几何与代数篇

直线与圆的方程

内容要求

1. 两点间距离公式及线段的中点坐标公式：掌握两点间的距离公式与线段的中点坐标公式.

2. 直线的倾斜角与斜率：理解直线的倾斜角与斜率的概念；掌握直线斜率的计算方法.

3. 直线的点斜式和斜截式方程：掌握直线的点斜式和斜截式方程.

4. 直线的一般式方程：了解直线方程的一般式形式；掌握直线的点斜式方程化为一般式方程的方法，掌握直线的斜截式方程与一般式方程之间的互化.

5. 两条相交直线的交点：掌握求两条相交直线的交点坐标的方法.

6. 两条直线平行的条件：理解两条直线平行的条件；掌握两条直线平行的判定方法.

7. 两条直线垂直的条件：理解两条直线垂直的条件；掌握两条直线垂直的判定方法.

8. 点到直线的距离公式：了解点到直线的距离公式.

9. 圆的方程：了解圆的定义；掌握圆的标准方程；了解二元二次方程表示圆的条件和圆的一般方程.

10. 直线与圆的位置关系：理解直线与圆的位置关系及判定方法，初步掌握直线与圆相交时弦长的求法及圆的切线方程的求法.

11. 直线与圆的方程的应用：初步掌握用直线方程与圆的方程解决实际问题的方法.

简单几何体

内容要求

1. 三视图:理解实物或空间图形的正视图、俯视图、左视图.

2. 空间图形的画法:初步掌握画空间图形的直观图的斜二测法.

3. 直棱柱、正棱锥的表面积:了解多面体及棱柱、棱锥的有关概念;理解直棱柱、正棱锥的侧面展开图;掌握直棱柱、正棱锥的侧面积公式.

4. 圆柱、圆锥、球的表面积:了解旋转体及圆柱、圆锥、球的有关概念;理解圆柱、圆锥的侧面展开图;掌握圆柱、圆锥的侧面积公式,了解球的表面积公式.

5. 柱、锥、球的体积:理解柱、锥的体积公式,了解球的体积公式.

第1单元 直线与圆的方程

引言

《交通强国建设纲要》中指出:“建设交通强国是以习近平同志为核心的党中央立足国情、着眼全局、面向未来作出的重大战略决策,是建设现代化经济体系的先行领域,是全面建成社会主义现代化强国的重要支撑,是新时代做好交通工作的总抓手.”目前,我国交通行业发展迅速,高铁技术更是领先于世界.其中,轨道直线段可看作两条平行直线、车轮与钢轨之间可看作圆与直线相切……

本单元将介绍两点间距离公式及线段的中点坐标公式、直线及其方程、两条直线的位置关系、点到直线的距离公式、圆的方程、直线与圆的位置关系,以及直线与圆的方程的应用.

引例

在我们的日常生活中,直线形物体和圆形物体随处可见.例如,城市公路的立交桥不仅要考虑它的实用性,还要注意它的美观性.如北京某立交桥是由一些直线和圆组成的,通过圆和直线的搭配可以实现不同方向的车辆行驶,从而缓解城市交通的拥堵状况.

1.1　两点间距离公式及线段的中点坐标公式

在本节内容中，我们主要学习两个常用的公式，即两点间距离公式和线段的中点坐标公式.

1.1.1　两点间距离公式

在初中的数学知识中，我们学习了求数轴上的两点间距离的方法. 一般地，如果 x 轴上的两点 A 与 B 的横坐标分别是 x_1，x_2，那么 A 与 B 的距离为

$$|AB|=|x_2-x_1|,$$

即 x 轴上两点间的距离是这两点横坐标差的绝对值. 同样，y 轴上两点间的距离是这两点纵坐标差的绝对值.

下面我们来讨论已知平面直角坐标系中任意两点的坐标，如何计算这两点的距离.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$是平面直角坐标系中的任意两点，从 A，B 两点出发分别向 x 轴、y 轴作垂线，垂足分别为点 A_1，A_2，B_1，B_2，再过点 A 作 BB_1 的垂线，垂足为 C，如图 1-1 所示. 在直角三角形 ABC 中，根据勾股定理有

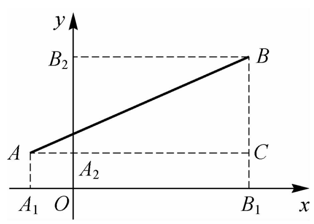

图 1-1

— 小提示 —

我国古代把直角三角形较短的直角边称为“勾”，较长的直角边称为“股”，斜边称为“弦”. 于是勾股定理可叙述为：勾方加股方等于弦方.

$$|AB|=\sqrt{|AC|^2+|CB|^2}$$
$$=\sqrt{|A_1B_1|^2+|A_2B_2|^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

由此得到坐标平面上任意两点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$间的距离公式为

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (1\text{-}1)$$

特别地,原点 O 与任意一点 $A(x,y)$间的距离为

$$|OA|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

知识卡片

《周髀算经》记载了勾股定理的公式与证明,相传是在商代由商高发现的,故勾股定理又称为商高定理.三国时期的赵爽对《周髀算经》中的勾股定理做出了详细注释,创制了一幅"勾股圆方图"(图 1-2),用数形结合的方法给出了勾股定理的详细证明.

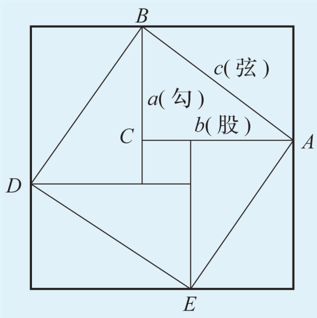

图 1-2

例 1 计算 $A(-3,2)$,$B(3,-6)$两点间的距离.

解 A,B 两点间的距离为

$$|AB|=\sqrt{[3-(-3)]^2+(-6-2)^2}=10.$$

做一做

计算下列两点间的距离.

(1)$A(-1,4)$,$B(3,7)$;

(2)$A(1,1)$,$B(5,7)$;

(3)$A(0,2)$,$B(3,0)$;

(4)$A(1,-1)$,$B(2,-2)$;

(5)$A(0,0)$,$B(-5,3)$;

(6)$A(-3,4)$,$B(2,1)$;

(7)$A(5,7)$,$B(-2,-1)$;

(8)$A(-\sqrt{3},1)$,$B(-2,0)$.

1.1.2 线段的中点坐标公式

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$是平面直角坐标系中的任意两点,点$M(x_0,y_0)$是线段AB的中点. 过点A,B,M分别向x轴、y轴作垂线,垂足分别为点A_1,A_2,B_1,B_2,M_1,M_2,如图1-3所示.

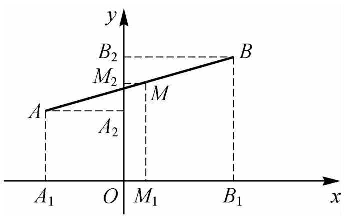

图 1-3

因为点M为线段AB的中点,根据平行线的性质,点M_1和点M_2分别是线段A_1B_1和A_2B_2的中点,即

$$A_1M_1=M_1B_1, A_2M_2=M_2B_2,$$

所以$x_0-x_1=x_2-x_0$,$y_0-y_1=y_2-y_0$,即

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}, y_0=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{1-2}$$

这就是线段的中点坐标公式,简称**中点公式**.

小提示

公式中的横、纵坐标不可混淆相加.

例2 求连接下列两点的线段的中点坐标.

(1)$A(-3,4)$,$B(-2,-7)$;

(2)$A(a,0)$,$B(0,b)$.

解 (1)设线段AB的中点坐标为(x_0,y_0),则根据中点坐标公式可得

$$x_0=\frac{-3-2}{2}=-\frac{5}{2}, y_0=\frac{4-7}{2}=-\frac{3}{2},$$

所以线段AB的中点坐标为$\left(-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

(2)设线段 AB 的中点坐标为(x_0,y_0)，则根据中点坐标公式可得

$$x_0=\frac{a+0}{2}=\frac{a}{2},y_0=\frac{0+b}{2}=\frac{b}{2},$$

所以线段 AB 的中点坐标为$\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$.

例 3 已知三角形 ABC 的三个顶点坐标分别为$A(1,0)$，$B(-2,1)$，$C(0,3)$，求 BC 边上的中线 AD 的长度.

解 设 BC 边上的中点坐标为 $D(x_0,y_0)$，则由点 $B(-2,1)$，$C(0,3)$得

$$x_0=\frac{-2+0}{2}=-1,y_0=\frac{1+3}{2}=2,$$

所以 BC 边上的中点 D 的坐标为$(-1,2)$.

根据两点间的距离公式可得 AD 的长度为

$$|AD|=\sqrt{(-1-1)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}.$$

做一做

1. 求连接下列两点的线段的中点坐标.

(1)$A(-7,4)$，$B(3,8)$；

(2)$A(3,1)$，$B(2,5)$.

2. 已知三角形 ABC 的三个顶点坐标分别为 $A(2,-2)$，$B(0,-1)$，$C(-2,5)$，求 BC 边上的中线 AD 的长度.

习题 1.1

A 组

1. 已知两点 $A(1,0)$和 $B(-2,4)$，则线段 AB 的中点坐标是(　　).

A. $\left(-\frac{1}{2},2\right)$　　B. $(-1,4)$　　C. $\left(-\frac{1}{2},4\right)$　　D. $(-1,2)$

2. 求连接下列两点的线段的长度及中点坐标.

(1)$A(-1,-3)$，$B(-1,5)$；

(2)$A(0,-2)$，$B(-2,2)$.

3. 已知点 $M(4,n)$ 是点 $A(m,2)$ 和点 $B(3,8)$ 连线的中点，求 m,n 的值.

4. 已知点 $A(-4,-5)$，线段 AB 的中点 M 的坐标为 $(1,-2)$，求线段端点 B 的坐标.

5. 已知点 $A(-1,0)$ 和 $B(2,-4)$，求线段 AB 的中点坐标.

6. 设点 $A(1,0)$，$B(7,-2)$，求线段 AB 的中点坐标.

B 组

1. 已知点 $A(x,0)$ 与点 $B(0,3)$ 之间的距离为 5，求 x 的值.

2. 已知点 P 为 x 轴上一点且到点 $A(1,2)$ 和点 $B(-2,5)$ 的距离相等，求点 P 的坐标.

3. 已知三角形 ABC 的三个顶点坐标分别为 $A(2,2)$，$B(-4,6)$，$C(-2,-3)$，求 AB 边上的中线 CD 的长度.

1.2 直线及其方程

1.2.1 直线的倾斜角与斜率

思考

直线 l 在直角坐标系中的位置由哪些条件决定?

直线 l 在直角坐标系中与两个坐标轴有不同的夹角,其中直线 l 向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角,叫作直线 l 的**倾斜角**,如图 1-4 所示的角 α.

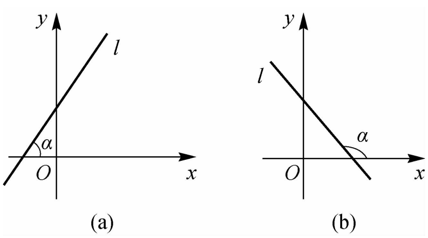

图 1-4

规定:当直线 l 与 x 轴平行或重合时,直线 l 的倾斜角为零度角.

这样,对任意的直线 l,它的倾斜角 α 的取值范围是 $0^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ$.

直线 l 的倾斜角为 $\alpha(\alpha \neq 90^\circ)$,则 α 的正切值叫作这条直线的**斜率**,通常用小写字母 k 表示,即

$$k = \tan \alpha. \qquad (1\text{-}3)$$

当 $\alpha = 90^\circ$ 时,直线 l 的斜率不存在;当 $\alpha \neq 90^\circ$ 时,直线 l 都有确定的斜率.

— 小提示 —

倾斜角可用来表示直线对于 x 轴的倾斜程度.

根据直线倾斜角的取值范围，直线的斜率可以分为以下 4 种情况：

(1)当 $\alpha=0°$时(直线平行或重合于 x 轴)，$k=0$.

(2)当 α 为锐角时，$k>0$.

(3)当 $\alpha=90°$时(直线平行或重合于 y 轴)，k 不存在.

(4)当 α 为钝角时，$k<0$.

下面我们研究如何根据直线上的任意两个点的坐标来确定倾斜角和斜率的大小.

如图 1-5 所示，设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$为直线 l 上的任意两点，我们可以得到：

如图 1-5(a)、(b)所示，当 $\alpha\neq 90°$时，$x_1\neq x_2$，

$$k=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1};$$

如图 1-5(c)所示，当 $\alpha=90°$时，$x_1=x_2$，$k=\tan\alpha$ 的值不存在，此时直线 l 与 x 轴垂直.

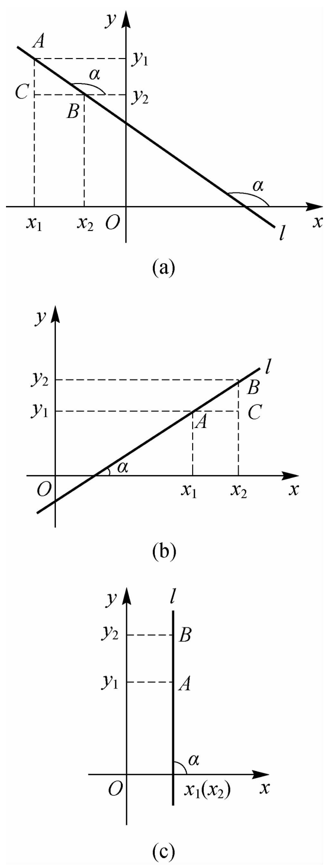

图 1-5

—— 小提示 ——

确定直线的两个几何要素可以是直线上的两个点，也可以是直线上的一个点和倾斜角(或斜率).

因此，设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$为直线 l 上的任意两

点，则直线 l 的斜率为

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2). \qquad (1\text{-}4)$$

例 1 根据下面各直线满足的条件，分别求出直线的斜率.

(1)倾斜角为 $60°$；

(2)直线经过点 $A(-2,3)$，$B(2,-1)$.

解 (1)由于倾斜角为 $60°$，所以直线的斜率为

$$k=\tan\alpha=\tan 60°=\sqrt{3}.$$

(2)由于直线经过点 $A(-2,3)$，$B(2,-1)$，$x_1\neq x_2$，所以直线的斜率为

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-3}{2-(-2)}=-1.$$

例 2 已知点 $A(1,0)$，$B(2,\sqrt{3})$在直线 l 上，求直线 l 的斜率和倾斜角.

解 根据题意可知，直线 l 的斜率为

$$k=\frac{\sqrt{3}-0}{2-1}=\sqrt{3}.$$

因为 $\tan 60°=\sqrt{3}$，所以直线 l 的倾斜角为 $60°$.

做一做

1. 判断满足下列条件的直线的斜率是否存在，若存在，求出斜率的值.

(1)直线的倾斜角为 $45°$；

(2)直线过点 $A(2,-1)$，$B(3,5)$；

(3)点 $A(5,-2)$，$B(5,4)$在直线上.

2. 已知直线的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$，求该直线的斜率.

3. 已知直线过点 $A(3,-2)$，$B(-5,6)$，求直线的斜率和倾斜角.

4. 已知某直线的倾斜角的正弦值为 $\frac{3}{5}$，求该直线的斜率.

5. 求点 $A(2,1)$，$B(-3,2)$所在直线的斜率.

6. 设点 $A(-3,1)$，$B(-5,3)$在直线 l 上，求直线 l 的斜率和倾斜角.

1.2.2 直线的点斜式和斜截式方程

思考

已知直线上一点的坐标和直线的斜率，如何得到该直线的方程？

1. 直线的点斜式方程

已知直线 l 的斜率为 k，并且经过点 $P_0(x_0, y_0)$，如图 1-6 所示，求直线 l 的方程.

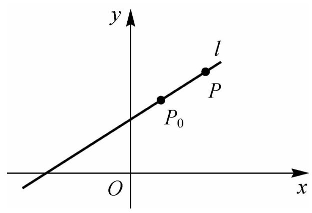

图 1-6

设点 $P(x, y)$ 是直线上不同于点 P_0 的任意一点，因为直线 l 的斜率为 k，根据过两点的直线的斜率公式，得

$$k=\frac{y-y_0}{x-x_0}\ (x\neq x_0),$$

即 $y-y_0=k(x-x_0)$，也即斜率为 k，并且经过点 $P_0(x_0, y_0)$ 的直线的方程为

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{1-5}$$

由于这个方程是由直线上的一点和直线的斜率确定的，所以这个方程叫作直线的**点斜式方程**.

例 3　直线经过点 $P(2, 3)$，倾斜角为 45°，求直线的方程.

解　由于倾斜角 α 为 45°，故直线的斜率为

$$k=\tan\alpha=\tan 45°=1.$$

又因为直线经过点 $P(2, 3)$，所以根据点斜式方程得直线方程为

$$y-3=1\times(x-2).$$

即

$$x-y+1=0.$$

例 3 说明直线上任意一点的坐标都是该直线方程 $x-y+1=0$ 的解.

设点 $P_1(x_1,y_1)$ 的坐标为方程 $x-y+1=0$ 的解，即 $x_1-y_1+1=0$，则

$$\frac{y_1-3}{x_1-2}=1=\tan 45°.$$

又已知直线经过点 $P(2,3)$，倾斜角为 $45°$，只可以确定一条直线. 这说明点 $P_1(x_1,y_1)$ 在经过点 $P(2,3)$、倾斜角为 $45°$ 的直线上.

一般地，如果直线 L 与方程 $F(x,y)=0$ 满足下列关系：

(1) 直线 L 上的点的坐标都是方程 $F(x,y)=0$ 的解；

(2) 以方程 $F(x,y)=0$ 的解为坐标的点都在直线 L 上.

那么，直线 L 叫作**二元方程** $F(x,y)=0$ **的直线**，方程 $F(x,y)=0$ 叫作**直线** L **的方程**，记作直线 $L:F(x,y)=0$.

例 4 直线经过点 $P_1(1,2)$，$P_2(-1,-3)$，求直线的方程.

解 因为直线经过点 $P_1(1,2)$，$P_2(-1,-3)$，由斜率公式得直线的斜率为

$$k=\frac{-3-2}{-1-1}=\frac{5}{2}.$$

根据点斜式方程得直线的方程为

$$y-2=\frac{5}{2}(x-1),$$

即

$$5x-2y-1=0.$$

做一做

写出符合条件的直线的点斜式方程.

(1) 斜率为 2，过点 $(5,2)$；

(2) 过点 $A(2,1)$，$B(0,3)$.

小提示

直线在 x 轴、y 轴上的截距可能是正数、负数或 0.

2. 直线的斜截式方程

如图 1-7 所示，直线 l 与 x 轴交于点 $A(a,0)$，与 y 轴交于点 $B(0,b)$，则 a 叫作直线 l 在 x 轴上的**截距**(或**横截距**)，

b 叫作直线在 y 轴上的**截距**(或**纵截距**).

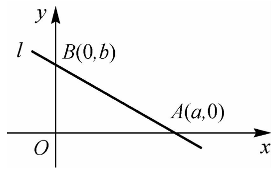

图 1-7

> **议一议**
>
> 函数 $y=kx+b$ 与直线方程 $y=kx+b$ 的含义是否相同?

设直线 l 的斜率为 k,并且在 y 轴上的截距为 b,即直线经过点 $(0,b)$,则直线 l 的方程为

$$y-b=k(x-0),$$

即

$$y=kx+b.$$

斜率为 k,在 y 轴上的截距为 b 的直线的方程为

$$y=kx+b, \tag{1-6}$$

这个方程叫作直线的**斜截式方程**.

例 5　直线 l 的倾斜角为 $150°$,且在 y 轴上的截距为 -2,求直线 l 的方程.

解　因为直线的倾斜角为 $150°$,所以直线的斜率为

$$k=\tan 150°=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

又因为直线在 y 轴上的截距为 -2,所以根据直线的斜截式方程得直线的方程为

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-2.$$

> **想一想**
>
> 在实际应用中,应如何对方程的点斜式方程和斜截式方程进行选择?

下面,我们考虑两种特殊情况,如图 1-8 所示.

如图 1-8(a)所示,直线 l 经过点 $P(x_0,y_0)$且平行于 x 轴.因为 l 平行于 x 轴,所以倾斜角 $\alpha=0°$,斜率 $k=0$,且经过点 $P(x_0,y_0)$,根据点斜式方程可得直线 l 的方程为

$$y-y_0=0\times(x-x_0),$$

化简得

$$y=y_0.$$

这就是经过点 $P(x_0,y_0)$且平行于 x 轴的直线 l 的方程.特别地,当直线 l 与 x 轴重合时,直线的方程为 $y=0$.

如图 1-8(b)所示,直线 l 经过点 $P(x_0,y_0)$且平行于 y 轴.因为 l 平行于 y 轴,所以倾斜角 $\alpha=90°$,斜率 k 不存在,不能用点斜式方程和斜截式方程表示.但因为直线 l 上的每一点的横坐标都等于 x_0,所以直线 l 的方程可以表示为

$$x=x_0.$$

这就是经过点 $P(x_0, y_0)$ 且平行于 y 轴的直线 l 的方程. 特别地，当直线 l 与 y 轴重合时，直线的方程为 $x=0$.

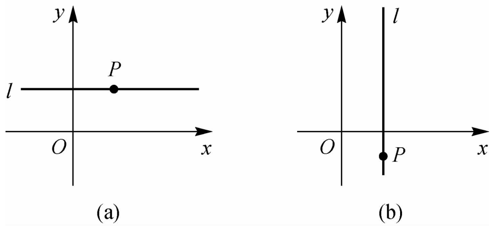

图 1-8

做一做

1. 已知直线经过下列两点，求出它们的直线方程.

(1) $P_1(2,1)$，$P_2(0,-3)$；

(2) $P_1(-1,-5)$，$P_2(2,1)$.

2. 写出符合条件的直线的斜截式方程.

(1) $k=\dfrac{1}{3}$，$b=-3$；

(2) $\alpha=45^\circ$，$b=4$.

1.2.3 直线的一般式方程

直线的点斜式方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 可以化为

$$kx-y+y_0-kx_0=0.$$

直线的斜截式方程 $y=kx+b$ 可以化为

$$kx-y+b=0.$$

由此可以知道，直线的点斜式方程和斜截式方程都可以转化为二元一次方程的一般形式，即

$$Ax+By+C=0.$$

(1) 当 $A\neq0$，$B\neq0$ 时，二元一次方程 $Ax+By+C=0$ 可化为 $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$. 它表示斜率为 $k=-\dfrac{A}{B}$，在 y 轴上的截距 $b=-\dfrac{C}{B}$ 的直线.

(2)当 $A=0,B\neq0$ 时,方程可化为 $y=-\frac{C}{B}$. 它表示经过点 $P\left(0,-\frac{C}{B}\right)$ 且平行于 x 轴的直线.

(3)当 $A\neq0,B=0$ 时,方程可化为 $x=-\frac{C}{A}$. 它表示经过点 $P\left(-\frac{C}{A},0\right)$ 且平行于 y 轴的直线.

因此,二元一次方程 $Ax+By+C=0$(其中 A,B 不全为零)表示一条直线.

方程

$$Ax+By+C=0(\text{其中 } A,B \text{ 不全为零}) \qquad (1\text{-}7)$$

叫作直线的**一般式方程**.

想一想

直线的点斜式、斜截式、两点式和一般式方程之间如何相互转换? 试举例说明.

例 6　将方程 $y+3=\frac{3}{2}(x-1)$ 化为直线的一般式方程,并求出该直线在 x 轴和 y 轴上的截距.

解　由 $y+3=\frac{3}{2}(x-1)$ 得

$$3x-2y-9=0,$$

这就是直线的一般式方程.

令 $x=0$,则 $y=-\frac{9}{2}$,故直线在 y 轴上的截距为 $-\frac{9}{2}$;令 $y=0$,则 $x=3$,故直线在 x 轴上的截距为 3.

例 7　已知直线 l 经过点 $A(4,2)$ 且斜率为 -3,求直线 l 的点斜式方程、斜截式方程和一般式方程.

解　因直线 l 经过点 $A(4,2)$ 且斜率为 -3,故其点斜式方程为 $y-2=-3(x-4)$.

将上述方程变形后可得直线的斜截式方程为

$$y=-3x+14,$$

将斜截式方程移项后可得直线的一般式方程为

$$3x+y-14=0.$$

做一做

1. 根据下列条件写出直线方程,并化为一般式方程.

(1)经过点 $P(-3,5)$,斜率为 -2;

(2)倾斜角为 120°,在 y 轴上的截距为 3;

(3)经过点 $A(1,4)$ 且平行于 y 轴.

2. 将下列直线方程化为一般式方程.

(1) $y=\frac{1}{2}x+2$;

(2) $y-2=\frac{3}{4}(x+1)$.

3. 已知直线 l: $Ax+By+C=0$ 经过原点,求 A, B, C 的值.

4. 已知直线过点(1,0)和点(2,3),求该直线的方程.

5. 已知直线 l 经过原点,倾斜角比直线 $y=2x-1$ 的倾斜角大 $\frac{\pi}{4}$,求直线 l 的方程.

习题 1.2

A 组

1. 选择题.

(1) 直线 $x-5y+10=0$ 在 x 轴和 y 轴上的截距分别为(　　).

A. -10 和 2　　B. 2 和 -10

C. 1 和 -5　　D. -5 和 1

(2) 垂直于 x 轴,且过点(1,4)的直线的方程为(　　).

A. $x=1$　　B. $y=4$

C. $y=4x$　　D. $x=4y$

(3) 平行于 x 轴,且过点(2,5)的直线的方程为(　　).

A. $x=2$　　B. $y=5$

C. $y=\frac{5}{2}x$　　D. $y=\frac{2}{5}x$

2. 填空题.

(1) 当 $0°<\alpha<90°$ 时,斜率 k ________ 0,这时直线从左到右是________的;当 $90°<\alpha<180°$ 时,斜率 k ________ 0,这时直线从左到右是________的.

(2) 当直线 l 与 x 轴平行或重合时,它的倾斜角 $\alpha=$________,斜率 $k=$________.

(3) 如果直线 l 的倾斜角 $\alpha=120°$,则直线 l 的斜率 $k=$________.

(4) 如果直线的斜率 $k=1$,则直线的倾斜角 $\alpha=$________.

3. 已知直线的斜率 k，求直线的倾斜角.

(1) $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

(2) $k=1$.

4. 求下列每组中经过两点的直线的斜率.

(1) $A(5,2)$，$B(2,4)$；

(2) $M(-1,-2)$，$N(-4,-2)$；

(3) $P(0,6)$，$Q(-1,2)$.

5. 已知点 $A(5,2)$，$B(2,y)$，且过点 A 和点 B 的直线的斜率是 $\frac{1}{3}$，求 y 的值.

6. 已知三角形的三个顶点为 $A(0,1)$，$B(8,3)$，$C(1,-1)$，分别求三角形三条边所在直线的斜率.

7. 已知直线的倾斜角 $\alpha=30°$，且经过点 $A(4,3)$，求该直线的方程.

8. 已知某直线过点 $(-1,4)$ 且倾斜角为 $135°$，求该直线的方程.

9. 已知直线 l 的倾斜角的余弦值为 $\frac{4}{5}$，横截距为 -4，求该直线的方程.

10. 求斜率为 $\frac{1}{5}$，且在 y 轴上的截距为 3 的直线的方程.

11. 求过点 $M(-2,1)$，$N(4,3)$ 的直线的方程.

12. 求下列直线在 x 轴和 y 轴上的截距.

(1) $x-4y-2=0$；

(2) $3x+7y+3=0$.

B 组

1. 已知直线 $\frac{a}{3}x-2y-4a=0(a\neq 0)$ 在 x 轴上的截距是它在 y 轴上的截距的 3 倍，求 a 的值.

2. 已知直线 l 经过点 $(2,3)$ 且与两条坐标轴围成一个等腰直角三角形，求直线 l 的一般式方程.

3. 已知直线 l：$x+2y-5=0$，求：

(1) 直线 l 的斜率；

(2) 直线 l 在 y 轴上的截距，并画出其图像.

4. 求直线 l：$x+y-1=0$ 与两条坐标轴围成的三角形的面积.

5. 已知点 $A(1,1)$，$B(2,-1)$，$C(x,3)$在同一条直线上，求 x 的值.

6. 已知直线 l：$(m^2-2m-3)x+(2m^2+m-1)y=2m-5$ 在 x 轴上的截距为 -3，求 m 的值.

1.3　两条直线的位置关系

1.3.1　两条相交直线的交点

设两条直线的方程是

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0.$$

如果这两条直线相交，那么交点既在直线 l_1 上，又在直线 l_2 上，交点坐标同时满足这两个方程，是这两个方程的唯一的公共解；相反，如果这两条直线方程只有一个公共解，那么以这个解为坐标的点必是直线 l_1 和直线 l_2 的交点.

因此，两条直线是否有交点，主要看方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

是否有唯一解.

例 1　求下列两条直线的交点.

$$l_1: x-2y+2=0,$$
$$l_2: x+2y-9=0.$$

解　解方程组$\begin{cases} x-2y+2=0, \\ x+2y-9=0, \end{cases}$

得

$$\begin{cases} x=\dfrac{7}{2}, \\ y=\dfrac{11}{4}. \end{cases}$$

所以直线 l_1 和 l_2 的交点是 $P\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{11}{4}\right)$.

当两条直线的斜率都存在时，可以利用直线的斜率及直线在 y 轴上的截距来判断两条直线的关系. 设两条直线的方程分别为 $l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$，则

（1）如果 $k_1 \neq k_2$，则两条直线 l_1，l_2 相交.

（2）如果 $k_1=k_2$，当 $b_1 \neq b_2$ 时，两条直线 l_1，l_2 平行；当 $b_1=b_2$ 时，两条直线 l_1，l_2 重合.

做一做

1. 求下列两条直线的交点.

（1）$l_1: 2x-y-3=0$ 与 $l_2: 4x+5y+1=0$；

（2）$l_1: 2x-5y+3=0$ 与 $l_2: x-2y-2=0$.

2. 已知直线 $l_1: y=kx-\sqrt{3}$ 与直线 $2x+3y-6=0$ 的交点位于第一象限，求直线 l_1 的倾斜角的取值范围.

1.3.2 两条直线平行的条件

平面内不重合的两条直线只有相交和平行两种位置关系，下面我们将利用直线的斜截式方程来讨论两条直线平行的条件.

如图 1-9(a)所示，两条直线 l_1，l_2 的斜率都存在且都不为 0，如果直线 l_1 平行于直线 l_2，那么这两条直线与 x 轴相交的同位角相等，即两条直线的倾斜角相等，故两条直线的斜率相等；相反，两条直线 l_1，l_2 的斜率都存在且都不为 0，如果直线的斜率相等，那么这两条直线的倾斜角相等，即两条直线与 x 轴相交的同位角相等，故两条直线平行.

如图 1-9(b)所示，两条直线 l_1，l_2 的斜率都为 0，则这两条直线都与 x 轴平行，所以直线 l_1，l_2 平行.

如图 1-9(c)所示，两条直线 l_1，l_2 的斜率都不存在，则这两条直线都与 y 轴平行，所以直线 l_1，l_2 平行.

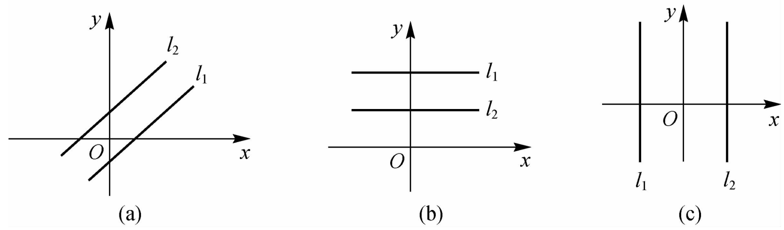

图 1-9

由上面的讨论知，当直线 l_1，l_2 的斜率都存在时，设 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，则两条直线的位置关系如表 1-1 所示.

表 1-1

两个方程的系数关系	$k_1 \neq k_2$	$k_1=k_2$	
		$b_1 \neq b_2$	$b_1=b_2$
两条直线的位置关系	相交	平行	重合

知识延伸

若直线 $l_1 // l_3$，$l_2 // l_3$，则

同位角相等 $\Leftrightarrow l_1 // l_2$

例 2　已知直线 l 过点 $A(-3,5)$，且与直线 $y=2x+3$ 平行，求直线 l 的方程.

解　因为直线 $y=2x+3$ 的斜率为 2，且直线 l 与直线 $y=2x+3$ 平行，所以直线 l 的斜率 $k=2$.

又因为直线 l 经过点 $A(-3,5)$，所以直线 l 的方程为

$$y-5=2(x+3),$$

即

$$2x-y+11=0.$$

因此，判断两条直线是否平行的一般步骤是：

(1)判断两条直线的斜率是否存在，若都不存在，则两条直线平行(或重合)；若只有一个不存在，则两条直线相交.

(2)若两条直线的斜率都存在，则将它们都化成斜截式方程；如果斜率不相等，则两条直线相交.

(3)若斜率相等，则比较两条直线在 y 轴上的截距，如果截距相等，则两条直线重合；如果截距不相等，则两条直

线平行.

例 3　判断下列各组直线的位置关系,若相交则求出交点.

(1)$l_1:x+3y+2=0$,$l_2:2x-6y=0$;

(2)$l_1:y=\frac{5}{4}x+3$,$l_2:5x-4y-2=0$;

(3)$l_1:2x+3y-1=0$,$l_2:-4x-6y+2=0$.

想一想

例 3 还有其他解法吗?

解　(1)将方程 $x+3y+2=0$ 化为斜截式方程,得

$$y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}.$$

所以直线 l_1 的斜率 $k_1=-\frac{1}{3}$,在 y 轴上的截距为 $-\frac{2}{3}$.

将方程 $2x-6y=0$ 化为斜截式方程,得

$$y=\frac{1}{3}x.$$

所以直线 l_2 的斜率 $k_2=\frac{1}{3}$,在 y 轴上的截距为 0.

因为 $k_1\neq k_2$,所以直线 l_1 与 l_2 相交.

解两条直线方程所组成的方程组,得到直线 l_1 与 l_2 的交点为 $P\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$.

(2)由方程 $y=\frac{5}{4}x+3$ 可知,直线 l_1 的斜率 $k_1=\frac{5}{4}$,在 y 轴上的截距 $b_1=3$.

将方程 $5x-4y-2=0$ 化为斜截式方程,得

$$y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}.$$

所以直线 l_2 的斜率 $k_2=\frac{5}{4}$,在 y 轴上的截距 $b_2=-\frac{1}{2}$.

因为 $k_1=k_2$,$b_1\neq b_2$,所以直线 l_1 与 l_2 平行.

(3)将方程 $2x+3y-1=0$ 化为斜截式方程,得

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}.$$

所以直线 l_1 的斜率 $k_1=-\frac{2}{3}$,在 y 轴上的截距 $b_1=\frac{1}{3}$.

将方程 $-4x-6y+2=0$ 化为斜截式方程,得

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}.$$

所以直线 l_2 的斜率 $k_2=-\frac{2}{3}$，在 y 轴上的截距 $b_2=\frac{1}{3}$.

因为 $k_1=k_2$，$b_1=b_2$，所以直线 l_1 与 l_2 重合.

做一做

1. 判断下列各组直线的位置关系.

(1) l_1：$x+y=0$，l_2：$2x-3y+1=0$；

(2) l_1：$2x-5y+2=0$，l_2：$4x-10y+1=0$；

(3) l_1：$3x-y+\frac{1}{2}=0$，l_2：$6x-2y+1=0$.

2. 已知直线 l 过点 $A(1,-4)$，且与直线 $x-3y+4=0$ 平行，求直线 l 的方程.

3. 已知直线 l_1：$mx+8y+n=0$ 和直线 l_2：$2x+my-1=0$ 平行，求 m，n 的值.

4. 已知直线 l_1：$x+ay=2a+2$ 与直线 l_2：$ax+y=a+1$ 平行，求 a 的值.

1.3.3 两条直线垂直的条件

在这里我们利用直线的斜截式方程来讨论两条相交直线的一种特殊情形，即两条直线垂直的情形.

两条直线 l_1 和 l_2 的斜率都存在也都不为零，设直线方程分别为

$$l_1: y=k_1x+b_1, \quad l_2: y=k_2x+b_2.$$

如图 1-10 所示，若 $l_1\perp l_2$，则

$$k_1=\tan\alpha_1=\frac{BC}{AB}$$

$$k_2=\tan\alpha_2=\tan(180^\circ-\alpha_3)=-\tan\alpha_3=-\frac{AB}{BC}$$

所以

$$k_1\cdot k_2=\frac{BC}{AB}\cdot\left(-\frac{AB}{BC}\right)=-1 \text{ 或 } k_1=-\frac{1}{k_2}.$$

反过来，如果 $k_1\cdot k_2=-1$ 或 $k_1=-\frac{1}{k_2}$，则 $l_1\perp l_2$.

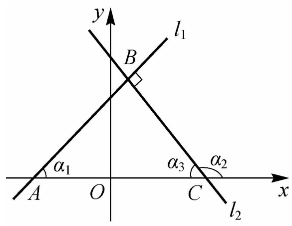

图 1-10

由上述可知，当两条直线的斜率都存在且不等于 0 时，如果两条直线互相垂直，那么它们的斜率互为负倒数；由上面的过程可以逆推，如果它们的斜率互为负倒数，那么它们互相垂直，即

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ 或 } k_1 = -\frac{1}{k_2} \Leftrightarrow l_1 \perp l_2.$$

显然，平行于 x 轴的直线与平行于 y 轴的直线互相垂直，即斜率为零的直线与斜率不存在的直线互相垂直.

例 4 已知直线方程分别为

$$l_1: x-2y+5=0, l_2: 2x+y-1=0.$$

判断两条直线是否垂直.

解 将直线 l_1 和 l_2 的方程化为斜截式方程，得

$$l_1: y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}, l_2: y=-2x+1.$$

可知 $k_1=\frac{1}{2}$，$k_2=-2$. 因为 $k_1 \cdot k_2=-1$，所以直线 l_1 和 l_2 垂直.

议一议

在例 5 中，与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线的方程能否设为 $Bx+Ay+D=0$？

例 5 求过点 $A(2,-1)$ 且与直线 $3x+2y-1=0$ 垂直的直线的方程.

解 将直线 $3x+2y-1=0$ 化为斜截式方程 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$，其斜率为 $-\frac{3}{2}$，而所求直线与该直线垂直，所以所求直线的斜率为 $\frac{2}{3}$.

根据直线的点斜式方程，所求直线的方程为

$$y+1=\frac{2}{3}(x-2).$$

即 $$2x-3y-7=0.$$

做一做

1. 判断下列各组直线是否垂直.

(1) $2x-5y+3=0$ 与 $10x+4y-5=0$；

(2) $y=x+2$ 与 $3x-3y-1=0$.

2. 已知直线 l 经过点 $A(3,-4)$ 且垂直于直线 $2x+y-3=0$，求直线 l 的方程.

3. 已知直线 l 过点 $(2,1)$ 且与直线 $x+y=1$ 垂直，求直线 l 的方程.

4. 已知直线 l_1：$y=3x+1$ 与直线 l_2：$ax+y+1=0$ 垂直，求 a 的值.

习题 1.3

A 组

1. 判断下列各组直线的位置关系，若相交则判断是否垂直，并求出交点.

(1) $3x+4y-6=0$ 与 $6x+8y-12=0$；

(2) $5x-3y-2=0$ 与 $3x+5y+4=0$；

(3) $4x+9y-3=0$ 与 $2x+3y+6=0$；

(4) $2x-7y+10=0$ 与 $7x-2y-8=0$.

2. 求过点 $A(3,1)$ 且与直线 $2x-3y-3=0$ 平行的直线的方程.

3. 求过点 $A(-3,-2)$ 且与直线 $3x-5y-2=0$ 垂直的直线的方程.

4. 求斜率为 -3，且过直线 $3x-y+4=0$ 和直线 $x+y-4=0$ 交点的直线的方程.

5. 求过直线 $2x+y-8=0$ 与直线 $x-2y+1=0$ 的交点，且与直线 $5x-4y+1=0$ 平行的直线的方程.

6. 求过直线 $2x-3y+1=0$ 与直线 $6x-8y-4=0$ 的交点，且与直线 $3x+2y-4=0$ 垂直的直线的方程.

7. 已知直线 l_1：$x+m^2y+6=0$ 和直线 l_2：$(m-2)x+3my+2m=0$，当 m 为何值时，l_1 与 l_2：

(1) 平行；

(2) 相交；

(3) 垂直.

B组

1. 已知直线 $l_1: ax+y+2=0$，直线 $l_2: x+2y=0$，直线 $l_3: x-y+1=0$ 交于一点，求 a 的值.

2. 已知直线 l_1 过直线 $l_2: 2x+y+8=8$ 和直线 $l_3: x+2y-1=0$ 的交点，且平行于直线 $l_4: 3x-y-1=0$，求直线 l_1 的方程.

3. 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(1,-2)$，$B(3,-5)$，$C(5,3)$，求 BC 边上中线所在直线的方程.

1.4　点到直线的距离公式

我们知道,在直角坐标系中,直线外一点和直线上的点连接所组成的线段中,垂线段最短,称为**点到直线的距离**,常用 d 表示. 如图 1-11 所示,P_0Q 的长度为点 P_0 到直线 l 的距离.

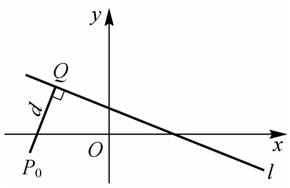

图 1-11

设点 $P_0(x_0,y_0)$为直线 $Ax+By+C=0$ 外一点,则点到直线的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (1\text{-}8)$$

证明略.

议一议

如果 $A=0$ 或 $B=0$,式(1-8)是否仍然成立?

例　根据条件,求下列点到直线的距离.

(1)$P_0(1,2)$,l:$3x+y-6=0$;

(2)$P_0(-2,-3)$,l:$y=-2x-4$.

解　(1)由点到直线的距离公式,得

$$\begin{aligned}d&=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\\&=\frac{|3\times1+1\times2-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}\\&=\frac{\sqrt{10}}{10}.\end{aligned}$$

(2)将直线的方程化为一般式方程,得

$$2x+y+4=0.$$

由点到直线的距离公式,得

小提示

使用直线外一点到直线的距离公式时,直线的方程应为一般式方程.

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$=\frac{|2\times(-2)+1\times(-3)+4|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$
$$=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

思考

如果两条直线平行，那么如何得到这两条直线间的距离？

做一做

1. 根据下列条件，求点到直线的距离.

(1) $P_0(3,0)$，l：$3x+4y-1=0$；

(2) $P_0(4,2)$，l：$12x-5y-6=0$；

(3) $P_0(-3,5)$，l：$2x+6y-5=0$.

2. 已知点 $A(x,y)$ 在直线 $x+y-4=0$ 上，点 O 为原点，求线段 OA 的最小值.

3. 若点 $(4,a)$ 到直线 $4x-3y-1=0$ 的距离为 3，求 a 的值.

习题 1.4

A 组

1. 根据下列条件，求点到直线的距离.

(1) $P_0(3,0)$，l：$3x+4y-1=0$；

(2) $P_0(4,2)$，l：$12x-5y-6=0$；

(3) $P_0(-3,5)$，l：$2x+6y-5=0$.

2. 已知点 $P_0(m,2)$ 到直线 l：$6x-8y+3=0$ 的距离为 2，求 m 的值.

3. 求原点到下列直线的距离.

(1) $x+y-1=0$；　(2) $2x=1$；　(3) $3x-5y+4=0$.

B组

1. 正方形的中心在点 $A(-1,0)$，一条边所在的直线的方程为 $x+3y-5=0$，求其他三边所在的直线的方程.

2. 已知直线 l 经过点 $P(-5,-4)$ 且与两坐标轴围成的三角形的面积为 5，求直线 l 的方程.

1.5 圆的方程

1.5.1 圆的标准方程

思考

把一根短绳的一端固定在图板上，拉紧绳子，使绳子在图板上移动一周，画出的图形是什么？

在平面几何中，我们已经知道圆的定义，即平面内到一个定点的距离等于定长的点的轨迹，其中定点叫作圆心，定长叫作半径. 下面，我们在直角坐标系中研究圆的方程.

如图 1-12 所示，设圆心的坐标为 $C(a,b)$，圆的半径为 r，点 $M(x,y)$ 为圆上任意一点，则

$$|MC|=r.$$

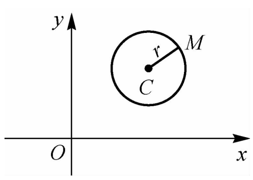

图 1-12

根据两点间距离公式，得

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r,$$

两边平方得

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{1-9}$$

这个方程就是圆心为 $C(a,b)$，半径为 r 的圆的方程，我们把它称为**圆的标准方程**.

特别地，当圆心为坐标原点 $O(0,0)$ 时，圆的标准方

程为

$$x^2+y^2=r^2. \tag{1-10}$$

例 1 求以点 $C(3,4)$ 为圆心，以 $r=5$ 为半径的圆的标准方程.

解 由题意可知 $a=3$，$b=4$，$r=5$，故圆的标准方程为

$$(x-3)^2+(y-4)^2=25.$$

例 2 写出圆 $(x-2)^2+(y+3)^2=16$ 的圆心坐标及半径.

解 将方程 $(x-2)^2+(y+3)^2=16$ 化为

$$(x-2)^2+[y-(-3)]^2=4^2,$$

所以 $$a=2,b=-3,r=4,$$

故圆心坐标为 $C(2,-3)$，半径 $r=4$.

小提示

利用圆的标准方程求圆心坐标时，应注意公式中两个括号内都是减号.

例 3 根据下面给出的条件，求圆的方程.

(1) 经过点 $A(1,4)$，$B(7,2)$，并且圆心在 $x-y+1=0$ 上；

(2)以点 $C(-2,1)$ 为圆心，并且经过点 $A(2,-2)$；

(3)设点 $A(1,0)$，$B(2,1)$，以线段 AB 为直径.

解 (1)设圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

因为点 $A(1,4)$，$B(7,2)$ 在圆上，所以满足圆的方程；圆心 $C(a,b)$ 在直线 $x-y+1=0$ 上，所以满足直线方程. 因此，得到一个关于 a，b，r 的方程组：

$$\begin{cases}(1-a)^2+(4-b)^2=r^2,\\(7-a)^2+(2-b)^2=r^2,\\a-b+1=0.\end{cases}$$

解方程组得 $a=5$，$b=6$，$r^2=20$.

故所求圆的方程为 $(x-5)^2+(y-6)^2=20$.

(2)因为点 $C(-2,1)$ 为圆心，并且圆经过点 $A(2,-2)$，则点 A，C 的距离即为半径，所以根据两点间距离公式得圆的半径为

$$r=\sqrt{(-2-2)^2+[1-(-2)]^2}=5,$$

故所求圆的方程为 $(x+2)^2+(y-1)^2=25$.

(3)设圆心坐标为 $C(a,b)$. 因为线段 AB 的长度为直径，所以圆心 C 为线段 AB 的中点，则

$$a=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2},$$

$$b=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2},$$

所以圆心坐标为 $C\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$. 半径为线段 AB 长度的 $\frac{1}{2}$,所以

$$\begin{aligned} r&=\frac{1}{2}|AB| \\ &=\frac{1}{2}\sqrt{(1-2)^2+(0-1)^2} \\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

故所求圆的方程为 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

知识延伸

赵州桥(图 1-13)位于河北省赵县,是世界上现存年代久远、跨度最大、保存最完整的单孔坦弧敞肩石拱桥,在中国造桥史上占有重要地位,对全世界后代桥梁建筑有着深远的影响. 赵州桥净跨度为 37.02 m,圆拱高约为 7.23 m,那么如何求赵州桥圆拱所在的方程呢?

图 1-13

首先,以圆拱所对弦的直线作为 x 轴,弦的垂直平分线作为 y 轴,建立一个平面直角坐标系(图 1-14).

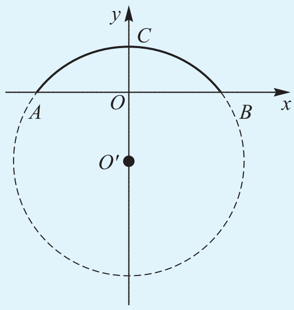

图 1-14

设圆拱所在圆的圆心为 $O'(0,b)$，半径为 r，则圆拱的方程为

$$x^2+(y-b)^2=r^2.$$

根据已知条件，将点 $A(-18.51,0)$，$B(18.51,0)$，$C(0,7.23)$代入方程，得

$$\begin{cases} 18.51^2+b^2=r^2, \\ 0+(7.23-b)^2=r^2, \end{cases}$$

解得 $b\approx-20.08$，$r^2\approx745.83$，故赵州桥圆拱所在的方程为

$$x^2+(y+20.08)^2=745.83.$$

做一做

1. 写出下列各圆的圆心坐标和半径，并画出图形.

(1)$x^2+(y+2)^2=9$；

(2)$(x+1)^2+(y-3)^2=4$.

2. 写出下列各圆的标准方程，并画出图形.

(1)圆心在原点，半径为 2；

(2)圆心坐标为 $C(-2,0)$，半径为 5；

(3)圆心坐标为 $C(1,-4)$，半径为$\sqrt{3}$.

1.5.2 圆的一般方程

将圆的标准方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

展开整理得

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0.$$

令 $D=-2a,E=-2b,F=a^2+b^2-r^2$，则任何一个圆的方程都可以化为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

思考

方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 满足什么条件时，可以表示圆？

将上式配方整理得

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4},$$

当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，上式方程为圆的标准方程.

因此，当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (1\text{-}11)$$

叫作**圆的一般方程**. 其中，圆心坐标为 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径为

$$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}.$$

想一想

圆的标准方程与圆的一般方程各有什么特点？

观察式(1-11)，可以发现它具有以下特点：

(1)含 x^2 项的系数与含 y^2 项的系数相同，都是 1.

(2)不含 xy 项.

例 4 判断方程 $x^2+y^2-4x+6y+9=0$ 是否为圆的方程，如果是，求出圆心的坐标和半径.

解： 方法一：将方程配方，得

$$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=4,$$

即

$$(x-2)^2+(y+3)^2=2^2.$$

所以方程为圆的方程，圆心的坐标为 $(2,-3)$，半径为 2.

方法二：与圆的一般方程比较可知，$D=-4,E=6,F=9$，则

$$D^2+E^2-4F=16+36-36=16>0,$$

所以方程为圆的方程，又由

$$\frac{D}{2}=-2,\frac{E}{2}=3,\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}=2$$

可知，圆心的坐标为 $(2,-3)$，半径为 2.

观察圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 和圆的一般

方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，可知这两个方程中分别含有三个字母系数 a,b,r 和 D,E,F. 因此，如果根据已知条件确定了这两组中任意一组中三个字母系数的值，就可以确定圆的方程.

例 5　求过三点 $O(0,0)$，$A(1,1)$，$B(4,2)$ 的圆的方程.

解　设圆的一般方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

将已知的三个点的坐标代入方程，得

$$\begin{cases}0^2+0^2+D\times0+E\times0+F=0,\\1^2+1^2+D\times1+E\times1+F=0,\\4^2+2^2+D\times4+E\times2+F=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}F=0,\\D+E+F=-2,\\4D+2E+F=-20,\end{cases}$$

解得 $$D=-8,E=6,F=0.$$

故所求圆的方程为 $x^2+y^2-8x+6y=0$.

例 6　已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标为 $A(3,2)$，$B(-4,0)$，$C(0,0)$，求 $\triangle ABC$ 外接圆的方程.

解　设 $\triangle ABC$ 外接圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

将点 A,B,C 的坐标代入方程，得

$$\begin{cases}3^2+2^2+D\times3+E\times2+F=0,\\(-4)^2+0^2+D\times(-4)+E\times0+F=0,\\0^2+0^2+D\times0+E\times0+F=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}13+3D+2E+F=0,\\16-4D+F=0,\\F=0,\end{cases}$$

解得 $$D=4,E=-\frac{25}{2},F=0.$$

故 $\triangle ABC$ 外接圆的方程为

$$x^2+y^2+4x-\frac{25}{2}y=0.$$

做一做

1. 求过点 $A(0,1)$，$B(3,2)$ 且半径为 2 的圆的方程.

2. 求经过直线 $x+3y+7=0$ 和 $3x-2y-12=0$ 的交点，并且圆心为 $C(-1,1)$ 的圆的方程.

3. 求过三点 $P(1,0)$，$A(2,0)$，$B(1,1)$ 的圆的方程.

习题 1.5

A 组

1. 判断下列方程表示什么图形.

(1) $x^2+y^2=0$；

(2) $x^2+y^2-2x-4y-3=0$；

(3) $x^2+y^2-4x+4y+4=0$.

2. 求满足下列条件的圆的标准方程.

(1) 圆心在原点，半径为 2；

(2) 圆心在点 $(2,1)$，半径为 3；

(3) 圆心在点 $(8,-3)$，且经过点 $(5,1)$.

3. 求下列方程表示的圆的圆心和半径.

(1) $x^2+y^2=7$；

(2) $(x-3)^2+(y+3)^2=6$；

(3) $x^2+y^2-4x=0$；

(4) $x^2+y^2-2x-2y-2=0$.

4. 求过点 $A(0,1)$，$B(3,2)$ 且半径为 2 的圆的一般方程.

B 组

1. 已知圆过点 $(0,1)$，$(2,1)$，$(3,4)$，求该圆的方程.

2. 已知点 $A(3,-2)$，$B(-5,4)$，求以 AB 为直径的圆的方程.

3. 已知圆的方程为 $x^2+y^2+4x-6y+8=0$，求该圆的圆心坐标和半径.

4. 求经过直线 $x+3y+7=0$ 和直线 $3x-2y-12=0$ 的交点，且圆心为 $(-1,1)$ 的圆的方程.

1.6　直线与圆的位置关系

1.6.1　直线与圆的位置关系及判定方法

直线与圆的位置关系有三种：

(1)直线与圆无交点时，称直线与圆相离.

(2)直线与圆仅有一个交点时，称直线与圆相切.

(3)直线与圆有两个交点时，称直线与圆相交.

直线与圆位置关系的判定方法有以下两种：

方法一： 设圆心 C 到直线 l 的距离为 d，半径为 r，如图 1-15 所示.

(1)直线 l 与圆相离，当且仅当 $d>r$，如图 1-15(a)所示.

(2)直线 l 与圆相切，当且仅当 $d=r$，如图 1-15(b)所示.

(3)直线 l 与圆相交，当且仅当 $d<r$，如图 1-15(c)所示.

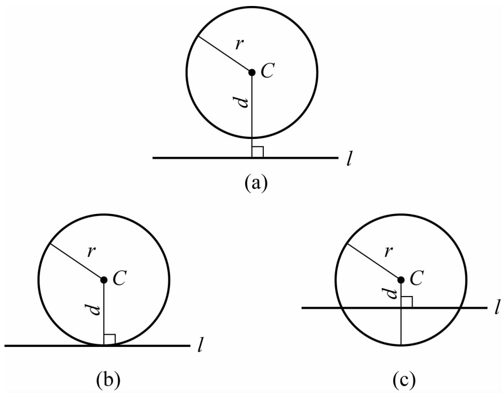

图 1-15

方法二： 设直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$，圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$，两个方程联立，经消元法得到一元二次方程，其判别式为 Δ，则

(1)直线 l 与圆相离,当且仅当 $\Delta<0$.

(2)直线 l 与圆相切,当且仅当 $\Delta=0$.

(3)直线 l 与圆相交,当且仅当 $\Delta>0$.

思考

点与圆的位置关系如何判别?

下面我们通过具体的例子来说明如何判别直线与圆的位置关系.

例 1 判断直线 $x-y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 的位置关系.

解 方法一:圆心(0,0)到直线 $x-y+1=0$ 的距离为

$$d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

圆的半径为 $r=\sqrt{2}$. 因为 $d<r$,所以直线与圆有两个交点,即直线与圆相交.

方法二:直线与圆的方程联立组成方程组

$$\begin{cases}x-y+1=0,\\x^2+y^2=2.\end{cases}$$

由直线方程得 $y=x+1$,代入圆的方程,有

$$2x^2+2x-1=0.$$

因为该方程的判别式为

$$\Delta=2^2-4\times2\times(-1)=12>0,$$

所以直线与圆相交.

做一做

1. 已知直线 l:$y=kx+5$,圆 C:$(x-1)^2+y^2=1$,当 k 为何值时,直线与圆:

(1)相交;

(2)相切;

(3)相离.

2. 判断下列直线与圆的位置关系.

(1)直线 $x=1$,圆 $(x-2)^2+y^2=9$;

(2)直线 $y=-1$，圆 $(x-3)^2+(y+1)^2=16$；

(3)直线 $x-2y-2=0$，圆 $x^2+y^2=4$.

3. 已知直线 $ax+y-4=1$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 相交，求 a 的值.

4. 已知直线 $l:3x+y+a=0$ 过圆 $x^2+y^2+2x-4y=0$ 的圆心，求直线 l 的方程.

1.6.2 直线与圆相交时弦长的求法

若直线 $y=kx+m$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 相交于点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则直线被圆截得的弦长为

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}\,|y_1-y_2|. \quad (1\text{-}12)$$

例 2　已知直线 $l:y=x$ 与圆 $O:x^2+y^2=2$ 交于点 $A(1,1)$，$B(-1,-1)$，求 $|AB|$.

解　根据弦长公式可得，

$$|AB|=\sqrt{1+1^2}\,|1-(-1)|=2\sqrt{2}.$$

例 3　已知直线 $l:2x-y+3=0$ 与圆 $C:x^2+(y+2)^2=25$ 相交于 A，B 两点(图 1-16)，求 $|AB|$.

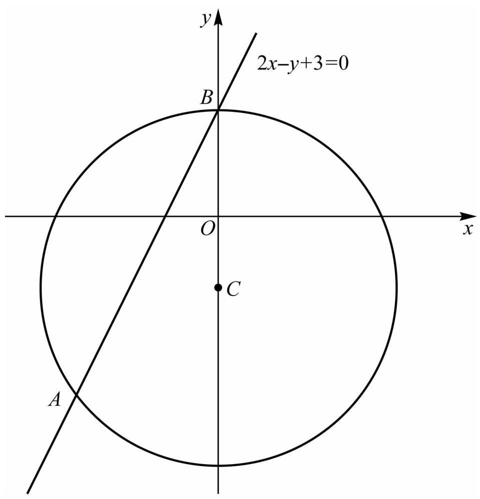

图 1-16

— 小提示 —

灵活利用图形的几何性质，有助于更好地解题.

解 根据题意可知，圆心坐标为 $C(0,-2)$，半径 $r=5$，则圆心 C 到直线 l 的距离为

$$d=\frac{|2\times0+(-1)\times(-2)+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}.$$

如图 1-17 所示，CD 为线段 AB 的垂直平分线，$|AB|=2|BD|$，$d=|CD|$，$|CB|=r$，故

$$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{25-5}=4\sqrt{5}.$$

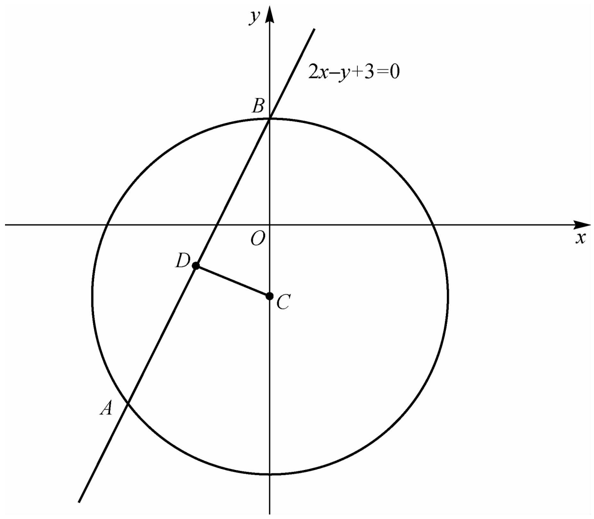

图 1-17

做一做

1. 已知圆 O 的圆心为原点且截直线 $3x+4y+15=0$ 所得的弦长为 8，求圆 O 的标准方程.

2. 过点 $(0,1)$ 的直线与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 A，B 两点，求 $|AB|$ 的最小值.

3. 已知直线 $x+y-4=0$ 与圆 $(x-3)^2+(y-3)^2=4$ 相交于 A，B 两点，求 $|AB|$.

1.6.3 圆的切线方程的求法

在 1.6.1 节中，我们知道直线与圆相切的判定方法，下面通过例子介绍圆的切线方程的求法.

例4　已知圆的方程为 $x^2+y^2=10$，求圆上一点 $(2,\sqrt{6})$ 的切线方程.

解　设切线方程的斜率为 k，则过点 $(2,\sqrt{6})$ 的切线方程为

$$y-\sqrt{6}=k(x-2),$$

即

$$kx-y-2k+\sqrt{6}=0.$$

于是，圆心 $(0,0)$ 到直线 $kx-y-2k+\sqrt{6}=0$ 的距离为

$$d=\frac{|-2k+\sqrt{6}|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

又直线 $kx-y-2k+\sqrt{6}=0$ 与圆 $x^2+y^2=10$ 相切，所以

$$d=\frac{|-2k+\sqrt{6}|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{10}=r,$$

解得

$$k=-\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

所以圆上一点 $(2,\sqrt{6})$ 的切线方程为

$$\sqrt{6}x+3y-5\sqrt{6}=0.$$

想一想

例4是否有其他求解方法？

做一做

1. 过点 $P(2,3)$ 向圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 作切线，求该切线的方程.

2. 求圆心为 $(1,-2)$ 且与 x 轴相切的圆的方程.

3. 已知直线 $ax-2y+1=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-3)^2=16$ 相切，求 a 的值.

习题 1.6

A组

1. 选择题.

(1)若直线 $4x-3y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2-4x-2y+m=0$ 无公共点，则 m 的取值范围是(　　).

A. $0<m<5$　　B. $1<m<5$　　C. $m>1$　　D. $m<0$

(2)过坐标原点与圆$(x-2)^2+y^2=1$相切的直线的斜率是(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\pm\sqrt{3}$

2. 判断下列各条直线与圆的位置关系,若相交则写出交点坐标.

(1)直线 $2x+y-5=0$,圆$(x-1)^2+(y+2)^2=6$;

(2)直线 $2x-y-5=0$,圆 $x^2+y^2=\frac{25}{4}$;

(3)直线 $4x-3y-24=0$,圆 $x^2+y^2=25$;

(4)直线 $x+2y+5=0$,圆$(x+3)^2+(y-1)^2=6$.

3. 已知圆的方程是 $x^2+y^2=1$,求斜率等于 1 的该圆的切线方程.

4. 设圆经过点$(2,-1)$,与直线 $x-y-1=0$ 相切,并且圆心在直线 $y+2x=0$ 上,求圆的方程.

5. 已知直线 $x+y+c=0$ 与圆 $x^2+y^2=9$ 相切,求 c 的值.

B 组

1. 已知点 $A(1,5)$,$B(-2,3)$,求以线段 AB 为直径的圆的方程.

2. 已知点 $P(-2,1)$在直线 l 上,直线 l 与圆 $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ 相切,求直线 l 的斜率.

3. 判断直线 $x-y+3=0$ 与圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的位置关系,若相切则求出切线方程,若相交则求出直线被圆截得的弦长.

4. 已知圆 O:$(x+3)^2+(y+1)^2=4$,点 $P(2,1)$,求以线段 OP 为半径的圆的方程.