

第一章

集合与逻辑用语



考纲揭秘

1. 理解集合的概念,理解集合元素的确定性和互异性,掌握集合的表示法,掌握集合之间的关系(子集、真子集、相等),掌握集合的交、并、补运算.
2. 理解符号 \in 、 \notin 、 $=$ 、 \subseteq 、 \supseteq 、 \subsetneq 、 \supsetneq 、 \varnothing 、 \neq 、 \neq 、 \neq 、 \cap 、 \cup 、 $\complement_U A$ 、 \Rightarrow 、 \Leftrightarrow 的含义,并能用这些符号表示元素与集合、集合与集合、命题与命题之间的关系.
3. 能正确地区分充分、必要、充要条件.
4. 了解命题的有关概念,能准确判断一个命题的真假.
5. 理解全称量词和存在量词,理解全称命题和存在性命题.
6. 理解逻辑联结词“且”“或”“非”的含义,掌握复合命题的真值表.
7. 理解符号 \forall 、 \exists 、 \wedge 、 \vee 、 \neg 的含义.



命题趋势

本章内容在历年真题中多以选择题形式出现,要求不高,难度不大. 主要从四个方面考查:一是考查集合的概念、集合的基本关系及常用数集的符号表示;二是考查集合的基本运算. 命题常以两个集合的交集、并集和补集运算为主,多与绝对值、不等式等相结合;三是考查充分条件、必要条件和充要条件的判定,多与函数等相结合;四是考查命题与逻辑联结词的应用. 本章是考试的必考内容,也是比较容易拿分的知识,其中,集合的运算、逻辑用语和充要条件是每年必考的内容.

第一节 集合及其表示



知识清单

知识点一 集合的概念

1. 集合

一般地,我们把一些_____的对象看成一个整体,就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合,常用大写的拉丁字母_____表示.

2. 元素

构成集合的每个对象都叫作集合的元素,常用小写的拉丁字母_____表示.

3. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作_____;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作_____. 集合中的元素具有_____、_____的特征.

4. 集合的分类

(1)按元素个数分类:

- ①有限集. 含有元素的个数有限的集合叫作有限集.
- ②无限集. 含有元素的个数无限的集合叫作无限集.
- ③空集. 不含任何元素的集合叫作空集,记作_____.

注意: \emptyset 不是 $\{0\}$.

(2)按元素的特征分类:数集、点集等.

5. 常用的集合

- (1)自然数集:非负整数全体构成的集合,记作_____.
- (2)正整数集:在自然数集内排除 0 的集合,记作_____或_____.
- (3)整数集:整数全体构成的集合,记作_____.
- (4)有理数集:有理数全体构成的集合,记作_____.
- (5)实数集:实数全体构成的集合,记作_____.

知识点二 集合的表示法

1. 列举法

把集合的元素_____出来,写在_____内,这种表示集合的方法叫作列举法.

注意:用列举法表示集合时,要注意以下几点:

- (1)元素之间用逗号“,”隔开.
- (2)元素不能重复(满足集合中元素的互异性).
- (3)元素不能遗漏.

(4)当集合中的元素较少时,用列举法比较简单;当集合中的元素较多或无限,但存在一定的规律时,在不发生误解的情况下,也可以用列举法表示.

2. 性质描述法

用集合的_____表示集合的方法称为性质描述法.

性质描述法表示集合的一般形式是_____,其中“ x ”是集合中任一元素并标出元素的取舍范围 U ,“ p ”是集合中元素的共同特征性质,两者之间的竖线不可省略.

注意:用性质描述法表示集合时,要注意以下几点:

- (1)写清楚集合中元素的代表形式(一般用小写字母表示).
- (2)写明集合中元素的特征或性质.
- (3)用于描述元素特征的语句要力求简明、准确,不产生歧义;多层描述时,应当准确使用“且”“或”等关联词.
- (4)所有描述的内容都要写在大括号内.
- (5)在不引起混淆的情况下,用性质描述法表示集合有时也可以省去竖线和竖线左边的部分.例如,正整数的集合可简记为{正整数},但是,集合 $\{x|x>1\}$ 就不能省略竖线及其左边的“ x ”.

知识清单答案

知识点一 集合的概念

1. 能够确定 A, B, C, \dots
2. a, b, c, \dots
3. $a \in A$ $a \notin A$ 确定性 互异性
4. (1)③ \emptyset
5. (1) \mathbf{N} (2) \mathbf{N}_+ \mathbf{N}^* (3) \mathbf{Z} (4) \mathbf{Q} (5) \mathbf{R}

知识点二 集合的表示法

1. 一一列举 大括号
2. 特征性质 $\{x \in U | p\}$



典例剖析

题型一 集合的概念

例 1 在下列每组对象中:

- (1)我国著名的数学家;
 (2)超过 10 的所有自然数;
 (3)某校 2020 年新入学的高个子学生;
 (4)方程 $x-1=0$ 的实数解;
 (5)在直角坐标平面内,第二象限的所有点.
 其中能构成集合的是().

A. (1)(2)(3) B. (2)(3)(4) C. (2)(4)(5) D. (3)(4)(5)


解析

(1)“我国著名的数学家”不是一个明确的标准,不能构成一个集合;(3)“高个子学生”这一标准也不确定,无法判定某人是高还是矮,也不能构成集合;(2)(4)的对象是确定的;(5)的对象虽然有无限个,但它是确定的.因此选 C.


技巧点拨

判断某组对象能否构成集合,关键看对象是否为整体的和确定的.标准一定要是明确的,不能模糊,否则无法判断.



变式训练 1

下列语句中,能构成集合的是().

- A. 我班数学好的男生 B. 与 0 接近的全体实数
 C. 大于 π 的自然数 D. 优秀的中等职业学校

题型二 集合与元素的关系及性质

例 2 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\}$, 则 A 中元素的个数为().

A. 9 B. 8 C. 5 D. 4


解析

由 $x^2 + y^2 \leq 3$ 可知, $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$. 又因为 $x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}$, 所以 $x \in \{-1, 0, 1\}, y \in \{-1, 0, 1\}$. 所以 A 中元素的个数为 9.


技巧点拨

对于求解集合中元素个数的题目,首先求出集合,然后根据集合中元素的互异性求出集合中元素的个数,或利用数形结合的方法求出集合中元素的个数.



变式训练 2


已知集合 $A = \{1, 2, 4\}$, 集合 $B = \{x | x = a + b, a \in A, b \in A\}$, 则集合 B 中元素的个数为_____.


题型三 集合的表示方法

例 3 用列举法表示下列集合.

- (1) $A = \{x | -2 < x < 5, x \in \mathbf{Z}\}$;
 (2) $B = \{(x, y) | 2x + y = 5, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$.



 **解析** (1) $A=\{-1,0,1,2,3,4\}$;(2) $B=\{(0,5),(1,3),(2,1)\}$.

 **技巧点拨** 掌握集合的两种表示方法.

变式训练 3

用合适的方法表示下列集合.

(1) $\{11,12,13,14,15,\dots\}$;

(2) $\{1,4,9,16,25,36\}$.

实战训练

基础巩固

- 下列命题所列对象中,能组成集合的是 ()
 A. 有趣的书 B. 非常小的数 C. 好听的歌 D. 小于 3 的数
- 用列举法表示集合 $\{x|x^2-3x+2=0\}$ 的结果是 ()
 A. $\{1,2\}$ B. $1,2$ C. $\{1,2\}$ D. 以上都不是
- 用列举法表示“大于 2 且小于 9 的偶数的全体”构成的集合是 ()
 A. \emptyset B. $\{4,6,8\}$ C. $\{3,5,7\}$ D. $\{3,4,5,6,7,8\}$
- 用描述法表示“绝对值等于 1 的所有整数”组成的集合是 ()
 A. $\{-1,1\}$ B. $(-1,1)$ C. $\{x||x|=1,x\in\mathbf{Z}\}$ D. $\{x|x=1,x\in\mathbf{Z}\}$
- 下列命题中,可以确定一个集合的是 ()
 A. 全体有理数 B. 无限趋近于 2 的实数
 C. 由 $1,2,3,3,4,4,5,6,8$ 构成的全体 D. 本班性格外向的同学
- 不大于 3 的正整数的集合是 ()
 A. $\{0,1,2,3\}$ B. $\{1,2,3\}$ C. $\{x|0\leq x\leq 3\}$ D. $\{x|x\leq 3\}$
- 用列举法表示“大于 2 且小于 5 的整数”构成的集合是 ()
 A. $\{x|2<x<5\}$ B. $\{x|2<x<5,x\in\mathbf{Z}\}$ C. $\{2,3,4,5\}$ D. $\{3,4\}$
- 已知集合 $A=\{x|1<x<2\}$, $a=\sqrt{5}$,则下列关系中,正确的是 ()
 A. $a\in A$ B. $a\notin A$ C. $\{a\}\in A$ D. $\{a\}\notin A$

能力提升

- 由坐标平面内不在坐标轴上的点组成的集合是 ()
 A. $\{(x,y)|x\neq 0\}$ B. $\{(x,y)|y\neq 0\}$ C. $\{(x,y)|xy\neq 0\}$ D. $\{(x,y)|xy=0\}$
- 下列选项中,表述正确的是 ()
 A. 由 $1,3,5,7,5,3$ 组成的集合中有 6 个元素
 B. 周长为 16 cm 的三角形组成的集合是有限集合

- C. 集合 $\{0\}$ 是空集
 D. 一年级(3)班的所有同学可以组成集合
3. 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$.
- (1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值;
 - (2) 若 A 中恰有两个元素, 求 a 的取值范围;
 - (3) 若 A 中至多只有一个元素, 求 a 的取值范围.

第二节 集合之间的关系及运算



知识清单

知识点一 集合间的关系

1. 子集

一般地, 对于两个集合 A, B , 如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素, 那么, 集合 A 就称作集合 B 的子集, 记作_____或_____, 读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”.

当集合 A 不包含于集合 B 或集合 B 不包含集合 A 时, 记作_____或_____.

性质: 任何一个集合是它本身的子集, 即 $A \subseteq A$; 空集是任何集合的子集, 即 $\emptyset \subseteq A$; 对集合 A, B, C , 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

注意: 不能把子集说成由原来集合中的部分元素组成的集合, 因为 A 的子集包括它本身, 而这个子集由 A 的全体元素组成; 空集也是 A 的子集, 但这个子集中不包括 A 中的任何元素.

2. 真子集

如果 A 是 B 的子集, 并且 B 中至少有一个元素不属于 A , 则 A 是 B 的真子集 (A 包含于 B 但不等于 B), 记作_____或_____.

性质: 空集是任何非空集合的真子集; 对于集合 A, B, C , 若 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$.

注意: 元素与集合之间是属于关系, 集合与集合之间是包含关系.

3. 集合相等

如果两个集合的元素完全相同, 那么我们就说这两个集合相等. 集合 A 等于集合 B , 记作_____.

注意: 要判断两个集合是否相等, 对于元素较少的有限集, 主要看它们的元素是否完全相同; 若是无限集, 则从“互为子集”入手进行判断.

知识点二 集合的运算

1. 交集

一般地, 给定两个集合 A, B , 由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素构成的集合, 叫作 A 与 B 的

交集,记作 $A \cap B$,读作“ A 交 B ”,即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

性质:

- (1) $A \cap B = B \cap A$.
- (2) $A \cap A = \underline{\hspace{1cm}}$.
- (3) $A \cap \emptyset = \underline{\hspace{1cm}}$.
- (4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- (5) 若 $A \subseteq B$,则 $A \cap B = \underline{\hspace{1cm}}$.

2. 并集

一般地,给定两个集合 A, B ,由属于集合 A 或属于集合 B 的元素构成的集合,叫作 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$,读作“ A 并 B ”,即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

性质:

- (1) $A \cup B = B \cup A$.
- (2) $A \cup A = \underline{\hspace{1cm}}$.
- (3) $A \cup \emptyset = \underline{\hspace{1cm}}$.
- (4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- (5) 若 $A \subseteq B$,则 $A \cup B = \underline{\hspace{1cm}}$.

3. 图示两个集合的交集、并集

(1)用 Venn 图表示两个集合的交集、并集(见图 1-1).

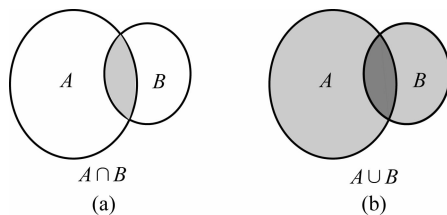


图 1-1

(2)借助数轴表示数集的交集、并集(见图 1-2).

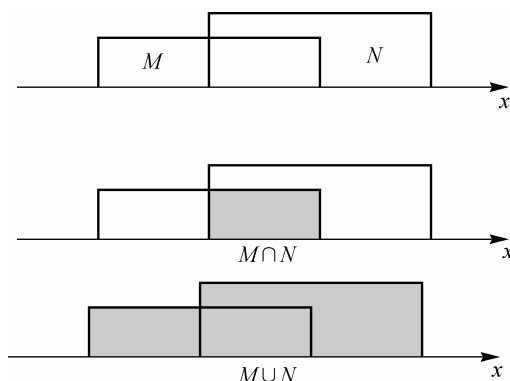


图 1-2

4. 全集

一般地,如果在讨论的问题中,每一个集合都是某一给定集合 U 的子集,那么称 U 为这些集合的全集.

注意:全集是一个相对的概念,在不同的情况下全集的概念也不同.

5. 补集

如果 A 是全集 U 的一个子集,由全集 U 中的所有不属于 A 的元素构成的集合,叫作 A 在 U 中的

补集,记作 $\complement_U A$,读作“A在U中的补集”.

性质:

(1) $A \cup (\complement_U A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $A \cap (\complement_U A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $\complement_U (\complement_U A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) $\complement_U \emptyset = \underline{\hspace{2cm}}, \complement_U U = \underline{\hspace{2cm}}$.

知识清单答案

知识点一 集合间的关系

1. $A \subseteq B \quad B \supseteq A \quad A \not\subseteq B \quad B \not\supseteq A$

2. $A \not\subseteq B \quad B \not\supseteq A$

3. $A = B$

知识点二 集合的运算

1. (2)A (3) \emptyset (5)A

2. (2)A (3)A (5)B

5. (1)U (2) \emptyset (3)A (4)U \emptyset



典例剖析

题型一 元素与集合、集合与集合之间的关系

例1 设集合 $A = \{0\}$, 下列结论正确的是().

A. $A = 0$

B. $A \subseteq \emptyset$

C. $0 \in A$

D. $\emptyset \in A$



解析 本题考查了元素与集合、集合与集合之间的关系, 答案选 C.



技巧点拨 正确理解符号 $\in, \notin, \subseteq, \not\subseteq$ 的意义, 是正确处理此类问题的关键.



变式训练 1

下列说法中, 正确的有().

①空集没有子集; ②任何集合至少有两个子集; ③空集是任何集合的真子集; ④若 $\emptyset \subseteq A$, 则 $A \neq \emptyset$.

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

题型二 由集合之间的关系求未知数的值或范围

例2 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + p = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 p 的取值范围.



解析 由题意得: $A = \{-1, 2\}$, 因为 $B \subseteq A$, 所以 $B = \emptyset$ 或 $B = \{-1\}$ 或 $B = \{2\}$ 或 $B = \{-1, 2\}$.



又因为 $B = \{x | x^2 - 4x + p = 0\}$, 所以 $B = \{-1, 2\}$ 不成立.

当 $B = \emptyset$ 时, $\Delta = (-4)^2 - 4p = 16 - 4p < 0$, 解得 $p > 4$;

当 $B = \{-1\}$ 时, $\begin{cases} \Delta = 16 - 4p = 0, \\ (-1)^2 - 4 \times (-1) + p = 0, \end{cases}$ 无解;

当 $B = \{2\}$ 时, $\Delta = 16 - 4p = 0, 2^2 - 4 \times 2 + p = 0$, 解得 $p = 4$.

综上所述, 实数 p 的取值范围是 $p \in [4, +\infty)$.

技巧点拨 两个集合包含或相等关系的问题, 通过建立方程(组), 然后解出未知数, 最后利用集合元素的特征进行检验即可.



变式训练 2

已知集合 $A = \{1, 1+m, 1+2m\}$, $B = \{1, n, n^2\}$, 其中 $m, n \in \mathbf{R}$, 若 $A = B$, 求 m, n 的值.

题型三 集合的运算

例 3 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 0 \leq x < 2\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 求 $A \cap B, A \cup B, \complement_U A \cap B$.

解析 $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\} = \{x | -1 < x < 3\}$, $\complement_U A = \{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 0 \leq x < 2\}$, $A \cup B = \{x | -1 < x < 3\}$, $\complement_U A \cap B = \{x | -1 < x < 0 \text{ 或 } 2 \leq x < 3\}$.

技巧点拨 考查对集合运算的理解及性质的运用.



变式训练 3

设全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{2, 3, 4\}$, 求 $A \cap B, A \cup B, \complement_U A \cup \complement_U B$.

题型四 由交、并、补确定未知量的范围

例 4 已知集合 $M = \{x | a \leq x \leq a+3\}$, $N = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

解析 如图 1-3 所示, 要使 $M \cap N = \emptyset$, 必须满足 $\begin{cases} a+3 \leq 5, \\ a \geq -1, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq a \leq 2$, 所以实数 a 的取值范围为 $\{a | -1 \leq a \leq 2\}$.



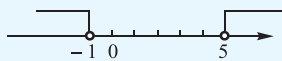


图 1-3

技巧点拨 解题时利用数轴表示集合,便于寻求满足条件的实数 a . 特别需要注意的是“端点值”的问题,判断能取“=”还是不能取“=”.

变式训练 4

已知 $A = \{x | a \leq x \leq a + 3\}$, $B = \{x | x > 1 \text{ 或 } x < -6\}$.

- (1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围;
- (2) 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.

题型五 Venn 图的应用

例 5 U 为全集, 集合 $M \not\subseteq U, N \not\subseteq U$, 且 $N \subseteq M$, 则().

- A. $(\complement_U M) \supseteq (\complement_U N)$ B. $(\complement_U M) \supseteq N$ C. $(\complement_U M) \subseteq (\complement_U N)$ D. $M \supseteq (\complement_U N)$



解析 根据各集合之间的关系作图(见图 1-4), 这样就很容易做出判断, 故选 C.

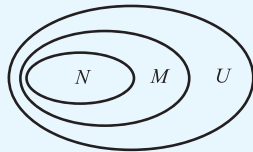


图 1-4



技巧点拨 (1) 考虑集合之间的关系, 用图形解答比较方便.

(2) 在数学中利用“数形结合”的思想, 往往能使问题简单化.

变式训练 5

U 为全集, M, N 为两个非空集合, 且满足 $M \cap N = M$, 则下列正确的是().

- A. $M \subseteq N$ B. $N \subseteq M$ C. $M = N$ D. $M \cap (\complement_U N) = \emptyset$



实战训练

基础巩固

一、选择题

1. 下面四个关系中, 正确的个数为 ().

① $0 \in \mathbf{Q}$; ② $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$; ③ $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$; ④ $\emptyset \subseteq \{0\}$.

- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个
2. 集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 所有子集的个数是 ()
 A. 8 B. 14 C. 15 D. 16
3. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. \emptyset B. $\{3\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
4. 设集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. \emptyset B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$
5. 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{-1, 0\}$, 则 $A \cup B =$ ()
 A. \emptyset B. $\{0\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{0, 1\}$
6. 设集合 $A = \{x \mid -4 < x < 6, x \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. \emptyset B. $\{1, 3, 5\}$ C. $\{4, 5\}$ D. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
7. 设集合 $A = \{-2, 2\}$, $B = \{-1, 2\}$, 则 $A \cup B =$ ()
 A. $\{2\}$ B. $\{-2, -1\}$ C. $\{-2, 2\}$ D. $\{-2, -1, 2\}$
8. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$, 则 $\complement_U B \cap A =$ ()
 A. \emptyset B. $\{1, 4\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

二、填空题

1. 用适当的符号 ($\in, \notin, \subseteq, \supseteq, =$) 填空.

3 _____ $\{2, 3\}$; π _____ \mathbf{Q} ; $\{1, 2, 3\}$ _____ \mathbf{Z} ;
 \mathbf{N}_+ _____ \mathbf{Z} ; $\{-3, 3\}$ _____ $\{x \mid x^2 = 9\}$.

2. 已知集合 $P = \{x \mid 2 < x < a, x \in \mathbf{N}\}$, 且集合 P 中恰有 3 个元素, 则整数 $a =$ _____.

3. 关系式 ① $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$; ② $\{a, b\} = \{b, a\}$; ③ $0 = \emptyset$; ④ $0 \in \{0\}$; ⑤ $\emptyset \in \{0\}$; ⑥ $\emptyset \subseteq \{0\}$ 中正确的是 _____.

4. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{x \mid |x| = y + 1, y \in A\}$, 则 $\complement_U B =$ _____.

5. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, a\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, 则 $A \cup B =$ _____.

三、解答题

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 集合 $B = \{x \mid x = ab, a \in A, b \in A\}$, 判断集合 B 和集合 A 的关系.

2. 写出集合 $\{-3, -1, 1, 3\}$ 的所有子集, 并指出哪些是真子集.

【答案】C 解析:全集 $U = \{1, 2\}$, 集合 $M = \{1\}$, 则 $\complement_U M = \{2\}$. 故选 C.

第三节 逻辑用语



知识清单

知识点一 命题

1. 命题的概念

能够判断_____的语句称为命题.

2. 命题的真值

(1) 当命题给出的判断正确或符合客观实际时, 该命题为_____, 否则称该命题为_____. “真”“假”常被称为命题的真值.

(2) 没有真假意义的语句都不是命题. 如: 感叹句, 疑问句, 祈使句等.

(3) 有的语句尽管现在或将来也未必能判断真假, 但它们所作判断是否符合客观实际这一点是确定的, 也把它们算作命题.

知识点二 量词

常用的量词有_____和_____, 用符号表示为_____和_____. 含有全称量词的命题称为_____; 含有存在量词的命题称为_____.

知识点三 逻辑联结词

1. 逻辑联结词

常用的逻辑联结词有“且”“或”“非”, 符号分别为“ \wedge ”“ \vee ”“ \neg ”.

2. 常见的四种复合命题真值表

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$
真	真				
真	假				
假	真				
假	假				

知识清单答案

知识点一 命题

1. 真假 2. (1) 真命题 假命题

知识点二 量词

全称量词 存在量词 \forall \exists 全称命题 存在性命题

知识点三 逻辑联结词

2.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$
真	真	假	假	真	真
真	假	假	真	假	真
假	真	真	假	假	真
假	假	真	真	假	假



典例剖析

题型一 正确理解命题的定义

例 1 下列语句是命题的是().

- A. 他真高! B. 今天天气怎么样? C. $2+1=3$ D. 两直线平行


解析 感叹句和疑问句不是命题, A, B 错; D 无法判断真假, 不是命题, 故选 C.

技巧点拨 命题是能判断真假的语句, 疑问句、祈使句等不是命题.


变式训练 1

下列语句中哪个不是命题().

- A. 地球绕着太阳转 B. $3+4=7$ C. $2x$ D. 矩形的对角线相等

题型二 量词的应用

 例 2 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x \leq 0$ ”的非命题是().

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x \geq 0$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x \geq 0$
 C. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x > 0$ D. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x > 0$


解析 根据两个量词的关系可知选 C.

技巧点拨 全称命题的“非”是存在性命题, 量词也要替换.


变式训练 2

写出下列命题的非.

(1) $p: \exists x \in \mathbf{R}, x > 0$;

(2) $q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 \neq 0$.

题型三 “且”“或”“非”命题真假的判断

例3 如果 p 是假命题, q 是真命题, 则下列命题是真命题的是().

- A. $\neg q$ B. $\neg(p \vee q)$ C. $\neg p \wedge q$ D. $p \wedge q$

解析 因为 p 是假命题, q 是真命题, 所以 $\neg p$ 是真命题, $\neg q$ 是假命题, 所以 $p \wedge q$ 是假命题, $p \vee q$ 是真命题, $\neg p \wedge q$ 是真命题, $\neg(p \vee q)$ 是假命题. 故选 C.

技巧点拨 $p \wedge q$: 一假即假, 都真才真; $p \vee q$: 一真即真, 都假才假; p 与 $\neg p$: 真假相反.

变式训练 3

设命题 $p: \emptyset = 0; q: 2 \geq 3$, 则().

- A. $p \vee q$ 为真 B. $p \wedge q$ 为真 C. p 为假 D. $\neg p$ 为假

实战训练

基础巩固

一、选择题

- 下列语句中, 是命题的是 ()

A. π 是无限不循环小数 B. $3x \leq 5$

C. 什么是“绩效工资” D. 今天的天气真好呀!
- 下列命题为真命题的是 ()

A. 若 $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, 则 $x = y$ B. 若 $x^2 = 1$, 则 $x = 1$

C. 若 $x = y$, 则 $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ D. 若 $x < y$, 则 $x^2 < y^2$
- 若命题“ $\neg p$ ”与命题“ $p \vee q$ ”都是真命题, 那么 ()

A. 命题 p 与命题 q 的真假相同 B. 命题 p 一定是真命题

C. 命题 q 不一定是真命题 D. 命题 q 一定是真命题
- 如果命题“ $\neg(p \vee q)$ ”为真命题, 则 ()

A. p, q 均为真命题 B. p, q 均为假命题

C. p, q 中至少有一个为真命题 D. p, q 中一个为真命题, 一个为假命题
- 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 > 0$, 则 $\neg p$ 是 ()

A. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2x_0 + 2 < 0$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 < 0$

C. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2x_0 + 2 \leq 0$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 \leq 0$
- 由命题 $p: “8 + 2 > 10”$ 与 $q: “1 > 2”$ 构成的命题, 下列判断正确的是 ()

A. $p \vee q$ 为真, $p \wedge q$ 为假 B. $p \vee q$ 为假, $p \wedge q$ 为假

C. $p \vee q$ 为真, $p \wedge q$ 为假 D. $p \vee q$ 为假, $p \wedge q$ 为真
- 下列命题是真命题的是 ()

A. $\forall x \in \mathbf{R}, (x - \sqrt{2})^2 > 0$ B. $\forall x \in \mathbf{Q}, x^2 > 0$

C. $\exists x_0 \in \mathbf{Z}, 3x_0 = 812$ D. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, 3x_0 - 4 = 2$

8. 已知命题 p : 2 是偶数, 命题 q : $\forall x \in \mathbf{R}, x-1=2$, 则下列命题为真命题的是 ()

- A. $p \wedge q$ B. $p \vee q$
 C. $\neg p$ D. $(\neg p) \wedge (\neg q)$

二、填空题

1. 给出下列命题,

- ①若 $ac=bc$, 则 $a=b$;
 ②方程 $x^2=0$ 无实数根;
 ③对于实数 x , 若 $x-2=0$, 则 $(x-2)(x+1)=0$;
 ④若 $p>0$, 则 $p^2>p$;
 ⑤正方形不是菱形.

其中真命题是_____, 假命题是_____.

2. 已知命题 p : π 是有理数, 命题 q : $x^2 \geq 0$. 给出下列结论:

- (1) 命题 $p \wedge q$ 是真命题;
 (2) 命题 $p \wedge (\neg q)$ 是假命题;
 (3) 命题 $(\neg p) \vee q$ 是真命题;
 (4) 命题 $(\neg p) \vee (\neg q)$ 是假命题, 其中正确的是_____.

三、解答题

分别指出由下列各组命题构成的“ $p \wedge q$ ”“ $p \vee q$ ”“ $\neg p$ ”形式的命题的真假:

- (1) p : $6 < 6$, q : $6 = 6$;
 (2) p : 梯形的对角线相等, q : 梯形的对角线互相平分.

能力提升

1. “红豆生南国, 春来发几枝? 愿君多采撷, 此物最相思.”这是唐代诗人王维的《相思》, 在这几句诗中, 可作为命题的是 ()
 A. 红豆生南国 B. 春来发几枝 C. 愿君多采撷 D. 此物最相思
2. 已知命题 p : $\forall x \in \mathbf{R}, x-2 > 0$, 命题 q : $\exists x_0 \in \mathbf{N}, x_0-2 > 0$, 则 ()
 A. p 假 q 真 B. p 真 q 假 C. p 假 q 假 D. p 真 q 真



真题链接

1. (2021 山东春考) 已知命题 p : 甲、乙、丙三名同学都是共青团员, 则 $\neg p$: ()
 A. 甲、乙、丙三名同学都不是共青团员
 B. 甲、乙、丙三名同学中至少有一名不是共青团员
 C. 甲、乙、丙三名同学中至少有两名不是共青团员
 D. 甲、乙、丙三名同学中至多有一名不是共青团员
【答案】B 解析: $\neg p$: 甲、乙、丙三名同学不都是共青团员, 即至少有一名不是共青团员.
2. (2020 山东春考) 下列命题为真命题的是 ()
 A. $1 > 0$ 且 $3 > 4$ B. $1 > 2$ 或 $4 > 5$
 C. $\exists x \in \mathbf{R}, \cos x > 1$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \geq 0$

【答案】D 解析:A 中 $3 < 4$, 故为假命题; B 中 $1 < 2, 4 < 5$, 故为假命题; C 中 $\cos x \leq 1$, 故为假命题, 故选 D.

3. (2019 山东春考) 设集合 $M = \{-2, 0, 2, 4\}$, 则下列命题为真命题的是 ()

- A. $\forall a \in M, a$ 是正数
B. $\forall b \in M, b$ 是自然数
C. $\exists c \in M, c$ 是奇数
D. $\exists d \in M, d$ 是有理数

【答案】D 解析: -2 不是正数, 故 A 错. -2 不是自然数, 故 B 错. M 中都是偶数, 故 C 错. 故选 D.

4. (2018 山东春考) 设命题 $p: 5 \geq 3$, 命题 $q: \{1\} \subseteq \{0, 1, 2\}$, 则下列命题中为真命题的是 ()

- A. $p \wedge q$
B. $\neg p \wedge q$
C. $p \wedge \neg q$
D. $\neg p \wedge \neg q$

【答案】A 解析: 因为命题 $p: 5 \geq 3$ 为真, 命题 $q: \{1\} \subseteq \{0, 1, 2\}$ 为真, 所以 $p \wedge q$ 为真, $\neg p \wedge q, p \wedge \neg q, \neg p \wedge \neg q$ 为假, 故选 A.

第四节 充要条件

知识清单

知识点一 充分、必要、充要条件的概念

1. 推出

“如果 p , 那么 q ”是真命题, 则称 p 推出 q , 记作“_____”.

2. 充分条件、必要条件

对于两个命题 p, q , 如果有 $p \Rightarrow q$, 则称 p 是 q 的_____, q 是 p 的_____.

注意: p 是 q 的充分条件是指只要具备了条件 p , 那么 q 就一定成立, 即命题中的条件是充分的; q 是 p 的必要条件是指如果不具备条件 q , 则 p 就不能成立, 即 q 是 p 成立的必不可少的条件.

3. 充要条件

如果 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的_____, 记作_____, 读作“ p 与 q 等价”或“ p 与 q 互为充要条件”.

知识点二 充分、必要、充要条件的判断方法

1. 从逻辑推理关系上判断(定义法)

- (1) 若 $p \Rightarrow q$ 但 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充分不必要条件.
- (2) 若 $p \not\Rightarrow q$ 但 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的必要不充分条件.
- (3) 若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充要条件.
- (4) 若 $p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

2. 从命题所对应的集合与集合之间的关系上判断(集合法)

设命题 p 对应的集合为 A , 命题 q 对应的集合为 B .

- (1) 若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的充分不必要条件.
- (2) 若 $A \supseteq B$, 则 p 是 q 的必要不充分条件.
- (3) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$, 即 $A = B$, 则 p 是 q 的充要条件.

(4)若 $A \not\subseteq B$ 且 $A \not\supseteq B$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

知识清单答案

知识点一 充分、必要、充要条件的概念

1. $p \Rightarrow q$ 2. 充分条件 必要条件 3. 充要条件 $p \Leftrightarrow q$



典例剖析

题型一 充要条件的判断

例 1 已知 $p: |3x-5| < 4, q: (x-1)(x-2) < 0$, 则 p 是 q 的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件



解析

$p: |3x-5| < 4 \Rightarrow p: \frac{1}{3} < x < 3, q: (x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow q: 1 < x < 2$. 所以 $p \Rightarrow q$ 但 $q \Rightarrow p$, 所以 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.



技巧点拨

判断充分必要条件时, 先要分清条件和结论, 进而找到条件与结论之间的逻辑推理关系.



变式训练 1

设命题甲为 $0 < x < 5$, 命题乙为 $|x-2| < 3$, 那么甲是乙的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

题型二 应用充要条件求未知数

例 2 已知集合 $A = \left\{ y \mid y = x^2 - \frac{3}{2}x + 1, x \in \left[\frac{3}{4}, 2 \right] \right\}, B = \{ x \mid x + m^2 \geq 1 \}, p: x \in A, q: x \in B$, 并且 p 是 q 的充分条件, 求实数 m 的取值范围.



解析

由题意得 $A = \left[\frac{7}{16}, 2 \right], B = [1 - m^2, +\infty)$, 由于 p 是 q 的充分条件, 所以 $A \subseteq B$, 所以 $1 - m^2 \leq \frac{7}{16}$, 解得 $m \geq \frac{3}{4}$ 或 $m \leq -\frac{3}{4}$, 即实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, +\infty)$.



技巧点拨

本题主要考查集合的运算以及充要条件的判断, 解题的关键是不等式之间的关系.



变式训练 2

已知 $p: x^2 - 2x - 3 < 0, q: -a < x - 1 < a$. 若 q 是 p 的一个必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围.



实战训练

基础巩固

一、选择题

- “ $x < -2$ ”是“ $x^2 - 4 > 0$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- “ $A \cap B = A$ ”是“ $A \subseteq B$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- 设甲是乙的充分不必要条件,乙是丙的充要条件,丁是丙的必要不充分条件,则甲是丁的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- “ $|x| \geq 1$ ”是“ $x \geq 1$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- “ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ”是“ $\tan \alpha = 1$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- “ $x < 2$ ”是“ $x^2 - x - 2 < 0$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- “ $x > 0$ ”是“ $x > 1$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则“ $a > b$ ”是“ $ac^2 > bc^2$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件

二、解答题

- 判断下列问题中, p 是 q 的什么条件?
 (1) $p: x^2 \geq y^2, q: x \geq y$.
 (2) $p: x \in A \cup B, q: x \in A \cap B$.
 (3) $p: x > 3, q: x > 2$.
 (4) $p: a$ 是有理数, $q: a + 2$ 是有理数.

2. 求一个对于一切实数 x 都有 $ax^2 - ax + 1 > 0$ 成立的充要条件.

能力提升

已知 $p: -2 \leq x \leq 10, q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$, 若 p 是 q 的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.



真题链接

1. (2021 山东春考)“角 α 是第一象限角”是“ $\sin \alpha > 0$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】A **解析:**若角 α 是第一象限角, 则 $\sin \alpha > 0$, 即“角 α 是第一象限角”是“ $\sin \alpha > 0$ ”的充分条件; 反之, 若 $\sin \alpha > 0$, 则角 α 可能为第一象限角或第二象限角, 即“角 α 是第一象限角”是“ $\sin \alpha > 0$ ”的不必要条件, 综上选 A.

2. (2020 山东春考)已知 $a \in \mathbf{R}$, 若集合 $M = \{1, a\}, N = \{-1, 0, 1\}$, 则“ $a = 0$ ”是“ $M \subseteq N$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】A **解析:**当 $a = 0$ 时, $M = \{1, 0\}, M \subseteq N$; 若 $M \subseteq N$, 则 $M = \{1, 0\}$ 或 $\{1, -1\}$, 即 $a = 0$ 或 -1 , 故是充分不必要条件. 故选 A.

3. (2019 山东春考)对于任意角 α, β , “ $\alpha = \beta$ ”是“ $\sin \alpha = \sin \beta$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】A **解析:**若“ $\alpha = \beta$ ”, 则“ $\sin \alpha = \sin \beta$ ”; 而若“ $\sin \alpha = \sin \beta$ ”不一定得“ $\alpha = \beta$ ”, 故为充分不必要条件. 故选 A.

4. (2018 山东春考)已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a > b$ ”是“ $2^a > 2^b$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

【答案】C **解析:**因为 $y = 2^x$ 为单调递增函数, 所以 $a > b \Leftrightarrow 2^a > 2^b$, 因此“ $a > b$ ”是“ $2^a > 2^b$ ”的充要条件, 选 C.

