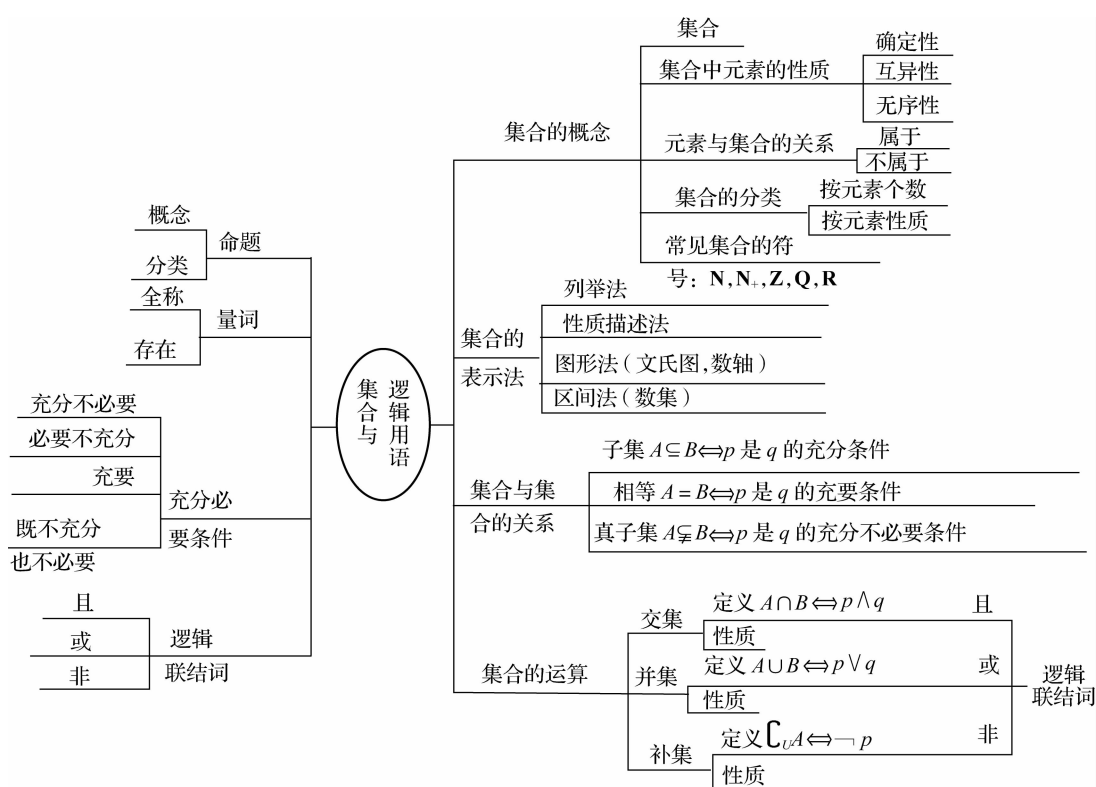


专题一

集合与逻辑用语



思维导图





考情分析

考题回顾	考点	近 5 年常考题型及分值				
		2017	2018	2019	2020	2021
考题回顾	集合及其表示					
	集合的关系及运算	选择题, 3 分	选择题, 3 分	选择题, 3 分	选择题, 3 分	选择题, 3 分
	逻辑用语		选择题, 3 分	选择题, 3 分	选择题, 3 分	选择题, 3 分
	充要条件	选择题, 3 分	选择题, 3 分	选择题, 3 分	选择题, 3 分	选择题, 3 分
命题趋势	本章内容在历年真题中多以选择题形式出现, 要求不高, 难度不大. 主要从四个方面考查: 一是考查集合的概念、集合的基本关系及常用数集的符号表示; 二是考查集合的基本运算. 命题常以两个集合的交集、并集和补集运算为主, 多与绝对值、不等式等相结合; 三是考查充分条件、必要条件和充要条件的判定, 多与函数等相结合; 四是考查命题与逻辑联结词的应用. 本章是考试的必考内容, 也是比较容易拿分的知识点, 其中, 集合的运算, 逻辑用语和充要条件是每年必考的内容					



真题链接

1. (2021 山东春考) 已知集合 $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{2, 4\}$, 则 $M \cap (\complement_U N)$ 等于().

- A. $\{2\}$ B. $\{1, 3\}$ C. $\{0, 1, 3\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$

【答案】B 解析: 因为 $\complement_U N = \{0, 1, 3\}$, 所以 $M \cap (\complement_U N) = \{1, 3\}$.

2. (2021 山东春考) 已知命题 p : 甲、乙、丙三名同学都是共青团员, 则 $\neg p$: ().

- A. 甲、乙、丙三名同学都不是共青团员
B. 甲、乙、丙三名同学中至少有一名不是共青团员
C. 甲、乙、丙三名同学中至少有两名不是共青团员
D. 甲、乙、丙三名同学中至多有一名不是共青团员

【答案】B 解析: $\neg p$: 甲、乙、丙三名同学不都是共青团员, 即至少有一名不是共青团员.

3. (2021 山东春考) “角 α 是第一象限角” 是 “ $\sin \alpha > 0$ ” 的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A 解析: 若角 α 是第一象限角, 则 $\sin \alpha > 0$, 即 “角 α 是第一象限角” 是 “ $\sin \alpha > 0$ ” 的充分条件; 反之, 若 $\sin \alpha > 0$, 则角 α 不一定是第一象限角, 即 “角 α 是第一象限角” 是 “ $\sin \alpha > 0$ ” 的不必要条件, 综上选 A.

4. (2020 山东春考) 已知全集 $U = \{a, b, c, d\}$, 集合 $M = \{a, c\}$, 则 $\complement_U M$ 等于().

- A. $\emptyset$ B. $\{a, c\}$ C. $\{b, d\}$ D. $\{a, b, c, d\}$

【答案】C 解析: 根据集合交、并、补的定义运算可得.

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B 解析：“ $p \vee q$ 是真命题”，则 p 或 q 为真命题，所以“ $p \vee q$ 是真命题”推不出“ p 是真命题”，但“ p 是真命题”一定能推出“ $p \vee q$ 是真命题”，故“ $p \vee q$ 是真命题”是“ p 是真命题”的必要不充分条件，故选 B.



考向探究

热点考向一 元素与集合、集合与集合的关系

【例 1】 设全集 $U = \{1, 8, a^2 - a + 1\}$, $A = \{1, |a| + 7\}$, $\complement_U A = \{3\}$, 求实数 a 的值.



解析

因为 $\complement_U A = \{3\}$, 所以 $3 \in U$ 且 $3 \notin A$. 于是 $a^2 - a + 1 = 3$, 解得 $a = 2$ 或 $a = -1$. 当 $a = 2$ 时, $|a| + 7 = 9 \notin U$, 不合题意; 当 $a = -1$ 时, $|a| + 7 = 8 \in U$, 符合题意. 故 $a = -1$.



小结

本题考查了集合元素的互异性、集合之间的关系及对所求得的结果依次进行检验的习惯.

【例 2】 设集合 $A = \{0\}$, 下列结论正确的是().

A. $A = 0$

B. $A \subseteq \emptyset$

C. $0 \in A$

D. $\emptyset \in A$



解析

本题考查了元素与集合、集合与集合之间的关系. 答案选 C.



小结

正确理解符号 $\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\supsetneq$ 的意义, 是正确处理此类问题的关键.



变式训练一

1. 给出下列关系: ① $0.5 \in \mathbf{R}$; ② $\sqrt{2} \notin \mathbf{R}$; ③ $|-3| \in \mathbf{N}$; ④ $|\sqrt{3}| \in \mathbf{Q}$. 其中正确的个数为().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

2. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, $A = \{(x, y) | y = x\}$, $B = \{(x, y) | \frac{y}{x} = 1\}$, 则集合 A, B 的关系为().

A. $A \subsetneq B$

B. $A \supsetneq B$

C. $A = B$

D. 以上都不对

热点考向二 集合的运算

【例 3】 已知集合 $M = \{x | a \leq x \leq a + 2\}$, $N = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.



解析

如图所示, 要使 $M \cap N = \emptyset$, 必须满足 $\begin{cases} a + 2 \leq 5, \\ a \geq -1, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq a \leq 3$, 所以实数 a 的取值范围为 $\{a | -1 \leq a \leq 3\}$.



小结

解题时利用数轴表示集合,便于寻求满足条件的实数 a .【例 4】 设全集 $U = \mathbf{R}$; $A = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{x \mid |x| = y + 1, y \in A\}$, 求 $\complement_U B$.

解析

因为 $A = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\} = \{-1, 2\}$, $y \in A$, 所以当 $y = -1$ 时, $x = 0$; 当 $y = 2$ 时, $x = \pm 3$, 所以 $B = \{-3, 0, 3\}$.所以 $\complement_U B = \{x \mid x \neq -3 \text{ 且 } x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 3\}$.

小结

本题考查对集合运算的理解及性质的运用.



变式训练二

1. 已知全集 $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cap (\complement_I B) = (\quad)$.A. $\{1, 5\}$ B. $\{1, 3, 5\}$ C. $\{0, 1, 4, 5\}$ D. $\{2, 3, 4, 5\}$ 2. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$, 则 $(\quad)$.A. $U = A \cup B$ B. $U = (\complement_U A) \cup B$ C. $U = A \cup (\complement_U B)$ D. $U = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ 3. 已知 $A = \{x \mid a \leq x \leq a + 3\}$, $B = \{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < -6\}$.(1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围;(2) 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.

热点考向三

充要条件的判定

【例 5】 已知 $p: |3x - 5| < 4$, $q: (x - 1)(x - 2) < 0$, 则 p 是 q 的 $(\quad)$.

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件



解析

 $p: |3x - 5| < 4 \Rightarrow p: \frac{1}{3} < x < 3$, $q: (x - 1)(x - 2) < 0 \Rightarrow q: 1 < x < 2$.所以 $p \not\Rightarrow q$ 但 $q \Rightarrow p$, 所以 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.

小结

判断充分必要条件时, 先要分清条件和结论, 进而找到条件与结论之间的逻辑推理关系. 常用的判断法: 定义法、集合法、转换法(逆否法) 和充要关系传递法.



变式训练三

1. “ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ”是“ $\tan \alpha = 1$ ”的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. 判断下列问题中, p 是 q 的什么条件?

(1) $p: x^2 > y^2, q: x > y$;

(2) $p: x \in (A \cup B), q: x \in (A \cap B)$;

(3) $p: x > 3, q: x > 2$;

(4) $p: a$ 是有理数, $q: a+2$ 是有理数.

热点考向四 常用逻辑用语

【例 6】 下列四个命题中, 假命题为().

A. $\forall x \in \mathbf{R}, 2^x > 0$

B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x + 1 > 0$

C. $\exists x \in \mathbf{R}, \lg x > 0$

D. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 = 4$



解析

当 $x = -1$ 时, $x^2 + 3x + 1 = -1 < 0$, 故命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x + 1 > 0$ ”为假命题. 故选 B.



小结

掌握全称量词和存在量词的符号的含义是关键.

【例 7】 已知命题 p : “若 $x^2 - 3x + 2 = 0$, 则 $x = 1$ 或 $x = 2$ ”, 命题 q : “ $a^{\frac{1}{2}} > b^{\frac{1}{2}}$ ”的充要条件为“ $\ln a > \ln b$ ”, 则下列复合命题中假命题是().

A. $p \vee q$

B. $p \wedge q$

C. $(\neg p) \vee (\neg q)$

D. $p \wedge (\neg q)$



解析

对于命题 p , p 为真命题; 对于命题 q , 当 $a = 1, b = 0$ 时, $a^{\frac{1}{2}} > b^{\frac{1}{2}}$, 但 $\ln a > \ln b$ 不成立, q 是假命题, 所以 $\neg q$ 是真命题; 所以 $p \wedge q$ 是假命题, $p \vee q, (\neg p) \vee (\neg q)$ 和 $p \wedge (\neg q)$ 是真命题. 故选 B.



小结

掌握命题的定义和充要条件的判断是解题关键.



变式训练四

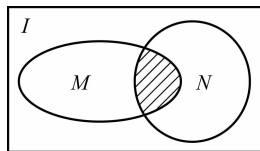
- 如果命题“ p 且 q ”是假命题，“非 p ”是真命题，那么().
 A. 命题 p 一定是真命题
 B. 命题 q 一定是真命题
 C. 命题 q 既可以是真命题也可以是假命题
 D. 命题 q 一定是假命题
- 已知实数 a 满足 $1 < a < 2$ ，命题 p ：函数 $y = \lg(2 - ax)$ 在区间 $[0, 1]$ 上是减函数；命题 q ： $x^2 < 1$ 是 $x < a$ 的充分不必要条件，则().
 A. p 或 q 为真命题
 B. p 且 q 为假命题
 C. $\neg p$ 且 q 为真命题
 D. $\neg p$ 或 $\neg q$ 为真命题



专题一专项突破

一、选择题

- 下列关系中，正确的个数为().
 ① $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbf{R}$; ② $\{\sqrt{3}\} \in \mathbf{Q}$; ③ $0 \in \mathbf{N}_+$; ④ $\{-5\} \subseteq \mathbf{Z}$.
 A. 1
 B. 2
 C. 3
 D. 4
- 已知集合 $M = \{x | -3 < x \leq 5\}$, $N = \{x | -5 < x < 5\}$, 则 $M \cap N =$ ().
 A. $\{x | -5 < x < 5\}$
 B. $\{x | 3 < x < 5\}$
 C. $\{x | -5 < x \leq 5\}$
 D. $\{x | -3 < x < 5\}$
- 集合 $\{1, 2, 3\}$ 所有真子集的个数为().
 A. 3
 B. 6
 C. 7
 D. 8
- 已知集合 $A = \{1, 4\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, 则 $A \cup B$ 等于().
 A. $\{4, 5, 6\}$
 B. $\{1, 4, 5, 6\}$
 C. $\{4\}$
 D. $\emptyset$
- 全集 $U = \{0, 1, 3, 5, 6, 8\}$, 集合 $A = \{1, 5, 8\}$, $B = \{2\}$, 则集合 $(\complement_U A) \cup B =$ ().
 A. $\{0, 2, 3, 6\}$
 B. $\{0, 3, 6\}$
 C. $\{1, 2, 5, 8\}$
 D. $\emptyset$
- 下列命题中，真命题是().
 A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geq x$
 B. 命题“若 $x^2 = 1$, 则 $x = 1$ ”
 C. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 \geq x_0$
 D. 命题“若 $x \neq y$, 则 $\sin x \neq \sin y$ ”
- 设 $A = \{x | 2 \leq x \leq 6\}$, $B = \{x | 2a \leq x \leq a + 3\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是().
 A. $[1, 3]$
 B. $[3, +\infty)$
 C. $[1, +\infty)$
 D. $(1, 3)$
- 集合 $M = \{x | x^2 < 4\}$ 与 $N = \{x | x \leq 1\}$ 都是集合 I 的子集，则图中阴影部分所表示的集合为().
 A. $\{x | x \leq 1\}$
 B. $\{x | x < 2\}$
 C. $\{x | -2 < x < 2\}$
 D. $\{x | -2 < x \leq 1\}$



9. 已知命题 $p: a^2 \geq 0 (a \in \mathbf{R})$, 命题 q : 函数 $f(x) = x^2 - x$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则下列命题中真命题为 ()
- A. $p \vee q$ B. $p \wedge q$ C. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ D. $(\neg p) \vee q$
10. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x = 2a, a \in A\}$, 则集合 $\complement_U(A \cup B)$ 中元素的个数为 ()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
11. 如果 $A = \{x | x > -1\}$, 那么 ()
- A. $0 \subseteq A$ B. $\{0\} \in A$ C. $\emptyset \in A$ D. $\{0\} \subseteq A$
12. 定义集合间的一种运算“ $*$ ”满足: $A * B = \{\omega | \omega = xy(x+y), x \in A, y \in B\}$. 若集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3\}$, 则 $A * B$ 的子集个数是 ()
- A. 4 B. 8 C. 16 D. 32
13. 若集合 $A = \{x | -2 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 < x < 2\}$, 则集合 $A \cap B =$ ()
- A. $\{x | -1 < x < 1\}$ B. $\{x | -2 < x < 1\}$
C. $\{x | -2 < x < 2\}$ D. $\{x | 0 < x < 1\}$
14. 设集合 $A = \{3, 5, 6, 8\}$, 集合 $B = \{4, 5, 7, 8\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()
- A. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ B. $\{3, 6\}$ C. $\{4, 7\}$ D. $\{5, 8\}$
15. 集合 $A = \{0, 2, a\}$, $B = \{1, a^2\}$. 若 $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 16\}$, 则 a 的值为 ()
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4
16. 已知集合 A, B , 若 A 不是 B 的子集, 则下列命题中正确的是 ()
- A. 对任意的 $a \in A$, 都有 $a \notin B$ B. 对任意的 $b \in B$, 都有 $b \in A$
C. 存在 a_0 , 满足 $a_0 \in A, a_0 \notin B$ D. 存在 a_0 , 满足 $a_0 \in A, a_0 \in B$
17. 设 $A = \{x | 1 < x < 2\}$, $B = \{x | x < a\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 a 的取值范围是 ()
- A. $a \geq 2$ B. $a \leq 1$ C. $a \geq 1$ D. $a \leq 2$
18. 已知集合 $P = \{x \in \mathbf{N} | 1 \leq x \leq 10\}$, 集合 $Q = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + x - 6 = 0\}$, 则 $P \cap Q$ 等于 ()
- A. $\{2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3\}$
19. 已知 x, y, z 为非零实数, 代数式 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} + \frac{|xyz|}{xyz}$ 的值所组成的集合是 M , 则下列判断正确的是 ()
- A. $0 \notin M$ B. $2 \in M$ C. $-4 \notin M$ D. $4 \in M$
20. 若集合 $A = \{x | kx^2 + 4x + 4 = 0\}$ 中有且仅有一个元素, 则实数 k 的值为 ()
- A. $k \in \{0\}$ B. $k \in \{1\}$ C. $k \in \{1, 0\}$ D. $k \in \{1, -1\}$

二、填空题

21. “ $a > 4$ ”是“ $a > 1$ ”的_____条件. (填“充分不必要”“必要不充分”或“充要”)
22. 集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | x < 1\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$ _____.
23. 设集合 $A = \{0, a\}$, $B = \{-1, 5, 2\}$, 且 $A \cap B = \{2\}$, 那么 $A \cup B =$ _____.
24. 已知集合 $A = \{(x, y) | x - y = 1\}$, $B = \{(x, y) | x + y = 3\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
25. 设集合 $A = \{1, 2, m^2 - 3m - 1\}$, $B = \{-1, 3\}$, 且 $A \cap B = \{3\}$, 那么 $m =$ _____.

三、解答题

26. 设全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | 2 \leq x < 4\}$, $B = \{x | x \geq 3\}$, 求 $A \cap B$, $(\complement_U A) \cup B$.

27. 已知集合 $A = \{m^2, m+1, -3\}$, $B = \{m-3, 2m-1, m^2+1\}$. 若 $A \cap B = \{-3\}$, 求 m 的值.

28. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 < 0\}$, $B = \{x | 1 < x < a\}$ (a 为实数).

(1) 若 $a = \frac{3}{2}$, 求 $A \cap B$;

(2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

29. 已知集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, x^2 + 1\}$. 若 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, 求 x 及 $A \cap B$.

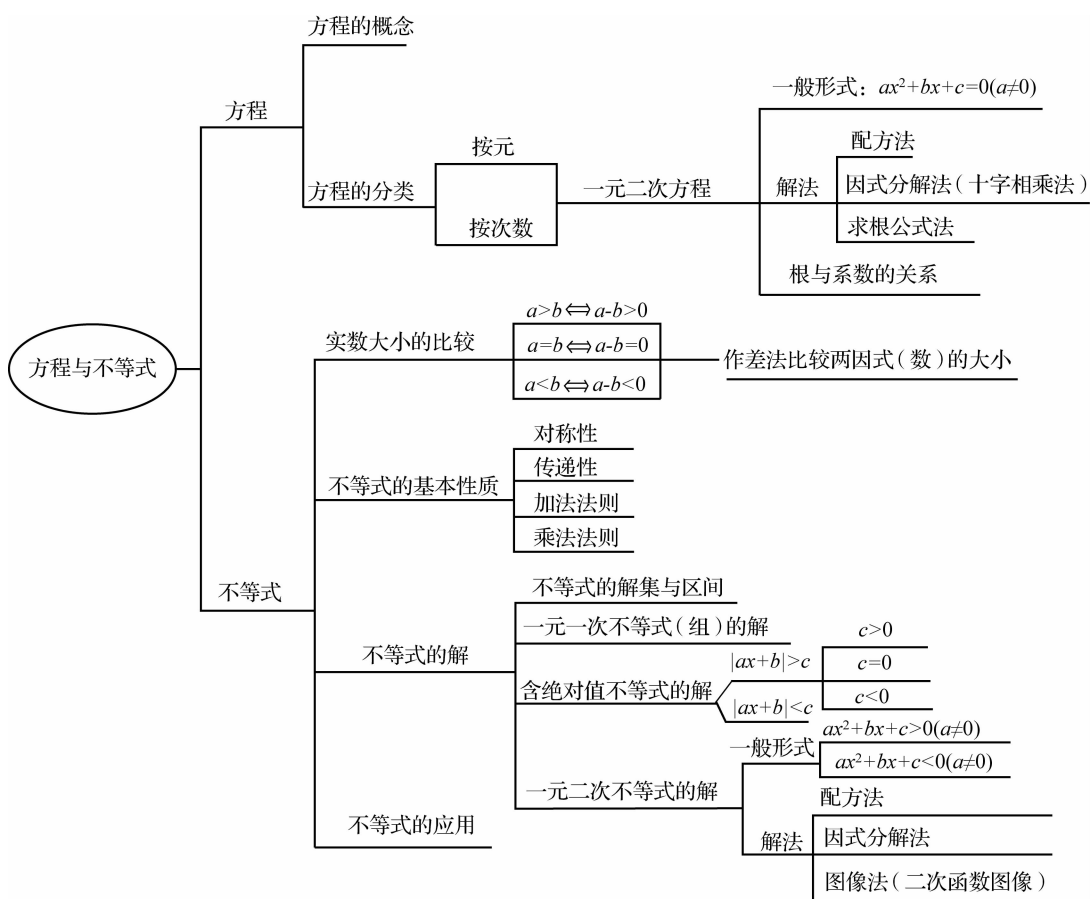
30. 若集合 $A = \{x \mid ax^2 + 3x + 2 = 0\}$ 中最多有一个元素, 求实数 a 的取值范围.

专题二

方程与不等式



思维导图





考情分析

	考点	近 5 年常考题型及分值				
		2017	2018	2019	2020	2021
考题回顾	配方法与一元二次方程					
	不等式的基本性质		选择题, 3 分		选择题, 3 分	
	一元一次不等式(组)与含绝对值的不等式					
	一元二次不等式					
命题趋势	本章内容在历年真题中多以选择题形式出现, 要求不高, 难度不大. 主要从两个方面进行考查: 一是考查不等式的基本性质; 二是考查一元一次不等式组、一元二次不等式、一元一次绝对值不等式的解法, 会用集合、区间表示不等式的解集. 第二个方面单独命题比较少, 一般是和其他知识点综合命题, 复习这部分内容时要善于总结, 将同类型题目进行归类					



真题链接

1. (2019 山东春考) 若实数 a, b 满足 $ab > 0, a + b > 0$, 则下列选项正确的是().

- A. $a > 0, b > 0$ B. $a > 0, b < 0$ C. $a < 0, b > 0$ D. $a < 0, b < 0$

【答案】A

2. (2017 山东春考) 若 a, b, c 均为实数, 且 $a < b < 0$, 则下列不等式成立的是().

- A. $a + c < b + c$ B. $ac < bc$ C. $a^2 < b^2$ D. $\sqrt{-a} < \sqrt{-b}$

【答案】A 解析: 对于 A, 由 $a < b < 0$, 可得 $a + c < b + c$, 故 A 正确; 对于 B, c 的符号不定, 则 ac, bc 大小关系不定, 故 B 错; 对于 C, 由 $a < b < 0$, 可得 $a^2 > b^2$, 故 C 错; 对于 D, 由 $a < b < 0$, 可得 $-a > -b$, $\sqrt{-a} > \sqrt{-b}$, 故 D 错. 故选 A.



考向探究

热点考向一 不等式的基本性质

【例 1】下列命题正确的是().

- A. 若 $m > n$, 则 $mc^2 > nc^2$ B. 若 $m > n, c > d$, 则 $mc > nd$
 C. 若 $\frac{m}{c^2} > \frac{n}{c^2}$, 则 $m > n$ D. 若 $m > n, mn \neq 0$, 则 $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$

**解析**

A 错误,当 $c = 0$ 时不成立;B 错误,当 m, n, c, d 均为正数时成立;C 正确,由已知可知 $c^2 \neq 0$ 且 $c^2 > 0$, 在不等式 $\frac{m}{c^2} > \frac{n}{c^2}$ 的两边同乘 c^2 , 即得 $m > n$;D 错误, $m = 1, n = -1$ 时不成立. 故选 C.

**小结**

解答这类问题的依据是不等式的性质,解题时就是看是否满足性质所需要的条件;要判断一个命题不成立,举反例即可.

【例 2】 已知 $a + b > 0$, 比较 $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}$ 与 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的大小.

**解析**

因为 $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{b}{a^2} - \frac{1}{a} + \left(\frac{a}{b^2} - \frac{1}{b}\right) = \frac{b-a}{a^2} + \frac{a-b}{b^2} = (a-b)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2}$, 且 $(a-b)^2 \geq 0, a+b > 0, a^2b^2 > 0$, 所以 $\frac{(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2} \geq 0$, 所以 $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

**小结**

不等式大小比较用差比法,通过作差,看差的符号进行判断.

**变式训练一**

1. 利用不等式的基本性质,填“ $>$ ”或“ $<$ ”:

(1) 若 $a < b$, 且 $c > 0$, 则 $ac + c$ _____ $bc + c$;

(2) 若 $a > 0, b < 0, c < 0$, 则 $(a-b)c$ _____ 0 .

2. 设 $x < y < 0$, 试比较 $(x^2 + y^2)(x - y)$ 与 $(x^2 - y^2)(x + y)$ 的大小.

热点考向二 不等式的解法

【例 3】 解下列不等式：

(1) $2x^2 + 4x + 3 > 0$; (2) $-3x^2 - 2x + 8 \geq 0$.



解析

(1) 二次项的系数 $2 > 0$, $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 3 = -8 < 0$, 所以原方程无实数根, 解集为 $\mathbf{R}$.

(2) 二次项的系数 $-3 < 0$, 将不等式的两边同乘 -1 , 得 $3x^2 + 2x - 8 \leq 0$, 因为方程 $3x^2 + 2x - 8 = 0$ 的两根为 -2 和 $\frac{4}{3}$, 所以原不等式的解集为 $[-2, \frac{4}{3}]$.



小结

解一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ (或 < 0) ($a > 0$), 先确定方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根 x_1, x_2 (设 $x_1 < x_2$), 则不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$; 不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 (x_1, x_2) . 如果 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 则不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$. 不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $\emptyset$.

【例 4】 解下列不等式：

(1) $|x - 4| < -3$;

(2) $|2x + 1| > -1$;

(3) $|3x - 1| \leq 5$.



解析

(1) 解集为 $\emptyset$; (2) 解集为 $\mathbf{R}$;

(3) $|3x - 1| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq 3x - 1 \leq 5 \Rightarrow -4 \leq 3x \leq 6 \Rightarrow -\frac{4}{3} \leq x \leq 2$, 故原不等式的解集为 $\{x | -\frac{4}{3} \leq x \leq 2\}$.



小结

解含绝对值的不等式应记住基本公式: 当 $a > 0$ 时, $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$; $|x| > a \Rightarrow x < -a$ 或 $x > a$. 当 $a \leq 0$ 时, $|x| < a$ 的解集为空集; $|x| > a$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

【例 5】 解关于 x 的不等式: $x^2 - mx + m < x$ ($m \in \mathbf{R}$).



解析

原不等式等价于 $(x - 1)(x - m) < 0$.

当 $m < 1$ 时, 原不等式的解集为 $(m, 1)$;

当 $m = 1$ 时, 原不等式的解集是 $\emptyset$;

当 $m > 1$ 时, 原不等式的解集为 $(1, m)$.



小结

解含参数字母的不等式时, 一般需讨论, 讨论时要做到不重复、不遗漏.



变式训练二

1. 不等式 $|x + 5| > 3$ 的解集是 ().

A. $\{x | -8 < x < 8\}$

B. $\{x | -2 < x < 2\}$

C. $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$ D. $\{x \mid x < -8 \text{ 或 } x > -2\}$ 2. 不等式 $x^2 - x - 12 > 0$ 的解集为_____.

热点考向三

含字母系数的一元二次不等式解法

【例 6】若不等式 $mx^2 + 2mx - 4 < 2x^2 + 4x$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则实数 m 的取值范围是().A. $(-2, 2)$ B. $(-2, 2]$ C. $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$ D. $(-\infty, 2)$ 

解析

因为 $mx^2 + 2mx - 4 < 2x^2 + 4x$, 所以 $(2-m)x^2 + (4-2m)x + 4 > 0$.当 $m = 2$ 时, $4 > 0, x \in \mathbf{R}$; 当 $m < 2$ 时, $\Delta = (4-2m)^2 - 16(2-m) < 0$,解得 $-2 < m < 2$, 此时, $x \in \mathbf{R}$. 综上所述, $-2 < m \leq 2$.

故选 B.



小结

本题考查的是不等式大于或小于 0 恒成立的问题, 不要遗漏二次项系数为零的情况.



变式训练三

1. 函数 $y = \sqrt{x^2 + mx + \frac{m}{2}}$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 有意义, 则实数 m 的取值范围是().A. $m \geq 2$ B. $m \leq 2$ C. $m \leq 0$ 或 $m > 2$ D. $0 \leq m \leq 2$ 2. 已知不等式 $x^2 + ax + 4 < 0$ 的解集为空集, 则 a 的取值范围是().A. $-4 \leq a \leq 4$ B. $-4 < a < 4$ C. $a = 4$ 或 -4 D. $a < -4$ 或 $a > 4$ 

专题二专项突破

一、选择题

1. 下列命题正确的是

()

A. 若 $a > b$, 则 $ac > bc$ B. 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$ C. 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$ D. 若 $a > b, c > d$, 则 $ac > bd$ 2. 如果 $b > a > 0$, 那么

()

A. $-\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}$ B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ C. $-\frac{1}{a} < -\frac{1}{b}$ D. $-b > -a$ 3. 不等式组 $\begin{cases} -x+2 < x-6, \\ x > m \end{cases}$ 的解集是 $\{x \mid x > 4\}$, 那么 m 的取值范围是

()

A. $\{m \mid m \geq 4\}$ B. $\{m \mid m \leq 4\}$ C. $\{m \mid m < 4\}$ D. $\{m \mid m = 4\}$ 4. 设不等式 $\left|x - \frac{1}{2}\right| < a$ 的解集为 $\{x \mid -1 < x < 2\}$, 则 a 等于

()

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

5. “ $|x+1| > 2$ ”是“ $|x| > 1$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. “ $ab > 0$ ”是“ $a > 0, b > 0$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 不等式 $kx^2 - kx + 1 > 0$ 对任意的实数 x 恒成立, 则 k 的取值范围为 ()
 A. $\{k \mid 0 < k < 4\}$ B. $\{k \mid k < 0 \text{ 或 } k > 4\}$
 C. $\{k \mid 0 \leq k < 4\}$ D. $\{k \mid k \leq 0 \text{ 或 } k > 4\}$
8. “ $x < -1$ ”是“ $|x| > 1$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
9. 不等式 $x(2-x) > 3$ 的解集是 ()
 A. $\{x \mid -1 < x < 3\}$ B. $\{x \mid -3 < x < 1\}$
 C. $\{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$ D. $\emptyset$
10. 不等式 $x^2 - |x| - 2 < 0$ 的解集是 ()
 A. $\{x \mid -2 < x < 2\}$ B. $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$
 C. $\{x \mid -1 < x < 1\}$ D. $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$
11. 若 $a \in \mathbf{R}$, 且 $a^2 + a < 0$, 则 $a, a^2, -a, -a^2$ 的大小关系是 ()
 A. $a^2 > a > -a^2 > -a$ B. $-a > a^2 > -a^2 > a$
 C. $-a > a^2 > a > -a^2$ D. $a^2 > -a > a > -a^2$
12. 设 $M = 2a(a-2) + 3, N = (a-1)(a-3), a \in \mathbf{R}$, 则有 ()
 A. $M > N$ B. $M \geq N$ C. $M < N$ D. $M \leq N$
13. 不等式 $x^2 < 3x$ 的解集是 ()
 A. $\{x \mid x > 3\}$ B. $\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 3\}$
 C. $\mathbf{R}$ D. $\{x \mid 0 < x < 3\}$
14. 不等式 $|8-3x| > 0$ 的解集是 ()
 A. $\emptyset$ B. $\mathbf{R}$ C. $\left\{x \mid x \neq \frac{8}{3}\right\}$ D. $\left\{\frac{8}{3}\right\}$
15. 不等式 $x(x-a+1) > a$ 的解集是 $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > a\}$, 则 ()
 A. $a \geq -1$ B. $a < -1$ C. $a > -1$ D. $a \in \mathbf{R}$
16. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x > 0\}$, 则 $\complement_U A$ 等于 ()
 A. $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ B. $\{x \mid 0 < x < 2\}$
 C. $\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$ D. $\{x \mid x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$
17. 不等式 $2x^2 - x - 3 > 0$ 的解集为 ()
 A. $\left\{x \mid x > \frac{3}{2} \text{ 或 } x < -1\right\}$ B. $\left\{x \mid -1 < x < \frac{3}{2}\right\}$
 C. $\left\{x \mid -\frac{3}{2} < x < 1\right\}$ D. $\left\{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < -\frac{3}{2}\right\}$
18. 对于任意实数 x , 不等式 $(a-2)x^2 - 2(a-2)x - 4 < 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(-2, 2]$ D. $(-2, 2)$

19. 不等式 $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$ 的解集是 ()
 A. $\{x \mid x > 2 \text{ 或 } x < 1\}$ B. $\{x \mid x \geq 2 \text{ 或 } x \leq 1\}$
 C. $\{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$ D. $\{x \mid 1 < x < 2\}$
20. 不等式 $(x-a)(x-b) < 0$ 的解集为 $\{x \mid 1 < x < 2\}$, 则 $a+b$ 的值为 ()
 A. 3 B. 1 C. -3 D. -1

二、填空题

21. 不等式 $-x^2 + 2x \geq 4x + 1$ 的解集是_____.
22. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 3x + 2 > 0\}$, 集合 $B = \{x \in \mathbf{R} \mid (x+1)(x-3) < 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
23. 不等式 $|x+2| \geq |x|$ 的解集是_____.
24. 设集合 $A = \{x \mid |x| \leq 3\}$, $B = \{x \mid |3-x| < 1\}$, 则 $A \cup B =$ _____.
25. 若不等式 $|x-a| < b$ 的解集是 $(-2, 8)$, 则 a, b 的值分别是_____.

三、解答题

26. 解不等式: $(1-3x)^2 + (2x-1)^2 > 13(x-1)(x+1)$.

27. 解不等式 $|x^2 + 3x - 8| \leq 10$.

28. 已知集合 $A = \{x \mid |x-a| \leq 1\}$, $B = \{x \mid (x+2)(x-3) > 0\}$, 且 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

29. 若一元二次不等式 $ax^2 + bx + 1 \geq 0 (a \neq 0)$ 的解集为 $[-2, 4]$, 求 a, b 的值.

30. 已知 $f(x) = -3x^2 + a(6-a)x + 6$.

(1) 解关于 a 的不等式 $f(1) > 0$;

(2) 若不等式 $f(x) > b$ 的解集为 $(-1, 3)$, 求实数 a, b 的值.