第三章 函数

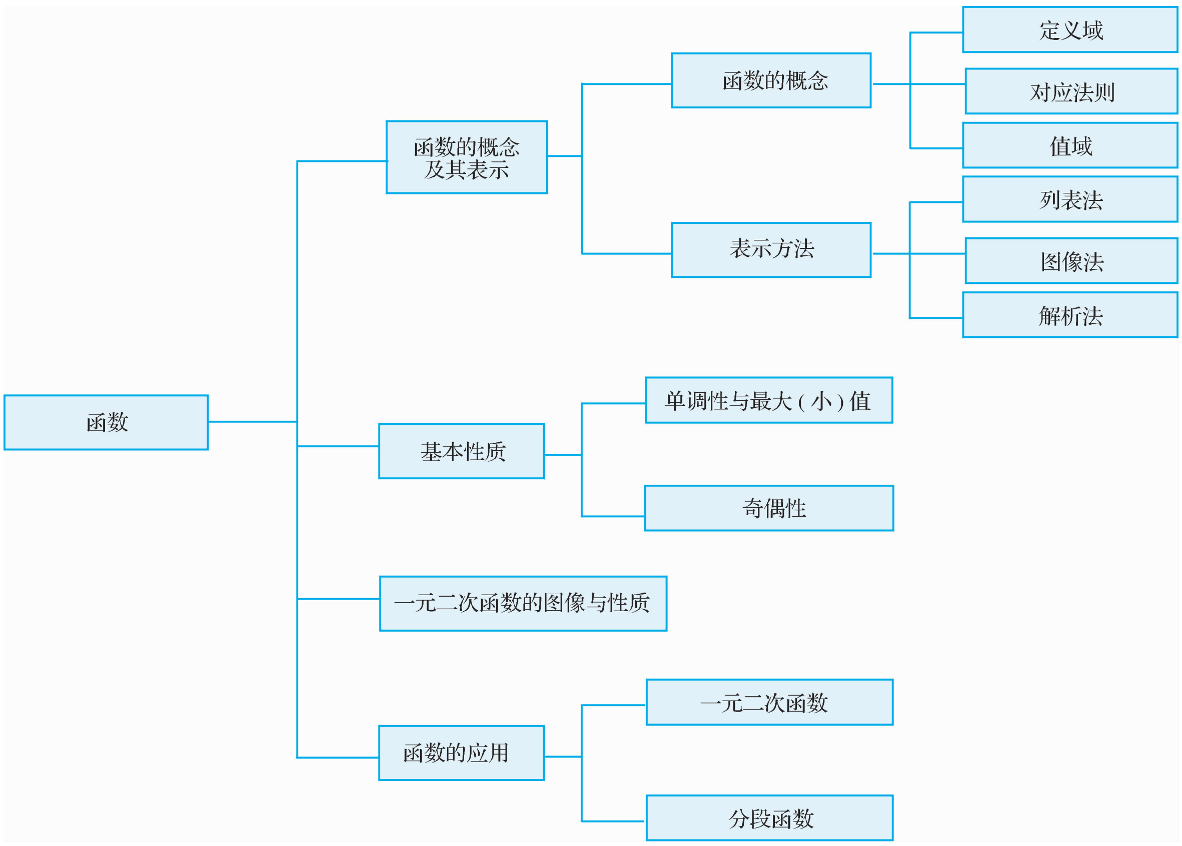
考纲要求

1. 理解函数,自变量,定义域,函数值,值域,解析法,单调性,增函数,减函数,单调区间,增区间,减区间,对称轴,对称中心,奇偶性,奇函数,偶函数,非奇非偶函数,分段函数的概念.
2. 掌握函数的数形结合.
3. 掌握函数定义域的求解及其区间表示.
4. 了解函数概念中两个要素的运用.
5. 了解平面内任意点的对称点的坐标特征.
6. 掌握函数的单调性与奇偶性的判断.
7. 掌握分段函数的函数值的确定.
8. 了解函数的实际应用举例.

考情分析

	考点	近几年常考题型及分值				
		2016	2017	2018	2019	2020
命题规律	函数的定义域及两要素	填空题,6 分	填空题,6 分	选择题,5 分 填空题,6 分	选择题,5 分	
	函数的单调性和奇偶性	选择题,5 分	选择题,5 分	选择题,5 分	选择题,5 分 填空题,6 分	选择题,5 分
	函数的实际应用和分段函数		填空题,6 分		填空题,5 分	
命题趋势	本章内容多以选择题和填空题形式出现,其考查的知识点主要集中在: 1. 函数的两要素,求简单函数的定义域、函数值. 2. 单调函数、奇偶函数的概念和图像特点,会判断简单函数的奇偶性、单调性,并应用单调性、奇偶性求值,比较函数值的大小. 3. 通过实际应用问题,建立函数关系式,多涉及分段函数和二次函数.					

知识结构



第一节 函数的概念及其表示

知识梳理

1. 函数的定义

如果在某一个变化过程中有两个变量 x，y，设变量 x 的取值范围为数集 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照某个对应法则 f，都有唯一确定的值和它对应，那么 x 叫做自变量，y 就是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，数集 D 叫做函数的定义域，$x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 对应的值 y_0 叫做函数在点 x_0 处的函数值，记作 $y_0=f(x_0)$，函数值的集合 $\{y|y=f(x)\}$ 叫做函数的值域(我们称用变量叙述的定义为函数的传统定义).

函数就是定义在非空数集 A，B 上的映射，此时称数集 A 为定义域，数集 $B=\{f(x)|x\in A\}$ 为值域. 定义域、对应法则构成了函数的两要素.

定义域、对应法确定了,值域就确定了.

2. 函数定义域

(1)如无特别说明,函数定义域是指函数的解析式有意义的自变量的取值范围.

(2)函数定义域的求法.已知函数解析式,求定义域:

①分式形式的函数,分母不等于0;偶次根式被开方式非负;x^0 中的底数 x 不等于0.

②分段函数的定义域是各段中 x 取值的并集;若 $f(x)$是由多个部分的式子构成的,那么函数定义域是使各部分有意义的集合的交集.

③若 $f(x)$的定义域为$[a,b]$,则其复合函数 $f[g(x)]$的定义域由 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 解出.

3. 函数值域

函数的值域取决于定义域和对应法则,不论采用什么方法求函数的值域均应考虑其定义域.

常见函数的值域:

(1)一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$的值域为 $\mathbf{R}$.

(2)二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$,当 $a>0$ 时的值域为$\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$;当 $a<0$ 时的值域为$\left(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$.

(3)反比例函数 $y=kx(k\neq0)$的值域为$\{y\in\mathbf{R}\mid y\neq0\}$.

4. 函数的表示方法

(1)列表法:通过列出自变量与对应的函数值的表格来表示函数关系的方法叫做列表法.

(2)图像法:如果图形 F 是函数 $y=f(x)$的图像,则图像上的任意点的坐标都满足函数的关系式,反之满足函数关系式的点都在图像上.这种由图像表示函数的方法叫做图像法.

(3)解析法:如果在函数 $y=f(x)(x\in A)$中,$f(x)$是用代数式来表达的,这种用等式表示函数的方法叫做解析法.

典例解析

例1　与 $y=x$ 表示相同函数的是(　　).

A. $y=\sqrt{x^2}$　　B. $y=\frac{x^2}{x}$

C. $y=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\ -x, & x<0\end{cases}$　　D. $y=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\ x, & x<0\end{cases}$

解析　因为 $y=\sqrt{x^2}=|x|$与 $y=x$ 对应法则不同,排除A;$y=\frac{x^2}{x}=x\ (x\neq0)$与 $y=x$ 的定义域不同,排除B;$y=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 的实质是 $y=|x|$,与 $y=x$ 的对应法则、值域不同,排除C;$y=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\ x, & x<0\end{cases}$ 与 $y=x$ 的定义域、对应法则、值域均相同,故选D.

技巧点拨　判断两个函数是否相同,要看函数的三要素:定义域、值域、对应法则是否均相同.其中对应法则不能仅仅从解析式上考虑,要分析其对应法则的本质.

变式训练 1

下列各组函数中,表示同一函数的是(　　).

A. $f(x)=1$ 与 $g(x)=x^0$

B. $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

C. $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

D. $f(x)=\sqrt{x-1}\times\sqrt{x+1}$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2-1}$

例 2　求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x+1}-\dfrac{x}{3-x}$;

(2) $y=\sqrt{-3+2x+x^2}$;

(3) $y=\log_2(x^2-5x+4)$;

(4) $y=\dfrac{1}{1-\sin x}$.

解析　(1) $\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ 3-x\neq 0,\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant -1,\\ x\neq 3.\end{cases}$

故定义域为 $[-1,3)\cup(3,+\infty)$.

(2) $-3+2x+x^2\geqslant 0$,

$\Rightarrow(x+3)(x-1)\geqslant 0$,

$\Rightarrow x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -3$.

故定义域为 $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

(3) $x^2-5x+4>0$,

$\Rightarrow(x-4)(x-1)>0$,

$\Rightarrow x>4$ 或 $x<1$.

故定义域为 $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$.

(4) $1-\sin x\neq 0$,

$\Rightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

故定义域为 $\left\{x\,|\,x\neq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

技巧点拨　求函数的定义域时,应注意以下几个方面:

(1)函数式是整式时,定义域为 $\mathbf{R}$.

(2)函数式含分式时,分母不等于零.

(3)函数式含偶次根式时,被开方数大于等于零.

(4)函数式含对数式时,真数大于零,底数大于零且不等于 1.

(5)函数式含零指数式时,底数不等于零,如 $y=(x-1)^0$,则 $x-1\neq 0$,即 $x\neq 1$.

(6)函数式含正切型函数时,如 $y=\tan x$,则 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

(7)实际应用题中函数的定义域还要受实际条件的限制.

变式训练 2

求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x^2}$；

(2) $y=\lg(2x-3)+\dfrac{1}{\sqrt{6+5x-x^2}}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x^2-2x+1}+(x-2)^0$.

例 3　求下列函数的值域.

(1) $y=x^2-4x+3(2\leqslant x\leqslant 3)$；　　(2) $y=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

解析　(1)因为函数在$[2,3]$上单调递增,所以 $x=2$ 时,$y_{\min}=-1$,$x=3$ 时,$y_{\max}=0$.所以函数的值域为$[-1,0]$.

(2)因为 $e^x=\dfrac{1-y}{1+y}$,所以$\dfrac{1-y}{1+y}>0$,解之得$-1<y<1$,所以函数的值域为$(-1,1)$.

技巧点拨　求函数的值域,应根据解析式的结构特点选择适当的方法,常见的有以下几种:

(1)直接观察法:对于一些比较简单的函数,根据对函数的定义域、性质的观察,结合函数的解析式,求得函数的值域.

(2)反函数法:直接求函数的值域困难时,可以通过求其反函数的定义域来确定原函数的值域.

(3)配方法:配方法是求二次函数值域最基本的方法之一,即把函数通过配方转化为能直接看出其值域的方法.

(4)换元法:通过简单的换元把一个函数变为简单函数,然后通过求函数的值域,间接地求解原函数的值域.

(5)不等式法:利用几个重要不等式及其推论(如 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$,$a^2+b^2\geqslant 2ab$)来求得最值,进而求得值域.

变式训练 3

求下列函数的值域.

(1) $y=4-x^2$；

(2) $y=\sqrt{-x^2-6x-5}$；

(3) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$；

(4) $y=\dfrac{3x+4}{x+2}$.

例 4　设 $f(x)=2x-\sqrt{x^2+4x+4}$，求 $f(2)$，$f(-3)$，$f(a)$.

解析　$f(2)=2\times2-\sqrt{2^2+4\times2+4}=4-\sqrt{16}=0$；

$f(-3)=2\times(-3)-\sqrt{(-3)^2+4\times(-3)+4}=-6-1=-7$；

$f(a)=2\times a-\sqrt{a^2+4a+4}=2a-|a+2|$.

技巧点拨　此题 $y=f(x)$ 表达式满足直接代入求值的条件，将 x 分别替换为 $2,-3,a$，即可求出相应值.

变式训练 4

设 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1, & x\leqslant-1\\ x-1, & x>-1\end{cases}$，求 $f(-3)$，$f(-1)$，$f(5)$.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 与函数 $y=x$ 是同一个函数的是(　　).

A. $y=(\sqrt{x})^2$　　B. $y=\sqrt{x^2}$

C. $y=\sqrt[3]{x^3}$　　D. $y=\frac{|x^2|}{x}$

2. 函数 $f(x)=\sqrt{x-1}+\frac{1}{2-x}$ 的定义域是(　　).

A. $[1,2)\cup(2,+\infty)$　　B. $[-1,+\infty)$

C. $(1,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

3. 下列各点在函数 $f(x)=2x^2+x-3$ 的图像上的是(　　).

A. $(1,1)$　　B. $(-1,-2)$

C. $(-1,-6)$　　D. $(-1,0)$

4. 已知 $f(x+1)=2x+3$，则 $f(3)=$(　　).

A. 7　　B. 9

C. 5　　D. 8

5. 若函数 $f(x+1)$ 的定义域是 $[-1,1]$，则函数 $f(x)$ 的定义域是(　　).

A. $[0,2]$　　B. $[-1,1]$

C. $[-2,0]$　　D. $[-2,2]$

6. 函数 $y=\sqrt{4-2^x}$ 的定义域是(　　).

A. $[2,+\infty)$　　B. $(-\infty,2]$

C. $[0,2]$　　D. $(-\infty,+\infty)$

7. 下列选项中表示同一函数的是(　　).

A. $y=\frac{x^2}{x}$ 与 $y=x$　　B. $y=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$ 与 $y=\sqrt{x^2-1}$

C. $y=x$ 与 $s=t$　　D. $y=\frac{x^2-1}{x+1}$ 与 $y=x-1$

8. 若 $f(x)=\frac{x+1}{2x-3}$，则 $f[f(x)]=$(　　).

A. $\frac{x-3}{11+4x}$　　B. $\frac{3x+2}{11-4x}$

C. $\frac{3x-2}{11-4x}$　　D. $\frac{3x-2}{11+4x}$

9. 某函数的图像经过点 $(-1,-1)$ 和点 $(1,1)$，则它的解析式不可能是(　　).

A. $y=x$　　B. $y=\frac{1}{x}$

C. $y=\sqrt{x}$　　D. $y=x^3$

10. 函数 $y=x^2-2x+3(-3\leqslant x\leqslant 2)$ 的值域是(　　).

A. $[3,18]$　　B. $[2,18]$

C. $[2,3]$　　D. $[2,6]$

二、填空题

1. 若 $f(2x)=\dfrac{2-x}{x+2}$,则 $f(2)=$__________.

2. 若 $f\left(\dfrac{1}{x}+1\right)=3\cdot 2^x+\dfrac{1}{2}x$,则 $f(0)=$__________.

3. 已知函数 $f(x)=(x-1)^2+2$,则 $f[f(2)]=$__________.

4. 已知函数 $f(x)=a^x+\left(\dfrac{1}{2}\right)^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$,且 $f(1)=\dfrac{5}{2}$,则 $a=$__________.

三、解答题

1. 已知 $f(x)$是一次函数且过点$(4,8)$与原点,求 $f(x)$的解析式.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\leqslant -2, \\ x^3+1, & -2<x<4, \\ 3x, & x\geqslant 4. \end{cases}$

(1)求 $f(x)$的定义域;

(2)若 $f(x)=3$,求 x 的值.

3. 已知函数 $f(x+1)=x^2-1$,求 $f(2)$,$f(a)$,$f(a+2)$的值.

能力提升

1. 已知函数 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$ 的解析式.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\leqslant -1, \\ 2x, & -1<x<2, \\ \frac{x^2}{2}, & x\geqslant 2. \end{cases}$

(1)求 $f\left\{f\left[f\left(-\frac{7}{4}\right)\right]\right\}$；

(2)若 $f(a)=3$，求 a 的值；

(3)画出函数 $f(x)$ 的图像.

3. 若函数 $f(x)=x^2-3x-4$ 的定义域为 $[0,m]$，值域为 $\left[-\frac{25}{4},-4\right]$，求 m 的取值范围.

第二节 函数的性质

知识梳理

知识点一 函数的单调性

1. 函数单调性的概念

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有意义，如果对任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么函数 $f(x)$ 叫做区间 (a,b) 内的增函数，区间 (a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的增区间. 当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么函数 $f(x)$ 叫做区间 (a,b) 内的减函数，区间 (a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的减区间. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是增函数或减函数，就说 $f(x)$ 在此区间上具有单调性，这个区间 (a,b) 叫做单调区间.

2. 单调函数的图像

增函数的图像从左往右呈上升趋势，减函数的图像从左往右呈下降趋势.

3. 函数单调性的判定

(1)在指定区间内任取两个自变量的值 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$.

(2)作差 $f(x_1)-f(x_2)$，通过因式分解、配方或有理化等手段对差进行变形.

(3)判断 $f(x_1)-f(x_2)$ 的符号，由定义得出单调性.

知识点二 函数的奇偶性

1. 轴对称和中心对称的图形

一般地，设点 $P(a,b)$ 为平面上任意一点，则点 $P(a,b)$ 关于 x 轴的对称点的坐标为 $(a,-b)$，点 $P(a,b)$ 关于 y 轴的对称点的坐标为 $(-a,b)$，点 $P(a,b)$ 关于原点的对称点的坐标为 $(-a,-b)$.

结论： 关于谁，谁不变；关于原点都改变.

对于函数图像，我们有如下的结论：

(1)如果函数图像上任意一点 P 关于原点的对称点 P' 也在函数的图像上，那么，函数图像关于原点对称，原点 O 称为这个函数图像的对称中心.

(2)如果函数图像上任意一点 P 关于 y 轴的对称点 P' 也在函数的图像上，那么，函数图像关于 y 轴对称，y 轴称为这个函数图像的对称轴.

2. 函数奇偶性的定义

(1)奇函数：设函数的定义域为数集 D，如果对于任意的 $x\in D$，都有 $-x\in D$，且 $f(-x)=-f(x)$，则这个函数是奇函数.

(2)偶函数：设函数的定义域为数集 D，如果对于任意的 $x\in D$，都有 $-x\in D$，且 $f(-x)=f(x)$，则这个函数是偶函数.

(3)如果 $f(x)$是奇函数或偶函数,我们就说 $f(x)$具有奇偶性.

3. 奇函数和偶函数的性质

(1)$y=f(x)$是奇函数,则 $f(x)$的图像关于原点对称;$y=f(x)$是偶函数,则 $f(x)$的图像关于 y 轴对称.

(2)若 $f(x)$是奇函数且在 $x=0$ 处有定义,则 $f(0)=0$.

(3)奇函数在其对称的单调区间上具有相同的单调性,偶函数在其对称的单调区间上具有相反的单调性.

4. 奇偶函数的判定

(1)检查函数的定义域是否关于原点对称.若定义域不关于原点对称,则一定是非奇非偶函数;若定义域关于原点对称,再考察函数值的关系.

(2)判断函数奇偶性的方法.

①定义法:若 $f(-x)=-f(x)$或 $f(-x)+f(x)=0$,则 $f(x)$为奇函数;若 $f(-x)=f(x)$或 $f(-x)-f(x)=0$,则 $f(x)$为偶函数.

②图像法:若函数 $f(x)$的图像关于原点对称,则 $f(x)$为奇函数;若函数 $f(x)$的图像关于 y 轴对称,则 $f(x)$为偶函数.

5. 待定系数法

(1)定义.一般地,在求一个函数时,如果知道这个函数的一般形式,可先把所求函数写成一般的形式,其中系数待定,然后根据题设条件求出这些待定系数,这种通过求待定系数来确定变量之间的关系式的方法称为待定系数法.

(2)一般过程.首先确定所求问题含待定系数的函数解析式;其次根据恒等条件,列出一组含待定系数的方程(组);最后解方程(组)或消去待定系数.

6. 常见的三种函数的奇偶性

(1)正比例函数 $y=kx(k\neq0)$在定义域 $\mathbf{R}$ 上是奇函数.

(2)当 $b=0$ 时,二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$是偶函数.

(3)反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$在定义域$\{x|x\neq0\}$上是奇函数.

典例解析

例 1　判断下列函数的单调性.

(1)函数 $y=2x-3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是____________函数.

(2)函数 $y=x^2-2x+3$ 的单调递增区间是____________,单调递减区间是____________.

(3)函数 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上是____________函数.

解析　对于这些初等函数,如一次函数、二次函数、反比例函数、对数函数和指数函数(实际上还包括三角函数),可画出所给函数的图像进行判断.

(1)增;(2)$[1,+\infty)$,$(-\infty,1]$;(3)减.

技巧点拨　熟记常见函数的单调性对解题有很大的好处,上述各函数的图像如图 3-1 所示.

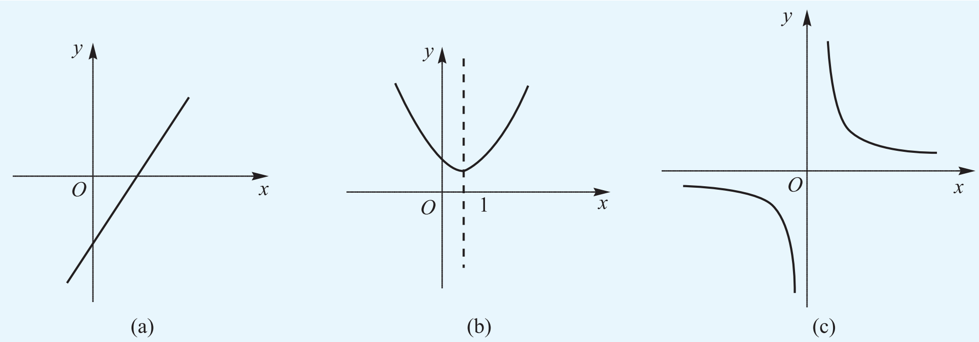


图 3-1

变式训练 1

(1)函数 $y=(x+1)^2-2$ 在$(0,+\infty)$上是______函数.

(2)函数 $y=2-x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是______函数.

例 2　讨论函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$在$(1,+\infty)$上的单调性.

解析　在$(1,+\infty)$上任取两数 x_1,x_2,且 $1<x_1<x_2$.

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{(x_1x_2-1)(x_1-x_2)}{x_1x_2}$,

因为 $x_1x_2-1>0,x_1-x_2<0,x_1x_2>0$,所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.

故函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$在$(1,+\infty)$上是增函数.

技巧点拨　函数单调性的证明或者判断的步骤是:取值—作差—断号—做结论.

变式训练 2

利用函数单调性的定义,证明函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$在区间$(0,1]$上是减函数.

例 3 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x(x+1)$； (2) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$； (3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}$.

解析 (1) 因为 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，关于坐标原点对称，

又因为 $f(-x)=-x(-x+1)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，

所以函数 $f(x)=x(x+1)$ 是非奇非偶函数.

(2) 因为 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，关于坐标原点对称，

又因为 $f(-x)=\dfrac{2(-x)}{(-x)^2+1}=-\dfrac{2x}{x^2+1}=-f(x)$，

所以函数 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 是奇函数.

(3) 由 $\begin{cases}1-x^2\geqslant 0\\ x\neq 0\end{cases}$，得 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$，

所以函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,0)\cup(0,1]$，关于坐标原点对称.

又因为 $f(-x)=\dfrac{\sqrt{1-(-x)^2}}{|-x|}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}=f(x)$，

所以函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}$ 是偶函数.

技巧点拨 判断一个函数是否具有奇偶性的基本步骤如下：

(1) 先求出函数的定义域 D，如果对于任意的 $x\in D$ 都有 $-x\in D$（关于坐标原点对称），则可以根据函数奇偶性的定义判断函数的奇偶性；如果存在某个 $x_0\in D$，但是 $-x_0\notin D$，即函数的定义域不关于坐标原点对称，则函数一定是非奇非偶函数.

(2) 判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系，若 $f(-x)=f(x)$，则函数为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则函数为奇函数.

当然，对于用图像法表示的函数，可以通过对函数图像对称性的观察来判断函数是否具有奇偶性.

变式训练 3

函数 $f(x)=3x^2+5$ 是________函数（填“奇”“偶”或“非奇非偶”）.

例 4 已知 $y=f(x)$ 是奇函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2x-x^2$，求当 $x<0$ 时，$f(x)$ 的解析式.

解析 当 $x<0$ 时，$-x>0$.

因为当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2x-x^2$，

所以 $f(-x)=2(-x)-(-x)^2=-2x-x^2$.

又因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$.

故 $f(x)=-f(-x)=-(-2x-x^2)=2x+x^2$.

技巧点拨 本题中 $f(x)$ 为奇函数,且 $f(0)$ 有意义,$f(0)=0$,即图像过原点.利用奇函数的性质即可作答.

变式训练 4

已知奇函数 $f(x)$,当 $x\in(-\infty,0)$时,$f(x)=-2x+3$,则 $f(1)$与 $f(2)$的大小关系为(　　).

A. $f(1)<f(2)$　　B. $f(1)=f(2)$

C. $f(1)>f(2)$　　D. 不能确定

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 下列函数中是奇函数的是(　　).

A. $y=x^2$　　B. $y=2x+1$

C. $y=x^3-x$　　D. $y=x-3$

2. 已知 $f(x)=x^2+mx+1$ 是偶函数,则 $f(2)=$(　　).

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 8

3. 关于 x 的函数 $y=(k^2-1)x-3$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数,则 k 的取值范围是(　　).

A. $-1<k<1$　　B. $-1<k\leqslant1$

C. $-1\leqslant k<1$　　D. $k<-1$ 或 $k>1$

4. 函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且 $f(1)=1$.若对任意 $x\in\mathbf{R}$,$f(x)=f(5-x)$恒成立,则 $f(9)=$(　　).

A. -4　　B. -1

C. 0　　D. 1

5. 已知 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是偶函数,且 $f(x)$在$[0,+\infty)$上是增函数,则 $f(2)$,$f(-\pi)$,$f(-4)$的大小顺序是(　　).

A. $f(-4)>f(-\pi)>f(2)$　　B. $f(-4)<f(-\pi)<f(2)$

C. $f(-4)>f(2)>f(-\pi)$　　D. $f(-4)<f(2)<f(-\pi)$

6. 函数 $f(x)=x^3$ 的图像(　　).

A. 关于原点对称　　B. 关于 x 轴对称

C. 关于 y 轴对称　　D. 无对称性

7. 下列函数中,在$(0,+\infty)$上是增函数的是(　　).

A. $y=x+1$　　B. $y=-x^2$

C. $y=-x$　　D. $y=\sin x$

8. 下列函数中是奇函数的是(　　).

A. $y=\sin|x|$　　B. $y=\sin(x+1)$

C. $y=\sin 2x\cos x$　　D. $y=\cos x$

9. 已知 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(1)=3$，$f(-2)=-5$，则 $f(-1)+f(2)=$(　　).

A. -2　　B. -1

C. 1　　D. 2

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+2)=f(x)$，当 $0<x<1$ 时，$f(x)=x+1$，则 $f(-1)+f(0)+f\left(\frac{9}{2}\right)=$(　　).

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}$

二、填空题

1. 函数 $y=12x-1$ 的定义域用区间表示为____________.

2. 函数 $y=\frac{1}{x}$ 的值域用区间表示为____________.

3. 若二次函数 $f(x)$ 是偶函数，且满足 $f(-1)=-1$，$f(0)=0$，则 $f(x)$ 的表达式是____________.

4. $y=-x^2+x-1$ 的单调递增区间为____________，单调递减区间为____________.

三、解答题

1. 用定义证明函数 $f(x)=x^2+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

2. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\sqrt{x^3+x}$；

(2) $f(x)=|2x+1|-|2x-1|$；

(3) $f(x)=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{2-x^2}$；

(4) $f(x)=ax^2+(a-1)x+a$.

3. 已知定义在$(0,+\infty)$上的函数 $f(x)$是增函数，且满足 $f(a^2-a)>f(a+15)$，求 a 的取值范围.

能力提升

1. 设 $f(x)+2f(-x)=3x^2-6$.

(1)求函数 $f(x)$的表达式；

(2)判断函数 $f(x)$的奇偶性，并说明理由.

2. 已知函数 $f(x)$是偶函数且在$(0,+\infty)$上是减函数,判断 $f(x)$在$(-\infty,0)$上的单调性.

第三节 函数的实际应用

知识梳理

1. 分段函数

一个函数在自变量的不同取值范围内,需要用不同的解析式来表示,我们把这种函数叫做分段函数.

求函数值 $f(x_0)$时,首先应该判断 x_0 所属的取值范围,然后再把 x_0 代入相应的式子中进行计算.

作分段函数的图像时,要在同一个坐标系中,分别在自变量的各个不同取值范围内,根据相应的式子作出相应部分的图像.

2. 几种常见的函数模型

(1)一次函数模型:$f(x)=kx+b$(k,b 为常数,$k\neq0$).

(2)二次函数模型:$f(x)=ax^2+b+c$(a,b,c 为常数,$a\neq0$).

(3)幂型函数模型:$f(x)=ax^n+b$(a,b,n 为常数,$a\neq0,n\neq1$).

(4)“对勾”函数模型:$f(x)=x+\dfrac{a}{x}(a>0)$.

典例解析

例 1 已知分段函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant-1\\ x+2, & -1<x<2\\ 2x, & x\geqslant2\end{cases}$,求函数 $f(x)$的定义域,计算 $f(3)-f(-2)+f(1)$的值,并作出函数 $f(x)$的图像.

解析 分段函数的定义域是自变量的各不同取值范围的并集.求分段函数的函数值 $f(x_0)$ 时,应该首先判断 x_0 所属的取值范围,再把 x_0 代入相应的解析式中进行计算.

函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup(-1,2)\cup[2,+\infty)=(-\infty,+\infty)$.

因为 $3\in[2,+\infty)$,所以 $f(3)=2\times3=6$.

因为 $-2\in(-\infty,-1]$,所以 $f(-2)=(-2)^2=4$.

因为 $1\in(-1,2)$,所以 $f(1)=1+2=3$.所以 $f(3)-f(-2)+f(1)=6-4+3=5$.

作出 $f(x)=x^2$ 的图像,取 $x\leqslant-1$ 的部分.

作出 $f(x)=x+2$ 的图像,取 $-1<x<2$ 的部分.

作出 $f(x)=2x$ 的图像,取 $x\geqslant2$ 的部分.由此得到函数 $f(x)$ 的图像(图 3-3).

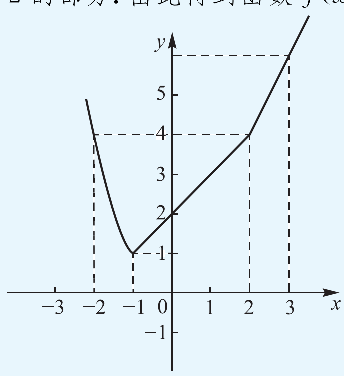


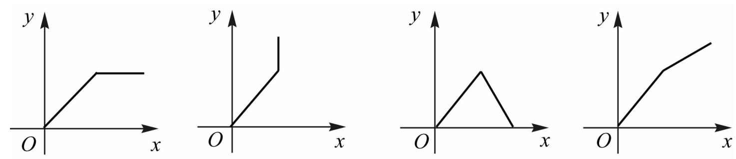
图 3-2

技巧点拨 因为分段函数是一个函数,所以作分段函数的图像时应将不同取值范围内的图像作在同一个平面直角坐标系中.

变式训练 1

已知 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+1, & x\leqslant0,\\ -(x-1)^2, & x>0,\end{cases}$ 试求使 $f(x)\geqslant-1$ 成立的 x 的取值范围.

例 2　小明去上学，一开始乘车，然后剩一段路步行，图中横轴表示小明用的时间，纵轴表示距离，则下列图形中，正确的是(　　).



A　　B　　C　　D

解析　A 中可以看出后一段时间增加，距离未变，不符合题意，排除 A；B 中后一段距离增加，时间未变，不符合题意，排除 B；C 中后一段距离缩短，不符合题意，排除 C；D 中后一段距离增加，时间增加，且增长速度比前一段慢，符合题意，故选 D.

技巧点拨　抓住两个变量间的变化规律与函数的性质、图像相吻合即可.

变式训练 2

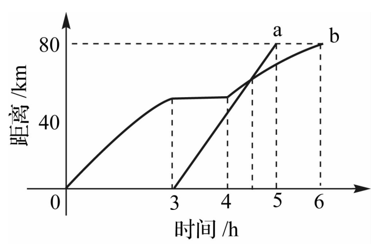
图 3-3 为一位骑自行车者和一位骑摩托车者在相距 80 km 的两城镇间旅行的函数图像. 根据这个函数图像推出关于这两个旅行者的信息，其中不正确的是(　　).

A. 骑自行车者用了 6 h，沿途休息了 1 h，而骑摩托车者用了 2 h

B. 骑自行车者比骑摩托车者早出发 3 h，晚到 1 h

C. 骑自行车者和骑摩托车者都是匀速运动

D. 骑摩托车者在出发了 1.5 h 后追上了骑自行车者



a. 骑摩托车者；b. 骑自行车者

图 3-3

例 3　某工厂生产一种产品的总利润 L(元)是产量件数 x 的二次函数：$L=-x^2+2\,000x-10\,000$，$0<x<1\,900$. 试问：产量是多少时，总利润最大？最大利润是多少？

解析　由于 $a=-1<0$，因此上述二次函数在定义域内有最大值.

又因 $L=-x^2+2\,000x-10\,000=-(x-1\,000)^2+990\,000$，

所以可以得出，当 $x=1\,000$ 时，L 取得最大值 990 000.

答：当产量为 1 000 件时，总利润最大，最大利润为 990 000 元.

技巧点拨　这是一个二次函数的问题，在解题时关键是把它转化为数学问题来解决.

变式训练 3

已知学校航模组设计制作的火箭的升空高度 h(m)与飞行时间 t(s)满足的函数关系式为 $h=-t^2+24t+1$，则火箭升空的最大高度为________ m.

巩固练习

基础巩固

一、选择题

1. 正方形的边长为1,若边长增加x,则面积增加y,则y与x的函数表达式为(　　).

A. $y=(x+1)^2-1(x\geqslant 1)$　　B. $y=(x+1)^2-1(x\geqslant 0)$

C. $y=(x-1)^2-1(x\geqslant 1)$　　D. $y=(x-1)^2-1(x\geqslant \alpha)$

2. 已知甲、乙两个城市相距120千米,小王开汽车以100 km/h匀速从甲城市驶往乙城市,到达乙城市后停留1 h,再以80 km/h匀速返回甲城市.汽车从甲城市出发时,时间x(h)记为0,在这辆汽车从甲城市出发至返回甲城市的这段时间内,该汽车离甲城市的距离y(km)表示成时间x(h)的函数为(　　).

A. $y=\begin{cases}100x, & 0\leqslant x\leqslant 1.2\\ 80x, & x>1.2\end{cases}$　　B. $y=\begin{cases}100x, & 0\leqslant x\leqslant 1.2\\ 120-80x, & x>1.2\end{cases}$

C. $y=\begin{cases}100x, & 0\leqslant x\leqslant 1.2\\ 120, & 1.2<x\leqslant 2.2\\ 120-80x, & 2.2<x\leqslant 3.7\end{cases}$　　D. $y=\begin{cases}100x, & 0\leqslant x\leqslant 1.2\\ 120, & 1.2<x\leqslant 2.2\\ 296-80x, & 2.2<x\leqslant 3.7\end{cases}$

3. 某家具的标价为132元,若降价以九折出售(优惠10%)仍可获利10%(相对于进货价),则该家具的进货价是(　　).

A. 108元　　B. 105元

C. 106元　　D. 118元

4. 某林场计划第一年造林10 000亩,以后每年比前一年多造林20%,则第五年造林是(　　)亩.

A. 14 400　　B. 16 240

C. 17 280　　D. 20 736

5. 某高职院校一大学生毕业后为响应"大众创业,万众创新"的号召,打算回家乡兴办一个现代化养鸡场,该养鸡场场地是一个矩形其中一面墙(墙足够长),其他三面由100 m长的竹篱笆围成,则该养鸡场场地的最大面积是(　　).

A. 10 000 m^2　　B. 5 000 m^2

C. 2 500 m^2　　D. 1 250m^2

6. 某种商品每件成本为5元,经市场调查发现,若定价为15元/件,可以卖出100件,单价每提高1元,则销量减少4件.则当售价定为(　　)元时投资少且利润最大.

A. 20　　B. 21

C. 22　　D. 23

二、填空题

1. 某市出租车起步价5公里以内为10元,每超过一公里加1.5元,某人乘坐出租车交了16元,则这个乘客乘坐该出租车行驶的路程为________公里.

2. 某药品经过两次降价,每瓶零售价由162元降为128元,已知两次降价的百分率相同,则每次降价的百分率为________.(保留两位小数点)

3. 若函数$f(x)=\begin{cases}-1, x<0,\\ x-1, x\geqslant 0,\end{cases}$则$f(2)=$________.

三、解答题

1.肺炎疫情牵动着全国人民的心，某单位开展了“一方有难，八方支援”赈灾捐款活动，第一天收到捐款10 000元，第三天收到捐款12 100元.

(1)如果第二天、第三天收到捐款的增长率相同，求捐款增长率；

(2)按照(1)中收到捐款的增长速度，第四天该单位能收到多少捐款？

2.某商品的进价为每件50元.根据市场调查，如果售价为每件50元，每天可卖出400件；若商品的售价每上涨1元，则每天少卖10件，设每件商品的售价定为x元($x\geqslant 50$，$x\in \mathbf{N}$).

(1)求每天销售量与自变量x的函数关系式；

(2)求每天销售利润与自变量x的函数关系式；

(3)每件商品的售价定为多少元时，每天可获得最大利润？最大的日利润是多少元？

3. 通过研究学生的学习行为，心理学家发现，学生的接受能力依赖于老师引入概念和描述问题所用的时间. 授课开始时，学生的兴趣激增，中间有一段不太长的时间，学生的兴趣保持较理想的状态，随后学生注意力开始分散. 分析结果和实验表明，用 $f(x)$ 表示学生掌握和接受概念的能力，x 表示提出和讲授概念的时间(单位：分)，可有以下的关系：$f(x)=\begin{cases}-0.1x^2+2.6x+43, & 0<x\leqslant 10\\ 59, & 10<x\leqslant 16.\\ -2x+91, & x>16\end{cases}$

(1)开讲后多少分钟，学生的接受能力最强？这个强度可以持续多长时间？

(2)开讲后 5 分钟与开讲后 20 分钟比较，学生的接受能力何时强一些？

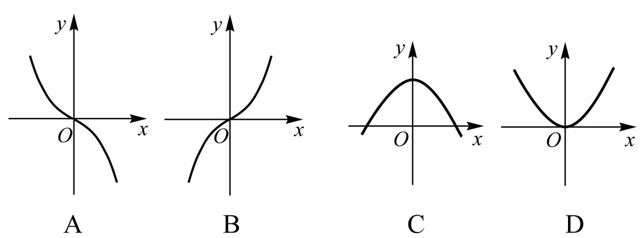
(3)一道数学难题，需要 55 的接受能力以及 13 分钟的时间，老师能否及时在学生一直达到所需接受能力的状态下讲授完？

能 力 提 升

某种商品每件成本为 50 元，经市场调查发现，若售价为 80 元/件，可以卖出1 000 件，单件每提高 5 元，则销量减少 10 件. 则当售价定为多少元时，投资少且利润最大？最大利润是多少？

真题在线

1. (2020 年湖北省技能高考)若函数 $y=f(x)$ 为偶函数，且在区间$(0,+\infty)$内为增函数，则 $y=f(x)$ 的图像可能是(　　)



答案:D

解析:若函数 $y=f(x)$ 为偶函数,所以排除选项 A 和选项 B. 又因为在区间 $(0,+\infty)$ 内为增函数,所以排除选项 C. 故选 D.

2. (2020 年湖北省技能高考)为了促进消费,某商品进行优惠销售,若对原价先降价 25 元,在此基础上再打 8 折,最终的售价为 80 元,则该商品共降价了________元.(注:打 8 折是指打折后的价格为打折前价格的 80%)

答案:45

解析: $80\div 80\%-80+25=100-80+25=20+25=45$(元).

3. (2019 年湖北省技能高考)下列函数中与函数 $y=x$ 为同一个函数的是(　　)

A. $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$　　B. $f(x)=\sqrt{x^2}$

C. $f(x)=(\sqrt{x})^2$　　D. $f(x)=\sqrt[3]{x^3}$

答案:D

解析:$y=x$ 的定义域为 **R**,值域为 **R**. 选项 A 中,定义域为 $\{x|x\neq 0\}$,与 $y=x$ 不符. 选项 B 中,值域为 $[0,+\infty)$,与 $y=x$ 不符. 选项 C 中,定义域为 $\{x|x\geqslant 0\}$,与 $y=x$ 不符. 故选 D.

4. (2019 年湖北省技能高考)下列函数中在其定义域内为非奇非偶函数,且为增函数的是(　　)

A. $f(x)=x^3$　　B. $f(x)=3^x$

C. $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$　　D. $f(x)=\cos x$

答案:B

解析:选项 A 中,$f(-x)=-x^3$,$f(x)=x^3$,所以函数是奇函数,不合题意. 选项 B 中,$f(-x)=3^{-x}\neq -f(x)$,为非奇非偶函数. 因为 $3>1$,所以函数 $f(x)$ 在定义域上为增函数. 选项 C 中,$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$,因为 $x>0$,所以为非奇非偶函数. 又因为 $0<\dfrac{1}{2}<1$,所以函数 $f(x)$ 在定义域上为减函数. 选项 D 中,$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$,所以函数是偶函数,不合题意. 故选 B.

5. (2019 年湖北省技能高考)若函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x+x, x>0,\\ \cos x+c, x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 c 为实数,且 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$,则 $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=$________.

答案:$\dfrac{\pi+2\sqrt{3}}{4}$

解析:由题意可知,$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\pi}{4}$,$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+c$. 若 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$,则 $c=\dfrac{\pi}{4}$,所以 $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi+2\sqrt{3}}{4}$.

6. (2018 年湖北省技能高考)下列四个函数:①$f(x)=1-x$,②$f(x)=1-|x|$,③$f(x)=1-\sqrt[5]{x^5}$,④$f(x)=1-(\sqrt[4]{x})^4$,其中为同一个函数的序号是(　　)

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

答案:A

解析:①函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**,值域为 **R**;②函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**,值域为 $(-\infty,1]$;③$f(x)=1-\sqrt[5]{x^5}=1-x$,函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**,值域为 **R**;④函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$. 综

上所述,①③的定义域、值域、对应法则都相同,所以①③为同一个函数.故选 A.

7.(2018 年湖北省技能高考)下列四个函数在其定义域内为减函数且为奇函数的是(　　)

A. $f(x)=3^{-x}$　　B. $f(x)=x^2$

C. $f(x)=-x$　　D. $f(x)=\sin x$

答案:C

解析:$f(x)=-x$ 在其定义域内为减函数,且 $f(-x)=x=-(-x)=-f(x)$.故选 C.

8.(2018 年湖北省技能高考)若函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-k,x\leqslant -2\\ 2-x,x>-2\end{cases}$,且 $f(3)=f(-3)$,则实数 $k=$__________.

答案:10

解析:由题意可知,$f(3)=2-3=-1$,$f(-3)=(-3)^2-k$,若 $f(3)=f(-3)$,解得 $k=10$.

9.(2017 年湖北省技能高考)下列四个函数中在定义域内为非奇非偶函数的个数是(　　)

①$f(x)=x^{-2}$　②$f(x)=x-2$　③$f(x)=x(x^2+1)$　④$f(x)=x^3+1$

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

答案:C

解析:②和④在定义域内是非奇非偶函数.故选 C.

10.(2017 年湖北省技能高考)函数 $y=\dfrac{1}{\ln(5x-9)}$ 的定义域用区间表示为__________.

答案:$\left(\dfrac{9}{5},2\right)\cup(2,+\infty)$

解析:因为分数的分母不为 0,所以 $5x-9\neq 1$,解得 $x\neq 2$.

又因为对数的真数要大于 0,所以 $5x-9>0$,解得 $x>\dfrac{9}{5}$.

综上所述,该函数的定义域是 $\left(\dfrac{9}{5},2\right)\cup(2,+\infty)$.

11.(2016 年湖北省技能高考)下列函数中在定义域内为奇函数,且在区间 $(0,+\infty)$ 内为减函数的是(　　)

A. $y=-x^{-1}$　　B. $y=-\dfrac{x^3}{2}$　　C. $y=x^2-3$　　D. $y=5^{-x}$

答案:B

解析:选项 B 中,$-\dfrac{(-x)^3}{2}=\dfrac{x^3}{2}=-\left(-\dfrac{x^3}{2}\right)$,且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减.故选 B.

12.(2016 年湖北省技能高考)函数 $y=\dfrac{x}{\ln(x-3)}$ 的定义域为__________.

答案:$(3,4)\cup(4,+\infty)$ 或 $\{x\mid x>3$ 且 $x\neq 4\}$

解析:因为分数的分母不为 0,所以 $x-3\neq 1$,解得 $x\neq 4$.又因为对数的真数要大于 0,所以 $x-3>0$,解得 $x>3$.综上所述,该函数的定义域是 $(3,4)\cup(4,+\infty)$ 或 $\{x\mid x>3$ 且 $x\neq 4\}$.