能够利用系统处于平衡态的性质来研究热力学过程的规律,引入了准静态过程的概念.

设系统从某一平衡态开始,经过一系列状态变化后达到另一平衡态.如果过程进行中的任一时刻,系统的状态都无限接近于平衡态,那么这样的过程就称为**准静态过程**或平衡过程.只要有一个时刻的状态不能近似为平衡态,整个过程就不是准静态过程.

显然,准静态过程是一种理想化的过程,在实际中并不存在,但在许多情况下,可以近似地把实际热力学过程当作准静态过程来处理,所以准静态过程是个很有用的理想模型.那么什么情况下实际过程才可以近似认为是准静态过程呢?

一个系统从某一平衡态变到相邻平衡态时,必然要打破原有的平衡,出现非平衡态,经过一定时间后才能达到一个新的平衡态.人们把系统从一个平衡态变到相邻平衡态所经历的时间称为弛豫时间,记为 τ .假设系统状态发生一微小变化经历的时间为 Δt ,如果过程进行得非常缓慢,即弛豫时间 $\tau < \Delta t$,那么在状态变化过程中,系统有足够的时间达到平衡态,从而该过程就可以近似认为是准静态过程.在实际问题中,只要过程进行得不是非常快,一般情况下都可以把实际过程看作准静态过程.例如,汽车发动机汽缸内的气体系统经历一次压缩的时间 Δt 约为 10^{-2} s或更长,而实验表明汽缸内气体系统的弛豫时间约为 10^{-3} s,只有过程进行时间的十分之一,因此,汽车发动机汽缸内气体压缩的过程可以认为是准静态过程.

准静态过程在 p - V 图上可用一条曲线来表示.例如,图6-1中A点和B点之间的曲线就表示从初态A到末态B的准静态过程,其中箭头方向为过程进行的方向.曲线AB上的每个点都代表系统的一个平衡态,曲线AB通常称为过程曲线.显然,非静态过程不能在状态图上用一条曲线来表示.准静态过程的引入对于热力学理论是十分重要的,如不特别指明,后面讨论的过程都可视为准静态过程,如等压过程、等体过程、等温过程等.

6. 理想气体的状态方程

对处于平衡态的一定质量的气体来说,当描写该状态的任意一个参量发生变化时,其他两个参量一般也将随之改变,但这三个状态参量之间总是满足一定的关系.人们把平衡态下理想气体的各个状态参量之间的关系式称为**理想气体的状态方程**.状态方程的具体形式是由实验来确定的,一般来说,这个方程的形式是很复杂的,它与气体的性质有关.这里我们只讨论理想气体的状态方程.

第二篇 热 学

实验表明,一般气体在密度不太高、压强不太大(与大气压相比)和温度不太低(与室温相比)的实验条件下,能很好地遵守气体的三大实验定律,即玻意耳-马略特定律、盖-吕萨克定律和查理定律.应该指出,对不同气体来说,这三条定律的适用范围是不同的,不易液化的气体,如氮、氢、氧、氦等适用的范围比较大.人们把在任何情况下都能严格遵守以上三条实验定律的气体称为理想气体.理想气体是一个抽象的物理模型,可以想象为极其稀薄的气体.

理想气体的状态参量 p 、 V 、 T 之间的关系称为理想气体的状态方程,可以由气体的三条实验定律推出.对于 1 mol 处于平衡态的某种理想气体,根据以上定律,可以推出其状态方程为

$$pV = RT$$

由于在标准状况下,压强 $p_0 = 1.013 \times 10^5$ Pa, 温度 $T_0 = 273.15$ K, 而此时 1 mol 任何气体的体积均为 $V_0 = 22.4 \times 10^{-3}$ m³/mol, 由上式可得 R 的值为

$$R = \frac{p_0 V_0}{T_0} = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$$

可见,对于不同的理想气体, R 的值是恒定的, R 称为普适气体常数.

对质量为 m' , 摩尔质量为 M 的理想气体,其状态方程为

$$pV = \frac{m'}{M}RT = \nu RT \quad (6-1)$$

式中, $\nu = \frac{m'}{M}$ 为气体的摩尔数.

设某种理想气体的质量为 m' , 包含的分子数为 N , 每个分子的质量为 m , 则 m' 与 m 之间的关系为 $m' = Nm$, 而该气体的摩尔质量 M 与 m 之间应有关系 $M = N_A m$. 将这两个关系式代入式(6-1), 可得

$$pV = \frac{Nm'}{N_A m}RT = \frac{N}{N_A}RT$$

即

$$p = \frac{N}{V} \cdot \frac{R}{N_A} T$$

式中, $\frac{N}{V} = n$ 为分子数密度. R 和 N_A 都是常数, 两者的比值常用 k 表示, 称为玻尔兹曼常数, 其值为

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8.31}{6.02 \times 10^{23}} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

因此,理想气体的状态方程可改写为

$$p = nkT \quad (6-2)$$

上式表明了平衡态下理想气体的各个状态参量之间的关系. 在常温常压下, 大多数实际气体, 尤其是那些不易液化的气体都可以近似看作理想气体. 压强越低, 温度越高时, 这种近似的准确度越高. 因此, 研究理想气体的状态方程具有重要意义.

【例 6-1】 容器内装有氧气, 压强为 5.7×10^5 Pa, 温度为 47°C , 质量为 58 g. 因为容器漏气, 经过一段时间后, 压强减小到原来的 $9/10$, 温度下降到 27°C . 求:

①容器的容积.

②漏掉的氧气的质量.

解:①根据理想气体物态方程

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

可求出体积为

$$V = \frac{mRT}{Mp}$$

把已知数据 $p = 5.7 \times 10^5 \text{ Pa}$, $T = 273 + 47 = 320 \text{ K}$, $m = 58 \times 10^{-3} \text{ kg}$, $M = 32 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$, $R = 8.31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ 代入得

$$V = \frac{58 \times 10^{-3} \times 8.31 \times 320}{32 \times 10^{-3} \times 5.7 \times 10^5} = 8.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

②容器漏气后,压强为 $p' = 0.9p$,温度为 $T' = 273 + 27 = 300 \text{ K}$,则由理想气体状态方程得质量为

$$\begin{aligned} m' &= \frac{Mp'V}{RT'} = \frac{32 \times 10^{-3} \times 0.9 \times 5.7 \times 10^5 \times 8.5 \times 10^{-3}}{8.31 \times 300} \\ &= 5.6 \times 10^{-2} \text{ kg} \end{aligned}$$

因此漏掉的氧气为

$$m - m' = 58 \times 10^{-3} - 5.6 \times 10^{-2} = 2.0 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

二、理想气体的微观模型

从统计力学的观点来看,理想气体是一种最简单的气体.理想气体的微观模型是根据实验现象和规律所做的假设,基本内容可以分为两部分:一部分是关于分子个体的,另一部分是关于分子集体的.

1. 关于分子个体的力学性质假设

(1)与分子之间的平均距离相比,分子本身的大小可以忽略不计.实验表明,在标准状态下,气体分子之间的平均距离约为分子直径的10倍,即气体中分子本身占的体积约为气体体积的千分之一,因此分子可以看作质点.

(2)除碰撞的瞬间外,分子之间及分子与器壁之间的相互作用力可以忽略不计.分子力是短程力,由于气体分子间的平均距离超出了分子力的作用范围,因此,除碰撞的瞬间外,分子间的相互作用力可以忽略.也就是说,在两次碰撞之间,分子的运动可当作匀速直线运动.

(3)气体分子之间及分子与器壁之间的碰撞是完全弹性碰撞.气体处于平衡态时,其宏观性质不随时间变化,这表明系统的能量不因分子之间及分子与器壁之间的碰撞而损失,因此可认为是完全弹性碰撞.

(4)分子的运动遵从经典力学规律.

综上所述,理想气体分子可看作一个个极小的、除碰撞瞬间外彼此之间无相互作用并遵从经典力学规律的弹性质点.显然,这是一个理想模型,它只是真实气体在压强较小时的近似模型.

2. 关于分子集体的统计性假设

(1) 每个分子的运动速度各不相同, 并且通过碰撞不断变化. 气体分子不停地做无规则运动, 运动速度各不相同, 运动过程中分子之间频繁地发生碰撞, 通过碰撞, 各分子的速度不断变化.

(2) 平衡态时, 若忽略重力的影响, 每个分子处在容器内任何空间的概率完全一样, 即分子在空间均匀分布, 分子数密度 n 处处相同.

设气体的总分子数为 N , 体积为 V , 则气体分子数密度为

$$n = \frac{dN}{dV} = \frac{N}{V} \quad (6-3)$$

(3) 平衡态时, 每个分子的速度指向各个方向的机会(概率)是相同的, 没有哪个方向更占优势, 即分子速度按方向的分布是均匀的. 因此, 对大量分子来说, 它们在 x, y, z 三个坐标轴上的速度分量的平方的平均值相等, 即

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} \quad (6-4)$$

其中,

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N}(v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \cdots + v_{Nx}^2)$$

$$\overline{v_y^2} = \frac{1}{N}(v_{1y}^2 + v_{2y}^2 + \cdots + v_{Ny}^2)$$

$$\overline{v_z^2} = \frac{1}{N}(v_{1z}^2 + v_{2z}^2 + \cdots + v_{Nz}^2)$$

对任一分子, 其速率 v_i 与速度的各个分量之间有如下关系:

$$v_i^2 = v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2$$

将上式对所有分子求平均值, 可得

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

因为 $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$, 所以有

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2} \quad (6-5)$$

即速度分量平方的平均值相等, 而且等于速率平方平均值的三分之一. 这个结论在下面证明压强公式时要用到.

假设(2)、(3)实际上是关于分子无规则热运动的假设. 它是一种统计性假设, 只适用于大量分子组成的系统. 式(6-3)和式(6-5)中的 n 、 $\overline{v_x^2}$ 、 $\overline{v_y^2}$ 、 $\overline{v_z^2}$ 等都是统计平均值, 对少量分子组成的系统及对大量分子组成的系统中的单个分子都不成立, 只对大量分子组成的集体才有确定的意义. 因此, 在考虑式(6-3)中的 dV 时, 从宏观上来说, 为了表明容器中各点的分子数密度, 它应该是非常小的体积元; 但从微观上来看, 在 dV 内应包含大量的分子. 因而 dV 应该是宏观足够小、微观足够大的体积元, 不能单纯按数学极限 $dV \rightarrow 0$ 来理解. 一般情况下, 这个物理条件是完全可以满足的. 分子数密度 n 就是对这样的体积元内可能出现的分子数统计平均的结果. 当然, 由于分子永不停息地做无规则热运动, 不断地进进出出, 因而 dV 内的分子数 dN 是不断改变的. 这样, 各个时刻的 $\frac{dN}{dV}$ 也是不断变化的, 各时刻的 $\frac{dN}{dV}$ 值相对于平均值 n 的差别称为涨落. 通常体积元 dV 在微观上总是取得足够大, 使得这一涨落比起平均值 n 可

以小到忽略不计.

第二节 描述理想气体的统计规律

对单个分子来说,每个气体分子的运动都可视为质点运动,遵从牛顿运动定律,只是由于受到其他分子极其频繁而又无法预测的碰撞,其运动状态瞬息万变,显得杂乱无章,具有很大的偶然性.但总体而言,在一定条件下,大量分子的热运动却遵从确定的规律.这种大量偶然事件的总体所显示的规律性称为统计规律性.显然,统计规律性不适用于少数或个别的分子,它是对大量分子的整体而言的.为了研究大量气体分子的运动规律,人们采用统计的方法求出与其运动有关的物理量的平均值,如平均能量、平均速度、平均碰撞次数等,从而就能对与其热运动相关联的宏观现象做出微观解释.

下面以理想气体的微观模型为研究对象,运用牛顿定律,采取求平均值的统计方法来推导理想气体的压强公式.

一、理想气体的压强公式

在大雨中撑伞会感到有一股压力,这是由于大量密集的雨滴不断撞击雨伞.形成气体压强的原因与此类似,气体作用于容器壁的压力是气体中大量分子不断碰撞器壁的结果.就单个分子而言,每次碰撞给予容器壁的冲量大小及作用在何处等都是随机的,但是就大量分子整体而言,任何时刻都有很多分子与容器壁碰撞,平均效果表现为容器壁受到一个持续的、均匀的压力.本节我们将用统计方法寻找理想气体的压强与相应微观量的统计平均值之间的关系,并阐明压强的微观本质.

关于理想气体,上一节中已经给出了宏观上的定义.为了从微观上解释气体的压强,需要从理想气体的分子结构及运动特征出发,对理想气体的微观模型做出一些假设,然后进行理论推导,最后将导出的结论与实验结果进行比较并判断假设是否正确.

在理想气体微观模型的基础上,可以定量推导理想气体的压强公式.

为了计算方便,可选一个边长分别为 l_1 、 l_2 和 l_3 的长方体容器来讨论.假设容器中有 N 个同类气体分子,每个分子的质量均为 m .由于气体处于平衡态时各处的压强都相等,因此只需要计算容器中任何一个器壁受到的压强就可以了.如图 6-2 所示,这里计算与 Ox 轴垂直的壁面 A_1 所受的压强.

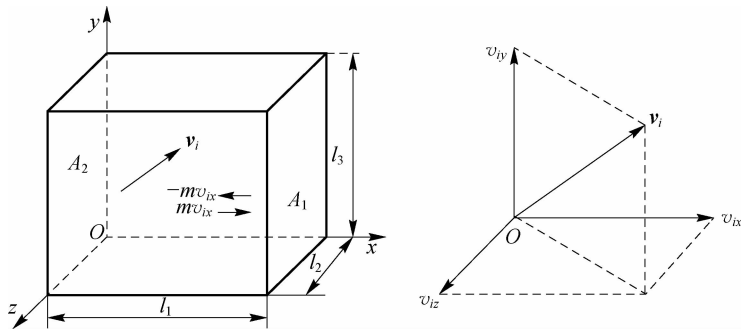


图 6-2 推导压强公式

第二篇 热 学

在大量分子中,任选一分子 a ,假设其速度为 v_i ,而且 v_i 在直角坐标系中的分量分别为 v_{ix} 、 v_{iy} 和 v_{iz} . 当与壁面 A_1 碰撞时,分子 a 将受到壁面 A_1 沿 Ox 轴负方向的作用力. 根据理想气体的微观模型假设,分子与器壁之间的碰撞是完全弹性的,因此在壁面 A_1 对它的作用下,分子 a 在 Ox 轴上的动量由 mv_{ix} 变为 $-mv_{ix}$. 这样,分子 a 每与 A_1 面碰撞一次,它在 Ox 轴上的动量增量为

$$\Delta p_{ix} = (-mv_{ix}) - mv_{ix} = -2mv_{ix}$$

由动量定理可知,该动量增量等于壁面 A_1 沿 Ox 轴负方向给予分子 a 的冲量. 根据牛顿第三定律,分子 a 对壁面 A_1 也必有一个大小相等方向相反的力的冲量,力的方向沿 Ox 轴正方向. 分子 a 对器壁的碰撞是间歇的,因此它作用在器壁上的力也是间歇的、不连续的. 就 x 轴方向的运动来看,分子 a 以 $-v_{ix}$ 从 A_1 面弹回,飞向 A_2 面并与 A_2 面碰撞后,又以 v_{ix} 回到 A_1 面再次碰撞. 在与 A_1 面连续两次碰撞之间,分子 a 在 x 方向经过的路程为 $2l_1$,由于分子 a 在 x 轴方向的速度分量 v_{ix} 的大小不变,因此所用时间为 $\frac{2l_1}{v_{ix}}$. 则在单位时间内,分子 a 与 A_1 面碰撞的次数为 $\frac{v_{ix}}{2l_1}$ 次. 由于每碰撞一次,分子 a 作用在壁面 A_1 上的冲量是 $2mv_{ix}$,因此在此单位时间内,分子 a 作用在壁面 A_1 上的总冲量为 $2mv_{ix} \frac{v_{ix}}{2l_1}$,根据力学知识可知,分子 a 在单位时间内给 A_1 面的总冲量也就是它作用在 A_1 面上的平均冲力,即

$$\bar{F}_{ix} = 2mv_{ix} \frac{v_{ix}}{2l_1} = \frac{mv_{ix}^2}{l_1}$$

上面讨论的是一个分子对 A_1 面的碰撞,实际上容器内所有分子都会与 A_1 面发生碰撞,从而使容器壁受到一个连续而均匀的平均冲力. 这个力的大小应等于所有分子作用在 A_1 面上的力的平均值之和,即

$$\bar{F}_x = \sum_{i=1}^N \bar{F}_{ix} = \frac{m}{l_1} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2$$

由压强的定义可得

$$p = \frac{\bar{F}_x}{l_2 l_3} = \frac{m}{l_1 l_2 l_3} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 = \frac{mN}{l_1 l_2 l_3} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{ix}^2 \right)$$

因为气体的体积 $V=l_1 l_2 l_3$,所以 $\frac{N}{l_1 l_2 l_3}$ 为分子数密度,即 $n=\frac{N}{l_1 l_2 l_3}$. 而括号内的量就是前面定义的 N 个分子沿 x 方向速度分量的平方的平均值,即 $\overline{v_x^2}$,则上式可写为

$$p = nm \overline{v_x^2}$$

将式(6-5)代入上式,可得

$$p = \frac{1}{3} nm \overline{v^2} = \frac{2}{3} n \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) \quad (6-6)$$

如果用 $\bar{\epsilon}_k$ 表示分子的平均平动动能,即 $\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$,那么上式为

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_k \quad (6-7)$$

式(6-7)就称为理想气体的压强公式. 由式(6-7)可以看出,气体作用于器壁的压强正比于单位体积内的分子数 n 和分子的平均平动动能 $\bar{\epsilon}_k$. n 和 $\bar{\epsilon}_k$ 越大,压强 p 也就越大.

压强公式给出了宏观量 p 与微观量的统计平均值 $\bar{\epsilon}_k$ 之间的关系,表明压强是大量分子的集体行为,具有统计意义,对个别分子或少量分子讨论压强是毫无意义的。 p 和 n 可以直接由实验测得,但 $\bar{\epsilon}_k$ 是不能直接测定的,因而压强公式无法直接通过实验来验证。但是从此公式出发,得出的各种结论与实验是高度一致的,说明我们对压强的理论解释及理想气体平衡态的统计性假设都是合理的。另外,从压强公式的结果来看,该结果与推导时采用的容器形状无关。例如,若采用球形容器来推导理想气体的压强,则最终表达式肯定是与式(6-6)相同的。

压强公式的推导过程代表性地说明了统计力学的任务和研究方法,人们不仅要记住它的结论,而且要知道它的推导步骤。推导理想气体压强公式的基本步骤如下:

(1)利用理想气体分子的微观模型,考虑一个分子在单位时间内对器壁的碰撞而产生的平均冲力。

(2)计算所有分子在单位时间内对器壁的平均冲力。

(3)利用压强的定义式 $p = \frac{F}{S}$ 及大量分子热运动的统计规律,推导出压强公式。

二、温度的微观本质

1. 温度公式

根据理想气体的压强公式和状态方程,可以得到气体的温度与分子的平均平动动能之间的关系,从而揭示温度这一宏观量的微观本质。

将式(6-2)与理想气体的压强公式

$$p = \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{2}m\bar{v}^2\right) = \frac{2}{3}n\bar{\epsilon}_k$$

相比较,可得分子的平均平动动能为

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT \quad (6-8)$$

式(6-8)就是理想气体分子的平均平动动能与温度的关系式。与理想气体的压强公式一样,它也是统计力学的基本公式之一。式(6-8)表明,气体分子的平均平动动能只与温度有关,而且与热力学温度 T 成正比。换句话说,上式揭示了宏观量温度的微观本质,即气体的温度是气体分子平均平动动能的量度。气体的温度越高,分子的平均平动动能越大,从而分子无规则热运动的程度越剧烈。由于分子的平均平动动能是对大量分子热运动动能统计平均的结果,因此,温度是表征大量分子无规则热运动剧烈程度的宏观物理量,是大量分子热运动的集体表现,具有统计意义。

由式(6-8)可以看出,在同一温度下,各种气体分子的平均平动动能均相等,而与气体的种类无关。若某种气体的温度较高,则该气体分子的平均平动动能较大。按照这个观点,当热力学温度 $T \rightarrow 0$ 时, $\bar{\epsilon}_k \rightarrow 0$, 气体分子的热运动将完全停止。然而,事实上绝对零度是永远不可能达到的,因而分子的运动是永远不会停息的。

利用式(6-8),可以计算出任何温度下理想气体分子的平均平动动能 $\bar{\epsilon}_k$ 。计算表明, $\bar{\epsilon}_k$ 一般是很小的。例如,当 $T=300\text{ K}$ 时, $\bar{\epsilon}_k$ 约为 $6.21 \times 10^{-21}\text{ J}$,即使理想气体的温度高达 10^8 K , $\bar{\epsilon}_k$ 也只有 $2.07 \times 10^{-15}\text{ J}$ 。但因为气体的分子数密度很大,因而气体分子的平均平动动能的总和还是很大的。例如,当 $T=300\text{ K}$, $p=1.013 \times 10^5\text{ Pa}$ 时,由式(12-2)可得分子数密度为

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} = 2.45 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

则在 1 m^3 的体积内, 气体分子的平均平动动能的总和为

$$\bar{E}_k = n\bar{\epsilon}_k = 2.45 \times 10^{25} \times 6.21 \times 10^{-21} = 1.52 \times 10^5 \text{ J/m}^3$$

可见, 这个能量很大.

2. 气体分子的方均根速率

根据理想气体分子平均平动动能与温度的关系, 可以求出理想气体分子的方均根速率 $\sqrt{\bar{v}^2}$, 它是气体分子速率的一种统计平均值.

由

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$$

可得

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (6-9)$$

上式表明, 气体分子的方均根速率与温度的平方根成正比, 与气体摩尔质量的平方根成反比. 同一种气体, 温度越高, 方均根速率越大; 不同气体在同一温度下, 分子质量或摩尔质量越大, 方均根速率越小. 例如, 在 0°C 时, 虽然氢分子和氧分子的平均平动动能相等, 均为

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 273 = 5.65 \times 10^{-21} \text{ J}$$

但由于 $M_{\text{H}_2} < M_{\text{O}_2}$, 所以氢分子的方均根速率大于氧分子的方均根速率.

表 6-1 列出了几种气体在 0°C 时的方均根速率, 从中可以大致了解分子速率的情况.

表 6-1 0°C 时气体分子的方均根速率

气体种类	方均根速率/(m/s)	摩尔质量/(10^{-3} kg/mol)
O_2	4.61×10^2	32.0
N_2	4.93×10^2	28.0
H_2	1.84×10^3	2.02
CO	4.93×10^2	28.0
CO_2	3.93×10^2	44.0
H_2O	6.15×10^2	18.0

【例 6-2】 若分子质量为 $5 \times 10^{-26} \text{ kg}$ 的某种气体分子有 10^{23} 个, 存储于 1 L 的容器中, 它的方均根速率为 400 m/s , 问气体的压强是多少? 这些分子总的平均平动动能是多少? 温度是多少?

$$\begin{aligned} \text{解: } \textcircled{1} p &= \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_k = \frac{2N}{3V} \cdot \frac{1}{2} m_0 \bar{v}^2 = \frac{2}{3} \times \frac{10^{23}}{10^{-3}} \times \frac{1}{2} \times 5 \times 10^{-26} \times 400^2 \\ &= 2.67 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$ 这些分子总的平均平动动能为

$$E_k = N\bar{\epsilon}_k = N \frac{1}{2} m_0 \bar{v}^2 = 10^{23} \times \frac{1}{2} \times 5 \times 10^{-26} \times 400^2 = 400 \text{ J}$$

③根据 $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2}kT$ 得气体的温度为

$$T = \frac{2\bar{\epsilon}_k}{3k} = \frac{2}{3k} \cdot \frac{1}{2} m_0 \bar{v}^2 = \frac{5 \times 10^{-26} \times 400^2}{3 \times 1.38 \times 10^{-23}} = 193 \text{ K}$$

三、能量均分定理 理想气体的内能

在讨论大量气体分子的无规则热运动时,人们把分子视为质点,只考虑了分子的平动.事实上,实际的气体分子都有一定的大小和比较复杂的结构.这样,分子的运动除平动外,还存在着转动和分子内原子间的振动等多种形式的运动,每种运动形式也都具有相应的能量.因此,在讨论实际气体分子的热运动能量时,必须考虑分子的内部结构.为了确定分子各种运动形式的能量统计规律,并在此基础上计算理想气体的内能,需要引入自由度的概念.

1. 自由度

确定一个物体在空间的位置所需要的独立坐标数目称为该物体的自由度,常用 i 来表示.

对于在空间自由运动的质点,其位置需要用三个独立坐标来表示.例如,可以用直角坐标系中的 x 、 y 、 z 来描述.因此,它的自由度 $i=3$.若质点被限制在一个平面或曲面上运动,其自由度将减少,这时只需要两个独立坐标就可以确定它的位置,故自由度 $i=2$.若质点被限制在一条直线或曲线上运动,则它的位置只需一个坐标就可以确定,故自由度 $i=1$.如果把飞机、轮船、火车都看作质点,那么它们的自由度就分别为 3、2、1.下面根据上述概念来讨论各种分子的自由度.

分子是由原子组成的,按每个分子含有原子的多少,可将气体分子分为单原子分子(如 He、Ne、Ar 等)、双原子分子(如 H_2 、 O_2 、 N_2 等)和多原子分子(如 H_2O 、 NH_3 、 CH_4 等).由两个或两个以上的原子组成的分子,当原子间的相对位置保持不变(不振动)时,称为刚性分子,否则称为非刚性分子,非刚性分子的准确讨论涉及量子力学的内容,这里只讨论刚性分子的自由度.

对于单原子分子,可将其视为质点,其运动形式只有平动,确定它的位置需要三个独立坐标,即 (x, y, z) ,如图 6-3(a)所示.所以单原子分子的自由度为 3,也称为三个平动自由度.

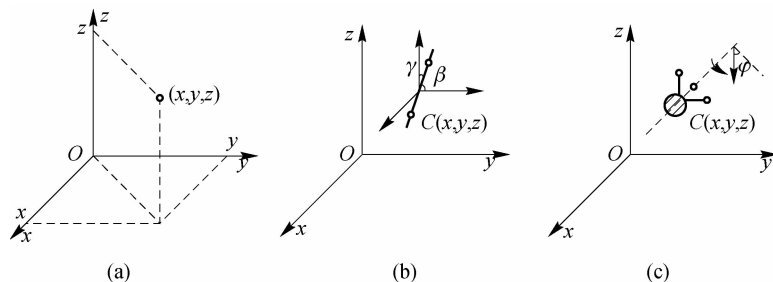


图 6-3 分子运动的自由度

对于刚性双原子分子,两个原子是由一根键连接起来的,因此,双原子分子可用一根质量可忽略的杆及两个质点构成的模型(哑铃型)来表示,如图 6-3(b)所示.这时,分子的运动可看作随质心 C 的平动和绕通过质心的轴的转动(刚性双原子分子以两原子的连线为轴).

第二篇 热 学

显然,除了需要用三个独立坐标(x, y, z)来确定其质心的位置外,还需要确定两原子的连线在空间的方位. 一条直线在空间的方位可用它与 x 轴、 y 轴和 z 轴的夹角 α, β 和 γ 来表示,但这三个方位角满足以下关系:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

所以只有两个方位是独立的. 另外,因两个原子都被视为质点,故绕轴的转动没有意义. 因此,刚性双原子分子共有五个自由度,其中三个平动自由度,两个转动自由度.

对于刚性多原子分子,除了三个平动自由度和两个转动自由度外,还需要增加一个绕轴自转的自由度,常用转角 φ 表示,如图 6-3(c)所示. 因此,刚性多原子分子有三个平动自由度和三个转动自由度,共有六个自由度. 通常用 i 表示分子的总自由度,用 t 表示平动自由度,用 r 表示转动自由度,则 $i=t+r$. 表 6-2 给出了以上三类分子的自由度.

表 6-2 三类分子的自由度

分子种类	平动自由度 t	转动自由度 r	总自由度 i
单原子分子	3	0	3
刚性双原子分子	3	2	5
刚性多原子分子	3	3	6

在常温下,大多数气体分子都可视为刚性分子.

2. 能量均分定理

前面已经得出理想气体分子的平均平动动能为

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$$

式中, $\bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2$. 根据理想气体的统计假设,当气体处于平衡态时,分子向各个方向运动的机会相等,即

$$\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = \frac{1}{3} \bar{v}^2$$

从而

$$\frac{1}{2} m \bar{v}_x^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}_y^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}_z^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} m \bar{v}^2 \right) = \frac{1}{2} kT \quad (6-10)$$

式(6-10)表明,在平衡态下,气体分子沿 x, y, z 三个方向运动的平均平动动能完全相等. 也就是说,分子的平均平动动能 $\frac{3}{2} kT$ 是均匀地分配于每个平动自由度上的. 由表 6-2 可以看出,不管是哪一类气体分子,它们的平动自由度都为 3. 因此可以得出一个重要的结论:在平衡态下,气体分子每个平动自由度具有相同的平均动能,且大小都等于 $\frac{1}{2} kT$. 这是一条统计规律,只适用于大量分子的集体.

在平衡态下,气体分子做无规则的运动和碰撞,任何一种运动形式的机会是完全相等的,即没有哪一种运动形式比其他运动形式占优势. 因此,可以把平动动能的统计规律推广到分子有转动的情况,从而得到更为一般的结论:在温度为 T 的平衡态下,气体分子每个自由度的平均动能都相等,其大小都等于 $\frac{1}{2} kT$. 这个结论就称为能量按自由度均分定理,简称

能量均分定理. 根据这个定理,若气体分子的自由度为 i ,则分子的平均总动能为

$$\bar{\epsilon} = \frac{i}{2}kT \quad (6-11)$$

能量均分定理是关于分子热运动动能的统计规律,是对大量分子统计平均的结果.对个别分子来说,任一瞬时它的各种形式的动能和总的动能可能与能量均分定理所确定的平均值有很大差别,而且每种形式的动能也不一定按自由度均匀分配.但对大量分子整体来说,动能之所以会按自由度均分是依靠分子频繁的无规则碰撞来实现的.在碰撞过程中,一个分子的动能可以传递给另一个分子,一种形式的动能可以转化为另一种形式的动能,而且动能还可以从一个自由度转移到另一个自由度.若分配于某一种运动形式或某一个自由度上的能量多了,则在碰撞时能量由这种运动形式或这一自由度转移到其他运动形式或其他自由度的概率就比较大.因此,在达到平衡状态时,就形成能量按自由度均匀分配的统计规律.在经典物理学中,能量均分定理也适用于达到平衡态的液体和固体分子.

3. 理想气体的内能

对于实际气体来说,除了分子各种形式的动能和分子内原子间的振动势能之外,由于分子之间存在相互作用力,因此气体的分子之间还具有相互作用的势能.组成气体的所有分子各种形式的动能与势能的总和,称为气体的内能.对于理想气体来说,因为不考虑分子之间的相互作用力,所以分子之间相互作用的势能也就忽略不计.因此,理想气体的内能就是组成它的所有分子各种形式的动能与分子内原子间振动势能的总和.对于刚性分子则不考虑原子间的振动,一般在常温下,理想气体分子都可视为刚性分子(除个别分子外,如 Cl_2),因此,由刚性分子组成的理想气体的内能就是所有分子各种形式的动能(平动动能和转动动能)的总和.下面只讨论由刚性分子组成的理想气体的内能.

设理想气体分子的自由度为 i ,由式(6-11)可知每个分子的平均总动能为 $\frac{i}{2}kT$,而 1 mol 理想气体的分子数为 N_A ,则 1 mol 理想气体的内能为

$$E_0 = N_A \left(\frac{i}{2}kT \right) = \frac{i}{2}RT \quad (6-12)$$

而质量为 m' 、摩尔质量为 M 的理想气体的内能为

$$E = \frac{m'}{M} \cdot \frac{i}{2}RT = \nu \frac{i}{2}RT \quad (6-13)$$

式(6-13)为理想气体内能的一般表达式,其中 $\nu = \frac{m'}{M}$ 为理想气体的摩尔数.

对单原子分子理想气体: $i=3, E_0 = \frac{3}{2}RT, E = \nu \frac{3}{2}RT$.

对刚性双原子分子理想气体: $i=5, E_0 = \frac{5}{2}RT, E = \nu \frac{5}{2}RT$.

对刚性多原子分子理想气体: $i=6, E_0 = \frac{6}{2}RT, E = \nu \frac{6}{2}RT$.

以上结果表明,对于一定量的理想气体,其内能完全取决于分子运动的自由度 i 和气体的热力学温度 T ,而与气体的体积和压强无关.对给定的气体来说(m', M 和 i 都一定),它的内能只取决于它的温度,即理想气体的内能是温度 T 的单值函数,而且与温度 T 成正比.可见,内能是一种状态量,只要系统的状态确定了,其状态参量 p, V, T 就为定值,那么相应的

第二篇 热 学

内能也就确定了. 若系统的状态发生变化, 则系统的内能也将发生变化, 但在任何状态变化过程中, 只要温度的变化量相同, 内能的变化量就相等, 而与状态变化所经历的具体过程无关. 例如, 当气体的温度改变 ΔT 时, 其内能的变化量为

$$\Delta E = \frac{m'}{M} \cdot \frac{i}{2} R \Delta T = \nu \frac{i}{2} R \Delta T \quad (6-14)$$

应该注意, 内能与力学中的机械能有明显的区别. 静止在地球表面上的物体, 其机械能(动能和重力势能)可以为零, 但物体内部的分子仍然在做无规则的运动并相互作用着, 因此内能永远不会等于零. 物体的机械能是一种宏观能, 它取决于物体的宏观运动状态; 而内能是一种微观能, 它取决于物体的微观运动状态.

【例 6-3】 一容器内贮存有理想气体氧气, 其压强 $p = 1.00 \text{ atm}$, 温度 $t = 27.0 \text{ }^\circ\text{C}$, 体积 $V = 2.00 \text{ m}^3$. 求:

- ① 氧分子的平均平动动能 $\bar{\epsilon}_k$;
- ② 氧分子的平均总动能 $\bar{\epsilon}$;
- ③ 氧气的内能 E .

解: 氧分子为双原子分子, 其自由度 $i = 5$, 其中平动自由度 $t = 3$, 由能量均分定理和理想气体的内能公式, 可得

$$\text{① } \bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times (27 + 273) = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J.}$$

$$\text{② } \bar{\epsilon} = \frac{i}{2} kT = \frac{5}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times (27 + 273) = 1.04 \times 10^{-20} \text{ J.}$$

$$\text{③ } E = \nu \frac{i}{2} RT = \frac{5}{2} \nu RT.$$

氧气的物质的量 ν 是未知的, 根据理想气体状态方程 $pV = \nu RT$, 可得

$$E = \frac{5}{2} \nu RT = \frac{5}{2} pV = \frac{5}{2} \times 1.00 \times 1.013 \times 10^5 \times 2.00 = 5.06 \times 10^5 \text{ J}$$

【例 6-4】 体积为 $2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ 的刚性双原子分子理想气体, 其内能为 $6.75 \times 10^2 \text{ J}$. ① 求气体的压强; ② 设分子总数为 5.4×10^{22} 个, 求分子的平均平动动能及气体的温度.

解: ① 由理想气体的内能公式 $E = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} RT$ 和理想气体的状态方程 $pV = \frac{m}{M} RT$ 可得

$$E = \frac{i}{2} pV$$

即

$$p = \frac{2E}{iV} = \frac{2 \times 6.75 \times 10^2}{5 \times 2 \times 10^{-3}} = 1.35 \times 10^5 \text{ Pa}$$

② 内能中有 $\frac{3}{5}$ 为平动动能, $\frac{2}{5}$ 为转动动能. 因此, 分子的平均平动动能为

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{5} \times \frac{E}{N} = \frac{3}{5} \times \frac{6.75 \times 10^2}{5.4 \times 10^{22}} = 7.5 \times 10^{-21} \text{ J}$$

由 $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2} kT$ 得

$$T = \frac{2\bar{\epsilon}_k}{3k} = \frac{2 \times 7.5 \times 10^{-21}}{3 \times 1.38 \times 10^{-23}} = 362 \text{ K}$$

四、麦克斯韦速率分布律

由前面对热运动的讨论可知,气体分子是以各种大小的速度沿各个方向运动着的,而且气体系统包含的分子数目是十分巨大的,这些数目巨大的做无规则热运动的分子之间必然要产生极其频繁的碰撞.由于分子间的频繁碰撞,分子的速度大小和方向时刻不停地发生变化.对某一个分子而言,其他分子对它的碰撞是偶然的,因而它的速度如何变化也是无法预言的,它的速率可以取零到无穷大之间的任意可能值.然而由式(6-9)可以看出,在给定温度 T 的情况下,气体分子的方均根速率是确定的.这就意味着,在给定温度下,处于平衡态的气体,虽然个别分子的速率是偶然的,但是,对大量分子的整体来说,分子的速率分布却遵循着一定的统计规律.气体分子速率分布的统计规律最早是由麦克斯韦在 1859 年应用概率统计理论导出的,后来于 1877 年由玻尔兹曼从经典统计力学中导出.由于受当时技术条件(如高真空技术、测量技术等)的限制,气体分子速率分布的实验工作直到 1920 年才由斯特恩首次实现.我国物理学家葛正权在 1934 年也用实验验证了这条规律.

1. 测定气体分子速率分布的实验

继斯特恩之后,测定分子速率分布的实验装置有了不少改进,图 6-4 所示为其中一种比较典型的装置,整个装置放在高真空的容器中.图中 A 是产生金属蒸气分子的气源(金属蒸气可用电炉将金属加热而得到),蒸气分子(如 Hg 蒸气)从 A 侧面的小孔射出,通过狭缝 S 后形成一束很窄的分子射线. B 和 C 是两个相距为 l 的共轴圆盘,盘上各开一个很窄的狭缝,两狭缝成一个很小的夹角 θ , θ 约为 2° . P 是一个接收分子的显示屏.

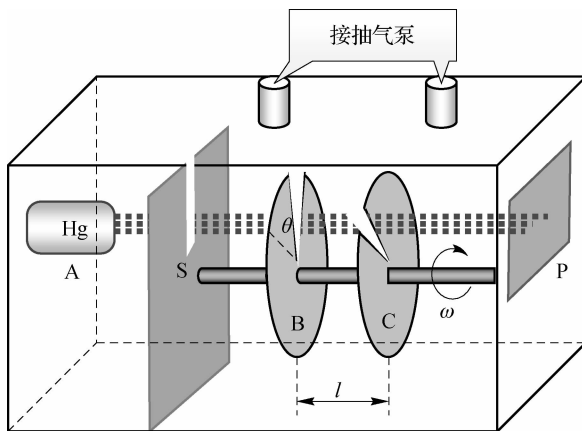


图 6-4 测定气体分子速率的实验装置

当圆盘以角速度 ω 转动时,圆盘每转一周,分子射线通过 B 的狭缝一次.由于分子的速度大小不同,分子从 B 到 C 所需的时间也不一样,因此并非所有通过 B 盘狭缝的分子都能通过 C 盘狭缝而射到显示屏 P 上.假设分子的速率为 v ,分子从 B 到 C 所需的时间为 t ,则只有满足 $vt=l$ 和 $\omega t=\theta$ 的分子才能通过 C 的狭缝,最终射到显示屏 P 上.消去以上两个关系式中的 t ,可得

$$v = \frac{\omega l}{\theta}$$

可见,圆盘 B 和 C 起着速率选择器的作用.当改变角速度 ω (或改变两圆盘间距离 l 、两

狭缝夹角 θ) 时, 可以使不同速率的分子通过. 因为 B、C 两盘上的狭缝都有一定的宽度, 所以实际上当 ω 一定时, 能射到显示屏 P 上的分子的速率并不完全相同, 而是分布在 $v \sim v + \Delta v$ 的速率区间.

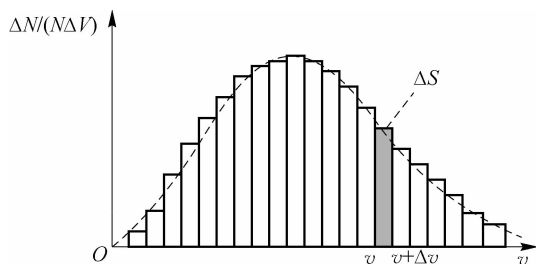


图 6-5 分子速率分布情况

实验时, 令圆盘以不同的角速度 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 、 \dots 转动, 用光度学的方法可以测量出每次沉积在屏上的金属层的厚度, 这些厚度对应于不同速率区间内的分子数. 分析比较这些厚度, 就可以知道在分子射线中, 不同速率区间内的分子数 ΔN 占总分子数 N 的百分比, 这个比值就是气体分子出现在速率区间 $v \sim v + \Delta v$ 内的概率. 图 6-5 所示为分析实验结果做出的分子速率分布的情况, 图中一块块小长方形面

积表示分子在各速率区间内出现的概率. 例如, 阴影部分的面积 ΔS 就表示分子在速率区间 $v \sim v + \Delta v$ 内出现的概率.

实验表明, 分子分布在不同速率区间内的概率是不同的, 但在实验条件(如分子射线强度、温度等)不变的情况下, 分布在给定速率区间内的概率却是完全确定的. 这说明虽然个别分子的速率等于多少是偶然的, 但对大量分子的整体而言, 其速率分布却遵循一定的规律, 即统计分布规律.

2. 麦克斯韦速率分布律的内容

麦克斯韦根据气体在平衡态下分子热运动具有各向同性的特点, 应用概率论的方法, 导出了在平衡态下气体分子按速率分布的统计规律. 为了描述气体分子按速率分布的情况, 需要引入速率分布函数的概念.

(1) 速率分布函数. 令 N 表示一定量气体的总分子数, ΔN 表示速率分布在某一区间 $v \sim v + \Delta v$ (如 $500 \sim 510$ m/s 或 $600 \sim 610$ m/s) 内的分子数, 则 $\frac{\Delta N}{N}$ 就表示分布在这一速率区间内的分子数占总分子数的百分比. 显然, 一方面, 在不同的速率 v (如 500 m/s 和 600 m/s) 附近取相等的速率间隔 Δv (如 10 m/s), 比率 $\frac{\Delta N}{N}$ 的数值是不同的. 也就是说, $\frac{\Delta N}{N}$ 与速率 v 有关, 应该是速率 v 的函数. 另一方面, 在给定的速率 v 附近, 若所取的速率间隔 Δv 越大, 则分布在这个速率区间内的分子数就越多, 百分比 $\frac{\Delta N}{N}$ 也就越大. 当 Δv 足够小时, 可用 dv 表示, 相应的 ΔN 则用 dN 表示, 比率 $\frac{dN}{N}$ 的大小显然与间隔 dv 的大小成正比, 因此, 应该有

$$\frac{dN}{N} = f(v) dv$$

或

$$f(v) = \frac{dN}{N dv} \quad (6-15)$$

式(6-15)中的函数 $f(v)$ 称为速率分布函数. 它的物理意义是: 在速率 v 附近, 单位速率间隔内的分子数占总分子数的百分比(比率), 也常表述为分子在速率 v 附近单位速率区间

内出现的概率,故 $f(v)$ 也称为分子速率分布的概率密度. 对于任意一个分子来说, 它的速率是多少完全是偶然的, 但从整体上来说却具有一定的概率分布. 只要给出了速率分布函数, 整个系统分子的速率分布就完全确定了.

(2) 麦克斯韦速率分布函数. 式(6-15)是速率分布函数的物理意义. 1859年, 麦克斯韦经过理论研究指出, 在平衡状态下, 理想气体分子分布在任一速率区间 $v \sim v + dv$ 内的分子数占总分子数的百分比为

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv \quad (6-16)$$

结合式(6-15), 可得麦克斯韦速率分布函数为

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \quad (6-17)$$

式中, T 为气体的热力学温度; m 为分子的质量; k 为玻尔兹曼常数. 以上结论称为麦克斯韦速率分布律.

由麦克斯韦速率分布函数可以看出, 对给定的气体, 速率分布函数只与温度有关. 以速率 v 为横坐标, $f(v)$ 为纵坐标画出的曲线称为麦克斯韦速率分布曲线, 如图 6-6 所示. 它能形象地表示出气体分子按速率分布的情况. 由式(6-15)可知, 图中任一速率区间 $v \sim v + dv$ 内曲线下的窄条面积为

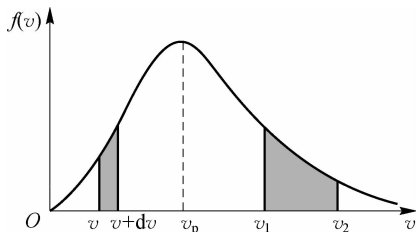


图 6-6 速率分布曲线

$$f(v)dv = \frac{dN}{Ndv}dv = \frac{dN}{N}$$

上式表示该区间内的分子数占总分子数的百分比, 即分子在速率区间 $v \sim v + dv$ 内出现的概率. 而且在不同的区间内, 窄条的面积不相同, 这说明, 不同区间内的分子数占总分子数的百分比是不相同的. 而在任一有限速率区间 $v_1 \sim v_2$ 内曲线下的面积可用积分法求出, 即

$$\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv = \frac{\Delta N}{N}$$

上式表示速率在 $v_1 \sim v_2$ 区间内的分子数占总分子数的百分比. 显然, 整个曲线下的面积就表示分布在 $0 \sim \infty$ 整个速率区间内的分子数占总分子数的百分比, 因为全部分子都分布在 $0 \sim \infty$ 整个速率区间内, 所以这个百分比应等于 1, 即

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1 \quad (6-18)$$

上式是由速率分布函数 $f(v)$ 本身的物理意义所决定的, 它是速率分布函数必须满足的条件, 通常称为速率分布函数的归一化条件.

(3) 三种统计速率. 从麦克斯韦速率分布曲线可以看出, 气体分子的速率可以取零到无穷大之间的任一数值, 但在速率区间大小相同的情况下, 速率很大和速率很小的分子所占的百分比都很小, 具有中等速率的分子所占的百分比却很大. 下面讨论三种具有代表性的分子速率, 它们是分子速率的三种统计平均值.

① 最概然速率 v_p . 由速率分布函数 $f(v)$ 与 v 的关系曲线可以看出, 曲线从原点出发, 开始时, $f(v)$ 随 v 的增大而增大, 经过一个极大值之后, 随着 v 的继续增大, $f(v)$ 减小并逐渐趋于零. 与 $f(v)$ 的极大值相对应的速率称为最概然速率, 通常用 v_p 表示(见图 6-6). v_p 的物理

第二篇 热 学

意义是:如果把气体分子的速率分成许多相等的速率间隔,那么在一定温度下,分布在最概然速率 v_p 附近单位速率间隔内的分子数占总分子数的百分比最大. 根据极值存在的条件

$\frac{d}{dv}f(v)=0$, 可求出最概然速率为

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \approx 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}} \quad (6-19)$$

式(6-19)表明, v_p 随温度的升高而增大, 又随气体摩尔质量的增大而减小. 对于给定的气体(摩尔质量 M 一定), 分布曲线的形状随温度的不同而发生变化; 而在同一温度下, 分布曲线的形状随气体的不同(摩尔质量 M 不同)而不同. 图 6-7 画出了同种气体在不同温度下的速率分布曲线, 由于温度越高, 最概然速率 v_p 越大, 因此图中虚线与较高的温度相对应, 即 $T_2 > T_1$. 温度的高低反映了气体分子做无规则运动的剧烈程度, 当温度升高时, 分子的无规则运动加剧, 气体分子的速率普遍增大, 从而最概然速率变大, 所以曲线的峰值移向速率大的一方. 但是根据归一化条件, 曲线下的总面积恒等于 1, 因此分布曲线在宽度增大的同时, 高度降低, 整个曲线将变得较为平坦.

图 6-8 中的曲线为同一温度下不同气体的速率分布曲线. 由式(6-19)可知, 最概然速率 v_p 与气体摩尔质量的平方根 \sqrt{M} 成反比, 所以可以判断出虚线与摩尔质量较小的气体相对应, 即 $M_2 < M_1$.

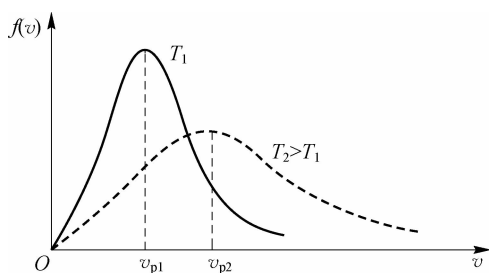


图 6-7 同种气体在不同温度下的速率分布曲线

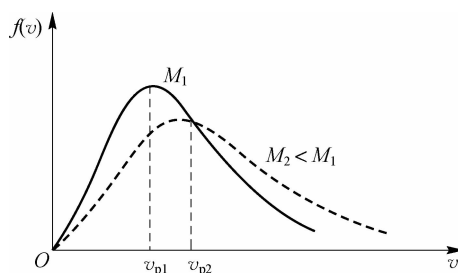


图 6-8 不同气体在同一温度下的速率分布曲线

②平均速率 \bar{v} . 大量分子的速率的算术平均值称为**平均速率**, 通常用 \bar{v} 表示. 根据式(6-15), 分布在任一速率 v 附近 dv 间隔内的分子数为

$$dN = Nf(v)dv$$

因为 dv 很小, 所以可以近似地认为这 dN 个分子的速率是相同的, 都等于 v , 这样, 这 dN 个分子的速率的总和就是 $v dN = v N f(v) dv$. 把这个结果对所有可能的速率间隔求和, 就得到全部分子的速率的总和, 再除以总分子数 N , 即可求出分子的平均速率 \bar{v} . 考虑到分子的速率是连续分布的, 应该用积分代替求和, 所以有

$$\bar{v} = \frac{\int_0^{\infty} v N f(v) dv}{N} = \int_0^{\infty} v f(v) dv \quad (6-20)$$

式(6-20)是利用速率分布函数求整个区间平均速率的一般表达式, 对于平衡状态下的理想气体分子, 可将麦克斯韦速率分布函数, 即式(6-17)代入式(6-20), 得

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-mv^2/2kT} v^3 dv$$

令 $\alpha = \frac{m}{2kT}$, 则上式中的积分为

$$\int_0^{\infty} e^{-m^2/2kT} v^3 dv = \int_0^{\infty} e^{-\alpha v^2} v^3 dv$$

利用常用积分公式

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^3 dx = \frac{1}{2\alpha^2}$$

可得平均速率为

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \approx 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M}} \quad (6-21)$$

③方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}$. 与求平均速率的方法类似, 速率平方的平均值为

$$\overline{v^2} = \frac{\int_0^{\infty} v^2 N f(v) dv}{N} = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv$$

将式(6-17)代入上式并积分, 可得

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}$$

因此, 方均根速率为

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M}} \quad (6-22)$$

这与根据理想气体分子平均平动动能与温度的关系得出的结果完全一致.

可见, 气体分子的三种速率都与 \sqrt{T} 成正比, 与 \sqrt{m} 或 \sqrt{M} 成反比. 在数值上 $\sqrt{\overline{v^2}}$ 最大, \bar{v} 次之, v_p 最小, 如图 6-9 所示. 这三种速率都具有统计平均的意义, 都反映了大量分子做热运动的统计规律, 在不同的问题中各有不同的应用. 例如, 在讨论速率分布情况时, 要用到最概然速率; 在计算分子运动的平均距离时, 要用到平均速率; 在计算分子的平均平动动能时, 则要用到方均根速率. 在室温下, 大部分气体分子的三种速率都为几百米每秒.

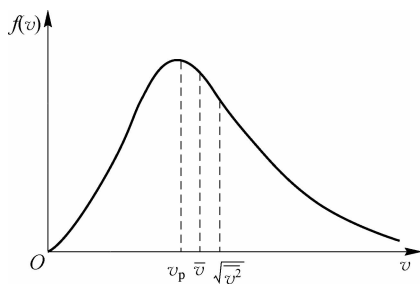


图 6-9 三种统计速率

麦克斯韦速率分布律是统计规律, 因此, 它只对大量分子组成的系统才成立.

【例 6-5】 若某种气体分子在温度 $T_1 = 300 \text{ K}$ 时的方均根速率等于温度为 T_2 时的平均速率, 求 T_2 .

解: 根据已知条件, 可知

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT_1}{M}}, \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT_2}{\pi M}}$$

第二篇 热 学

由于

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \bar{v}$$

即

$$\sqrt{\frac{3RT_1}{M}} = \sqrt{\frac{8RT_2}{\pi M}}$$

则

$$T_2 = \frac{3\pi}{8} T_1 = \frac{3 \times 3.14}{8} \times 300 = 353.25 \text{ K}$$

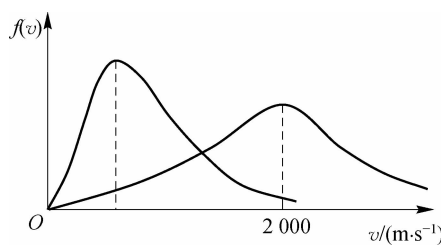


图 6-10 例 6-6 图

【例 6-6】 如图 6-10 所示, 两条曲线分别表示氢气和氧气在同一温度下的麦克斯韦速率分布曲线, 根据图上数据求出氢气和氧气的最概然速率。

解: 由式(6-19)可知, 当 T 一定时, v_p 只与 M 有关且与 \sqrt{M} 成反比. 因为 $M_{\text{H}_2} < M_{\text{O}_2}$, 所以 $(v_p)_{\text{H}_2} > (v_p)_{\text{O}_2}$, 则由图可知

$$(v_p)_{\text{H}_2} = 2000 \text{ m/s}$$

又因为

$$\frac{(v_p)_{\text{H}_2}}{(v_p)_{\text{O}_2}} = \sqrt{\frac{M_{\text{O}_2}}{M_{\text{H}_2}}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4$$

所以

$$(v_p)_{\text{O}_2} = 500 \text{ m/s}$$

本章提要

1. 理想气体的基本公式

(1) 理想气体的状态方程:

$$pV = \frac{m'}{M} RT = \nu RT$$

(2) 理想气体的压强公式:

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_k$$

(3) 理想气体分子的平均平动动能与温度的关系式:

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

(4) 理想气体的内能:

$$E = \frac{m'}{M} \frac{i}{2} RT = \nu \frac{i}{2} RT$$

2. 能量均分定理

在温度为 T 的平衡态下, 气体分子每个自由度的平均动能都相等, 其大小都等于 $\frac{1}{2} kT$.

3. 速率分布律

麦克斯韦速率分布律.

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

4. 三种统计速率

(1) 最概然速率:

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \approx 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

(2) 平均速率:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \approx 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

(3) 方均根速率:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

习 题

6-1 置于容器内的气体,若气体内各处压强相等,或气体内各处温度相同,则这两种情况下气体的状态()。

- A. 一定都是平衡态
- B. 不一定是平衡态
- C. 前者一定是平衡态,后者一定不是平衡态
- D. 后者一定是平衡态,前者一定不是平衡态

6-2 在气体的状态变化过程中,可以保持体积不变或保持压强不变,关于这两种过程的描述,下列正确的是()。

- A. 一定都是平衡过程
- B. 不一定是平衡过程
- C. 前者是平衡过程,后者不是平衡过程
- D. 后者是平衡过程,前者不是平衡过程

6-3 若理想气体的体积为 V ,压强为 p ,温度为 T ,分子的质量为 m_0 , k 为玻尔兹曼常量, R 为摩尔气体常量,则该理想气体的分子数为()。

- A. pV/m_0
- B. $pV/(kT)$
- C. $pV/(RT)$
- D. $pV/(m_0 T)$

6-4 理想气体中仅由温度决定其大小的物理量是()。

- A. 气体的压强
- B. 气体的内能
- C. 气体分子的平均平动动能
- D. 气体分子的平均速率

6-5 温度、压强相同的氮气和氧气,它们的分子平均能量 $\bar{\epsilon}$ 与平均平动动能 $\bar{\epsilon}_k$ 的关系为()。

- A. $\bar{\epsilon}$ 和 $\bar{\epsilon}_k$ 都相等
- B. $\bar{\epsilon}$ 相等,而 $\bar{\epsilon}_k$ 不相等

第二篇 热 学

C. $\bar{\epsilon}_k$ 相等, 而 $\bar{\epsilon}$ 不相等 D. $\bar{\epsilon}$ 和 $\bar{\epsilon}_k$ 都不相等

6-6 三个容器 A、B、C 中装有同种理想气体, 其分子数密度 n 相同, 方均根速率之比为

$\sqrt{v_A^2} = \sqrt{v_B^2} = \sqrt{v_C^2} = 1:2:4$, 则其压强之比 $p_A:p_B:p_C$ 为()。

A. 4:2:1

B. 1:2:4

C. 1:4:8

D. 1:4:16

6-7 一容器内存储有氧气, 其压强为 $p=1.01 \times 10^5$ Pa, 温度为 $t=27$ °C. 求:

(1) 单位体积内的分子数;

(2) 氧气的质量密度;

(3) 氧分子的质量;

(4) 分子间的平均距离(分子所占的空间看作球状);

(5) 氧分子的平均平动动能.

6-8 求在温度为 30 °C 时氧气分子的平均平动动能、平均动能、平均能量及 4.0×10^{-3} kg 的氧气的内能(常温下, 氧气分子可看成刚性分子).

6-9 试由理想气体的压强公式和理想气体的状态方程推导出理想气体分子的平均平动动能与温度的关系式, 再由此推导出方均根速率与温度的关系式.

6-10 某容器中装有质量为 $m=8.0 \times 10^{-3}$ kg 的氧气(视作刚性分子的理想气体), 其温度 $T=300$ K.

(1) 求氧气的内能;

(2) 当对氧气加热到某一温度时, 测得此时的压强为 $p=2.0 \times 10^5$ Pa, 已知容器容积 $V=5.0 \times 10^{-3}$ m³, 求此时氧气的内能.

6-11 质量为 0.1 kg、温度为 27 °C 的氮气, 装在容积为 0.01 m³ 的容器中, 容器以 $v=100$ m/s 的速率做匀速直线运动, 若容器突然停下来, 定向运动的动能全部转化为分子热运动的动能, 则平衡后氮气的温度和压强各增加多少?

6-12 容器内某理想气体的温度 $T=273$ K, 压强 $p=101.3$ Pa, 密度为 $\rho=1.25 \times 10^{-3}$ kg/m³. 求:

(1) 气体的摩尔质量;

(2) 气体分子运动的方均根速率;

(3) 气体分子的平均平动动能和转动动能;

(4) 单位体积内气体分子的总平动动能;

(5) 0.3 mol 该气体的内能.

6-13 20 个质点的速率如下: 2 个具有速率 v_0 , 3 个具有速率 $2v_0$, 5 个具有速率 $3v_0$, 4 个具有速率 $4v_0$, 3 个具有速率 $5v_0$, 2 个具有速率 $6v_0$, 1 个具有速率 $7v_0$. 试计算: 平均速率、方均根速率和最概然速率.

6-14 计算在 27 °C 时氢气分子(视作刚性分子)的平均速率、方均根速率和最概然速率; 氢气分子(视作刚性分子)的自由度是多少?

第一节 热力学第一定律

热力学是研究理想气体热现象和热运动的宏观理论. 热力学的主要理论基础是热力学第一定律和热力学第二定律. 热力学第一定律实质上是包括热现象在内的能量转换和守恒定律.

一、内能 功 热量与热容

1. 内能

前面定义了系统的内能, 内能是指系统内所有粒子的无规则运动能量与粒子间相互作用势能的总和. 实验证明, 系统状态发生变化时, 内能的变化量只决定于系统的初末状态, 而与状态变化所经历的具体过程无关, 即热力学系统在一定状态下应具有一定的内能. 因此, 内能是系统状态的单值函数. 例如, 理想气体的内能 $E = \nu \frac{i}{2} RT$ ($\nu = \frac{m'}{M}$ 为理想气体的摩尔数) 只是温度 T 的单值函数, 即 $E = E(T)$. 当气体的状态参量 p 、 V 、 T 确定后, 气体的内能也就确定了. 总之, 气体的内能是气体状态的单值函数. 本节将用热力学的宏观方法来研究系统的内能, 而无须考虑系统的微观结构, 主要从能量的观点出发来研究系统内能的变化与功和热量之间的关系.

2. 功

外界对系统做功是引起系统状态变化的基本方式之一. 例如, 活塞压缩气体, 活塞对气体做功, 气体的状态发生变化.

在力学中, 人们把功定义为力与位移这两个矢量的标积, 即 $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. 外力对物体做功的结果会使物体的状态发生变化, 在做功的过程中, 它们之间有能量的交换. 在热力学中, 功的概念要广泛得多.

热力学主要以气体为研究对象, 因为非静态过程中气体的状态参量 p 、 V 、 T 不确定, 所以外界对系统所做的功无法定量描述, 一般用实验来测定. 而在准静态过程中, 外界对系统所做的功或系统对外界所做的功都可以利用状态参量来定量计算. 本书只讨论准静态过程中由于气体的体积发生变化而做的功.

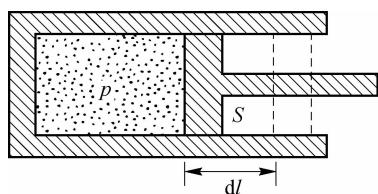


图 7-1 气体膨胀做功

(1)功的计算. 如图 7-1 所示,以气缸中气体的膨胀过程为例来计算准静态过程中系统对外界所做的功. 设活塞面积为 S , 气体的压强为 p , 则作用在活塞上的力为 $F = pS$, 活塞与气缸壁的摩擦忽略不计. 当活塞向外缓慢移动一微小距离 dl 时, 在这一微小的变化过程中, 可认为气体压强为 p , 处处均匀且不变, 因此为准静态过程. 在此过程中, 气体推动活塞对外界所做的元功为

$$dW = Fdl = pSdl = pdV \quad (7-1)$$

式中, $dV = Sdl$ 为活塞移动 dl 时, 气体体积的微小增量. 当气体膨胀时, $dV > 0$, 从而 $dW > 0$, 表示系统对外界做正功; 当气体被压缩时, $dV < 0$, 从而 $dW < 0$, 表示系统对外界做负功, 即外界对系统做正功. 总之, 在同一个准静态过程中, 系统对外界做的功与外界对系统做的功总是大小相等, 方向相反. 若系统的体积不变, 即 $dV = 0$, 则 $dW = 0$, 系统与外界均不做功.

由此可见, 做功是系统与外界相互作用的一种方式, 也是两者能量交换的一种方式. 这种能量交换的方式是通过宏观的有规则运动(如机械运动)来完成的.

若系统的体积经一准静态过程由 V_1 变为 V_2 , 则该过程中系统对外界所做的功为

$$W = \int dW = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (7-2)$$

相应地, 外界对系统所做的功为

$$W' = -W = -\int_{V_1}^{V_2} p dV$$

式(7-1)和式(7-2)就是在准静态过程中, 用状态参量表示的系统对外界做功的表达式. 显然, 只要知道 p 与 V 的关系式, 就能具体求出这个功的数值. 虽然它们是以气缸为例得到的, 但可以证明, 对于任何形状的容器, 系统在准静态过程中对外界所做的功, 都可以用这两个式子来表示.

(2)示功图. 任何一个准静态过程都可以在 p - V 图上用一条曲线来表示, 如图 7-2 所示. 系统在一个准静态过程中所做的功, 也可以在 p - V 图上直观地表示出来. 若系统的状态变化沿图中实线所示的过程进行, 则当系统的体积由 V 变到 $V+dV$ 时, 系统对外界所做的元功 $dW = p dV$ 在数值上就等于 p - V 图上实线下小矩形的面积. 系统从初态 I (p_1, V_1, T_1) 到末态 II (p_2, V_2, T_2) 所做的总功在数值上就等于整条实线下的面积.

由图 7-2 还可以看出, 如果系统的状态变化沿虚线所示的过程进行, 那么系统对外界所做的功在数值上就等于虚线下面的面积. 可见, 在系统的初末状态确定的情况下, 功的具体数值与过程曲线的形状有关, 对应不同的过程曲线, 所做的功(过程曲线下的面积)也不相同. 由此可以得出一个重要的结论: 系统由一个状态变化到另一个状态时, 所做的功不仅与系统的始末状态有关, 而且与系统所经历的具体过程有关. 因此, 功不是状态量, 而是一个过程量.

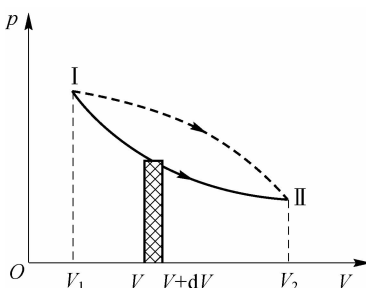


图 7-2 准静态过程

3. 热量与热容

(1) 热量. 实践经验表明, 热力学系统相互作用的另一种方式是热传递. 两个温度不同的系统相互接触后, 热的系统要变冷, 冷的系统要变热, 最后达到热平衡而具有相同的温度. 这种系统间由于热相互作用(或者说由于温度差)而传递的能量称为热量, 一般用 Q 来表示.

在国际单位制中, 内能、功和热量的单位都是焦耳(J). 历史上热量还有一个单位为卡(cal), 根据焦耳的热功当量实验, 这两个单位之间的关系为

$$1 \text{ cal} = 4.18 \text{ J}$$

做功和热传递是改变系统内能的两种常用方式, 它们对内能的改变具有等效性, 但在本质上是有所区别的. 热传递交换能量的方式是通过分子的无规则运动来完成的. 当外界物体与系统相接触时, 不需借助机械的方式, 也不显示任何宏观运动的迹象, 直接在两者分子的无规则运动之间交换能量, 这就是传递热量. 为了加以区别, 也可把热量传递称为微观功, 而把机械功称为宏观功. 宏观功和微观功都是系统在状态变化时与外界交换能量的量度, 宏观功的作用是把物体的有规则运动转换为系统内分子的无规则运动, 而微观功则是系统外物体的分子的无规则运动与系统内分子的无规则运动之间的转换. 这就说明, 热传递的微观本质是分子的无规则运动能量从高温物体向低温物体的传递.

应当指出, 热量传递的多少与其传递的方式有关, 因此, 热量与功一样, 也是个过程量.

(2) 热容. 对物体加热使物体的温度改变时, 往往需要进行热量的计算. 物体吸收热量的多少取决于什么因素呢? 实验表明, 物体吸收的热量与物体的质量和温度的变化量成正比. 但是, 质量相等的不同物质, 升高相同的温度, 吸收的热量一般是不相等的. 为了描述各种物质的吸热能力, 人们引入热容的概念.

一定质量的物质, 温度升高(或降低)1 K 时所吸收(或放出)的热量称为该物质的热容, 用 C 表示. 热容与物质的质量有关, 单位质量物质的热容称为比热容, 用 c 表示. 1 mol 物质的热容称为摩尔热容, 用 C_m 表示. 若 1 mol 物质温度升高(或降低) dT 时所吸收(或放出)的热量为 dQ , 则摩尔热容为

$$C_m = \frac{dQ}{dT}$$

可见, 摩尔热容的物理含义是指 1 mol 物质温度升高(或降低)1 K 时所吸收(或放出)的热量, 其单位是 $\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

由于热量是与具体过程有关的物理量, 因此, 物质的热容、比热容及摩尔热容都是与过程有关的量. 对给定的系统, 经历的过程不同时, 对应的摩尔热容也不同. 通常测定物质的摩尔热容是在维持系统的体积不变或压强不变的情况下进行的. 对固体和液体来说, 由于它们的膨胀系数很小, 因膨胀而对外做的功可以忽略不计, 因而这两种情况的实际差别很小, 一般不加以区别. 但对气体而言, 因两种情况的差异很大, 故必须加以区别. 以上两种情况下对应的摩尔热容分别称为**定体摩尔热容**和**定压摩尔热容**, 分别用 $C_{V,m}$ 和 $C_{p,m}$ 来表示, 即

$$C_{V,m} = \frac{dQ_V}{dT} \quad (7-3)$$

$$C_{p,m} = \frac{dQ_p}{dT} \quad (7-4)$$

式中, dQ_V 和 dQ_p 分别为系统在等体和等压过程中吸收的热量.

二、热力学第一定律

1. 热力学第一定律的内容

由上一节的讨论可知,对系统做功和向系统传递热量都可以改变系统的内能. 一般情况下,当系统状态变化时,做功与传递热量往往是同时存在的. 例如,气体膨胀时,系统对外界做功;同时通过气缸壁,系统也可以从外界吸收热量. 实验证明,对于任何一个热力学系统,当它从状态 I 经过任一过程到达状态 II 时,外界对它所做的功与向它传递的热量之和总是等于系统内能的增量. 假设有一系统,外界对它做的功为 W' ,向它传递的热量为 Q ,系统在始末状态的内能分别为 E_1 和 E_2 ,则

$$Q + W' = E_2 - E_1$$

因为外界对系统所做的功 W' 等于系统对外界所做功 W 的负值,即 $W' = -W$,同时 $E_2 - E_1 = \Delta E$,所以上式可进一步表示为

$$Q = \Delta E + W \quad (7-5)$$

这就是热力学第一定律的数学表达式. 它的物理意义是:系统从外界吸收的热量,一部分用来增加系统的内能,另一部分用于系统对外界做功. 显然,热力学第一定律是包括热现象在内的能量转换与守恒定律.

为了便于使用式(7-5),需进行以下规定:系统从外界吸收热量时, Q 为正值,系统向外界放出热量时, Q 为负值;系统对外界做功时, W 为正值,外界对系统做功时, W 为负值;系统内能增加时, ΔE 为正值,系统内能减小时, ΔE 为负值. 该符号法则如表 7-1 所示. 在国际单位制中, Q 、 W 和 ΔE 的单位都是焦耳(J).

表 7-1 Q 、 W 、 ΔE 的符号法则

项 目	符 号	
Q	系统从外界吸热	+
	系统对外界放热	-
W	系统对外界做功	+
	外界对系统做功	-
ΔE	内能增加	+
	内能减少	-

式(7-5)适用于有限过程,对于系统状态变化的微小过程,热力学第一定律可表示为

$$dQ = dE + dW \quad (7-6)$$

式中, dE 为微小过程中系统内能的增量, dQ 为系统从外界吸收的热量, dW 为系统对外界做的功.

应该指出,在系统的状态变化过程中,功和热之间的转换不可能是直接进行的. 系统从外界吸热的直接结果是增加系统的内能,然后通过内能的减小来对外界做功;或者外界对系统做功,增加系统的内能,然后通过内能的减小来向外界放热. 为简便起见,今后仍将沿用热

转换为功或功转换为热的通俗说法。

热力学第一定律给出了内能、功和热量三者之间的定量关系. 对任何系统的任何热力学过程, 只要其初态和终态是平衡态, 热力学第一定律就都适用. 可见, 热力学第一定律具有极大的普遍性, 它是自然界中各种形式的运动相互转换时所遵循的普遍法则. 在应用热力学第一定律解题时, 应注意各物理量的正、负号表示的意义, 同时式中各量的单位要统一.

热力学第一定律表明: 要让系统对外做功, 要么从外界吸收热量, 要么消耗系统自身的内能, 或者两者兼而有之. 历史上曾有不少人设想制造一种机器, 它既不消耗系统的内能, 也不需要外界向它传递热量, 却能源源不断地对外做功, 人们称这样的机器为第一类永动机. 所有这种设想, 经过无数次的尝试, 都以失败而告终. 显然, 它违反了热力学第一定律, 所以是不可能实现的. 因此, 热力学第一定律也可以表述为: 第一类永动机是不可能制成的.

2. 热力学第一定律在各种等值过程中的应用

作为热力学第一定律的应用, 人们讨论理想气体各种等值过程中的内能、功和热量. 理想气体的等值过程是指描述气体状态的状态参量 p 、 V 、 T 中有一个在状态变化过程中保持不变的过程, 具体有等体过程、等压过程和等温过程.

(1) 等体过程. 如图 7-3(a) 所示, 一气缸内储有一定量的某种理想气体, 活塞固定不动, 使气缸连续地与一系列有微小温度差的恒温热源相接触, 从而使气体的温度逐渐上升, 压强增大, 但气体的体积保持不变. 这样, 系统就经历了一个准静态的等体过程.

等体过程的特点是气体的体积保持不变, 即 $V = \text{常量}$. 在 p - V 图上, 等体过程对应一条平行于 p 轴的直线, 通常称这条直线为等体线, 如图 7-3(b) 所示.

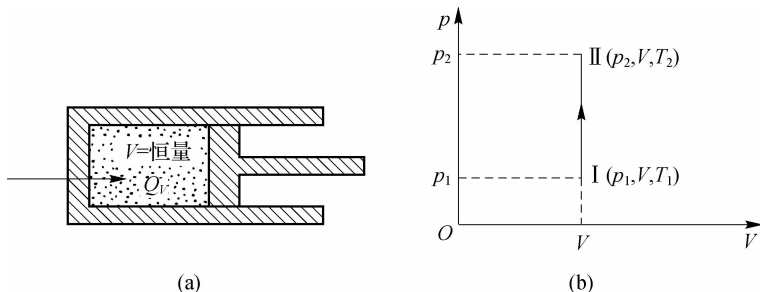


图 7-3 等体过程

由于等体过程中 $V = \text{恒量}$, 即 $dV = 0$, 因此 $dW = 0$. 根据热力学第一定律, 可得

$$dQ_V = dE \quad (7-7)$$

上式考虑对于气体从状态 I 变化到状态 II 的有限过程, 则有

$$Q_V = \Delta E \quad (7-8)$$

上式表明, 在等体过程中, 气体吸收的热量全部用来增加气体的内能, 气体对外界不做功.

根据定体摩尔热容的定义, 即式(7-3)可求出 ν mol 理想气体在等体过程中, 温度升高 dT 时吸收的热量为

$$dQ_V = \nu C_{V,m} dT \quad (7-9)$$

将式(7-9)代入式(7-7), 可得

$$dE = \nu C_{V,m} dT \quad (7-10)$$

而自由度为 i , 摩尔数为 ν 的理想气体的内能为

$$E = \nu \frac{i}{2} RT$$

则

$$dE = \nu \frac{i}{2} R dT$$

把上式与式(7-10)相比较, 可得

$$C_{V,m} = \frac{i}{2} R \quad (7-11)$$

可见, 理想气体的定体摩尔热容是一个只与分子的自由度 i 有关的量, 它与气体的温度无关. 对于单原子气体, $i=3$, $C_{V,m} \approx 12.5 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$; 对于刚性双原子气体, $i=5$, $C_{V,m} \approx 20.8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$; 对于刚性多原子气体, $i=6$, $C_{V,m} \approx 24.9 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

当气体从图 7-3(b) 中的状态 I (p_1, V, T_1) 变化到状态 II (p_2, V, T_2) 时, 内能的增量为

$$\Delta E = \nu C_{V,m} \Delta T = \nu C_{V,m} (T_2 - T_1) \quad (7-12)$$

应该注意, 虽然式(7-12)是由等体过程推导出来的, 但它不仅适用于等体过程, 而且是计算任何过程中理想气体内能变化的通用公式. 对给定的理想气体 (ν 和 i 都一定) 来说, 它的内能只与温度有关, 所以一定量的理想气体在不同的状态变化过程中, 虽然吸收的热量和所做的功不同, 但只要温度的增量相同, 内能的增量就相同, 与所经历的过程无关. 因此, 式(7-10)和式(7-12)可以用于理想气体的任何过程(如等压、等温、绝热过程等)中内能增量的计算.

(2) 等压过程. 设想一气缸连续地与一系列有微小温度差的恒温热源相接触, 同时活塞上所加的外力保持不变. 接触的结果, 将微小的热量传给气体, 使气体的温度升高, 气体的压强也将随之增加一微小量, 于是推动活塞对外做功, 从而体积增大. 体积膨胀反过来使气体的压强降低, 从而保证气体在压强不变的情况下进行膨胀. 这样, 系统就经历了一个准静态的等压过程, 如图 7-4(a) 所示.

等压过程的特点是气体的压强保持不变, 即 $p = \text{常量}$, $dp = 0$. 在 p - V 图上, 等压过程对应一条平行于 V 轴的直线, 通常称这条直线为等压线, 如图 7-4(b) 所示.

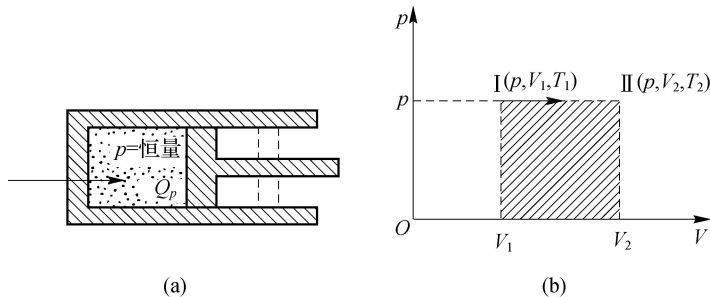


图 7-4 等压过程和等压线图示

当气体由状态 I (p, V_1, T_1) 经等压过程变化到状态 II (p, V_2, T_2) 时, 气体对外做的功为