

6. 已知 $M = \{(x, y) | x + y = 5\}$, $N = \{(x, y) | x - y = 7\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$.

- A. $x=1, y=6$ B. $(-1, 6)$
 C. $\{6, -1\}$ D. $\{(6, -1)\}$

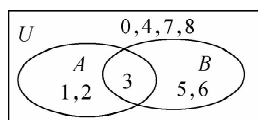
7. 若集合 $A = \{x | x \text{ 是等边三角形}\}$, $B = \{x | x \text{ 是三角形}\}$, 则下列关系中正确的是().

- A. $A \in B$ B. $A \subseteq B$
 C. $A = B$ D. $B \subseteq A$

8. 若集合 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{x | mx = 1\}$, 且 $A \cup B = A$, 则 m 的值为().

- A. 1 B. -1
 C. 1 或 -1 D. 1, -1 或 0

9. 已知三个集合 U, A, B 之间的关系如图所示, 则 $(\complement_U B) \cap A = (\quad)$.



- A. $\{3\}$ B. $\{0, 1, 2, 4, 7, 8\}$
 C. $\{1, 2\}$ D. $\{1, 2, 3\}$

10. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 6, 8\}$, 那么集合 $\{2, 4, 9\}$ 是().

- A. $A \cup B$ B. $A \cap B$
 C. $\complement_U (A \cap B)$ D. $\complement_U (A \cup B)$

二、填空题

11. 若集合 $A = \{9, 1, a-1\}$, $B = \{-2, a^2\}$, B 为 A 的子集, 则 a 的值是 _____.

12. 满足条件 $\{1, 2\} \subsetneq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的集合 M 的个数是 _____.

13. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{5\}$, 则 $(\complement_U A) \cup B =$ _____.

14. 已知集合 $A = \{a, b, 2\}$, $B = \{2, b^2, 2a\}$, 且 $A \cap B = A \cup B$, 则 $a =$ _____.

15. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$, 用集合 A 和集合 B 表示全集 U , 则 _____.

三、解答题

16. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 + 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 + (m+1)x + m = 0\}$. 若 $(\complement_U A) \cap B = \emptyset$, 求 m 的值.

17. 设全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x|3\leq x<7\}$, $B=\{x|2<x<10\}$, 求 $\complement_U B$, $\complement_U(A\cup B)$ 及 $(\complement_U A)\cap B$.

18. 已知集合 $A=\{x|(a^2-1)x^2-2x-1=0\}$, 且集合 A 有且只有一个非空子集, 求实数 a 的值.

19. 已知集合 $A=\{1, 1+m, 1+2m\}$, $B=\{1, n, n^2\}$, 其中 $m, n\in\mathbf{R}$. 若 $A=B$, 求 m, n 的值.

20. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | ax + 2 = 0\}$, 且 $B \subsetneq A$, 求实数 a 的值组成的集合.

21. 已知集合 $A = \{x | kx^2 + 5x + 2 = 0\}$. 若 $A \neq \emptyset$, 且 $k \in \mathbf{N}$, 求 k 的所有值组成的集合.

第二节 充分必要条件

一、选择题

1. “ $x=2$ ”是“ $x^2=4$ ”的().

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

2. “ $x < -1$ 或 $x > 2$ ”是“ $(x-2)(x+1) > 0$ ”的().

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 $p: |3x-5| < 4, q: (x-1)(x-2) < 0$, 则 p 是 q 的().

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

4. 若 a 与 b 均为实数, 则“ $|a|=|b|$ ”是“ $a=b$ ”的().

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

5. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则“ $a > b$ ”是“ $ac^2 > bc^2$ ”的().

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

6. “ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ”是“ $\tan \alpha = 1$ ”的().

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

7. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\sin A = \frac{1}{2}$ ”是“ $A = 30^\circ$ ”的().

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

8. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则“ $ac = b^2$ ”是“ a, b, c 成等比数列”的().

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

9. “ $x \in A \cap B$ ”是“ $x \in A \cup B$ ”的_____条件.

10. “2 的倍数”是“4 的倍数”的_____条件.

11. “ $x < 2$ ”是“ $x^2 - x - 2 < 0$ ”的_____条件.

12. 已知 $m, n \in \mathbf{R}$, 则“ $m \neq 0$ 且 $n \neq 0$ ”是“ $mn \neq 0$ ”的_____条件.

三、解答题

13. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x^3 \geq 8$ ”是“ $x^2 \geq 4$ ”的什么条件?

14. 求 $x^2 - 5x - 6 \leq 0$ 的充要条件.

15. 已知方程 $x^2 + (2k-1)x + k^2 = 0$, 求方程有两个大于 1 的实根的充要条件.

第一章自我检测题

一、选择题

1. 下列关系中,正确的个数为().

① $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbf{R}$; ② $\{\sqrt{3}\} \in \mathbf{Q}$; ③ $0 \in \mathbf{N}^*$; ④ $\{-5\} \subseteq \mathbf{Z}$.

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

2. 已知集合 $M = \{x | -3 < x \leq 5\}$, $N = \{x | -5 < x < 5\}$, 则 $M \cap N = ()$.

A. $\{x | -5 < x < 5\}$
B. $\{x | 3 < x < 5\}$
C. $\{x | -5 < x \leq 5\}$
D. $\{x | -3 < x < 5\}$

3. 集合 $\{1, 2, 3\}$ 所有真子集的个数为().

A. 3
B. 6
C. 7
D. 8

4. 已知集合 $A = \{1, 4\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, 则 $A \cup B$ 等于().

A. $\{4, 5, 6\}$
B. $\{1, 4, 5, 6\}$
C. $\{4\}$
D. \emptyset

5. 全集 $U = \{0, 1, 3, 5, 6, 8\}$, 集合 $A = \{1, 5, 8\}$, $B = \{2\}$, 则集合 $(\complement_U A) \cup B = ()$.

A. $\{0, 2, 3, 6\}$
B. $\{0, 3, 6\}$
C. $\{1, 2, 5, 8\}$
D. \emptyset

6. “ $x < -1$ ”是“ $x < -1$ 或 $x > 1$ ”的().

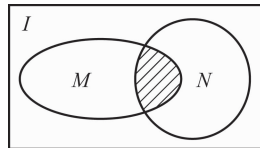
A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

7. 设 $A = \{x | 2 \leq x \leq 6\}$, $B = \{2a \leq x \leq a + 3\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围是().

A. $[1, 3]$
B. $[3, +\infty)$
C. $[1, +\infty)$
D. $(1, 3)$

8. 集合 $M = \{x | x^2 < 4\}$ 与 $N = \{x | x \leq 1\}$ 都是集合 I 的子集, 则图中阴影部分所表示的集合为().

A. $\{x | x \leq 1\}$
B. $\{x | x < 2\}$
C. $\{x | -2 < x < 2\}$
D. $\{x | -2 < x \leq 1\}$



9. 已知集合 $A = \{(x, y) | x + 2y = 4\}$, 集合 $B = \{(x, y) | 2x - y = 3\}$, 则 $A \cap B = ()$.

A. $\{1, 2\}$
B. $\{(2, 1)\}$
C. $\{11, 2\}$
D. $(1, 2)$

19. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 < 0\}$, $B = \{x \mid 1 < x < a\}$ (a 为常数).

(1) 若 $a = \frac{3}{2}$, 求 $A \cap B$;

(2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

20. 已知集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, x^2 + 1\}$. 若 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, 求 x 及 $A \cap B$.

21. 若集合 $A = \{x \mid ax^2 + 3x + 2 = 0\}$ 中最多有一个元素, 求实数 a 的取值范围.

22. 已知 $p: \left|1 - \frac{x-1}{3}\right| \leq 2, q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$. 若 p 是 q 的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.

第二章

不等式

第一节 不等式的基本性质

一、选择题

1. 若 $3a-1$ 不小于 $4a-6$, 那么实数 a 的取值范围是().
A. $\{a | a > 5\}$ B. $\{a | a \geq 5\}$
C. $\{a | a < 5\}$ D. $\{a | a \leq 5\}$
2. 设集合 $A = (-3, 2), B = (-2, 3)$, 则 $A \cup B =$ ().
A. $(-3, 2)$ B. $(-2, 3)$
C. $(-3, 3)$ D. $(-2, 2)$
3. 设集合 $A = (0, +\infty), B = (-1, 1)$, 则 $A \cap B =$ ().
A. $(0, 1)$ B. $(-1, +\infty)$
C. $(-1, 1)$ D. $(0, +\infty)$
4. 已知 $a+b > 0, b < 0$, 则 $a, b, -a, -b$ 的大小关系是().
A. $a > b > -b > -a$ B. $a > -b > -a > b$
C. $a > b > -a > -b$ D. $a > -b > b > -a$
5. 下面四个条件中, 使 $a > b$ 成立的条件是().
A. $a > b + 1$ B. $a > b - 1$
C. $a^2 > b^2$ D. $|a| > b$
6. 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $\frac{a}{d}$ 与 $\frac{b}{c}$ 的关系是().
A. $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$ B. $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$
C. $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$ D. 无法确定

7. 给出以下四个命题:

①若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

②若 $a > b$, 则 $a^2 > b^2$;

③若 $a > |b|$, 则 $a > b$;

④若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$.

其中正确的是().

A. ①②

B. ①③

C. ③④

D. ②④

8. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}, a > b$, 则下列不等式成立的是().

A. $a^2 > b^2$

B. $ac > bc$

C. $\frac{a}{c^2+1} > \frac{b}{c^2+1}$

D. $a-c < b-c$

9. 下列实数比较大小, 正确的是().

A. $a > -a$

B. $0 > -a$

C. $a < a+1$

D. $-\frac{1}{b} < -\frac{1}{4}$

10. a 是一个整数, 则 a 与 $3a$ 的大小是().

A. $a > 3a$

B. $a < 3a$

C. $a = 3a$

D. 无法确定

二、填空题

11. 若 $a > b > 0$, 则 $a(a+b)$ _____ a^2 . (填“>”“<”或“=”)

12. 集合 $A = \{x | 2x - 3 > 7\}$, $B = \{x | x + 2 < 9\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}}A) \cap B =$ _____.

13. 若 $M = \sqrt{2\ 019} - \sqrt{2\ 018}$, $N = \sqrt{2\ 018} - \sqrt{2\ 017}$, 则 M, N 的大小关系为 _____.

14. 已知 $5 < x < 20$, $3 < y < 12$, 则 $x+y$ 的取值范围为 _____; $x-y$ 的取值范围为 _____.

15. 当 $m > 0, n > 0, m \neq n$ 时, $m^4 + n^4$ _____ $m^3n + mn^3$. (填“>”“<”或“=”)

三、解答题

16. 比较 $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 和 $\sqrt{10}$ 的大小.

17. 比较 $(a+3)(a-5)$ 与 $(a+2)(a-4)$ 的大小.

18. 比较 $(x^2+2)^2$ 与 x^4+x^2+3 的大小.

19. 比较 x^2+y^2 与 $4x+6y-15$ 的大小.

20. 已知三个不等式:① $ab>0$;② $-\frac{c}{a}<-\frac{d}{b}$;③ $bc>ad$. 以其中两个作为条件,余下一个作为结论,可以组成多少个正确的命题?

9. 不等式 $1 \leq |2x-7| < 3$ 的解集为().

A. $\{x | 4 \leq x < 5\}$

B. $\{x | x \geq 4 \text{ 或 } x < 5\}$

C. $\{x | 2 < x \leq 3 \text{ 或 } 4 \leq x < 5\}$

D. $\{x | x < -8 \text{ 或 } x > -2\}$

10. 设不等式 $|x-a| \leq b$ 的解集为 $\{x | 2 \leq x \leq 4\}$, 则 a, b 的值为().

A. $a = -3, b = 1$

B. $a = 3, b = -1$

C. $a = 1, b = 3$

D. $a = 3, b = 1$

二、填空题

11. 不等式组 $\begin{cases} 5-x < 0, \\ x-2 \leq 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

12. 不等式 $|x+4| \geq 6$ 的解集是_____.

13. 一元二次不等式 $-x^2 - 3x + 10 \geq 0$ 的解集是_____.

14. 若关于 x 的不等式 $2x - m \leq 0$ 的正整数解是 $1, 2, 3$, 则 m 的取值范围是_____.

15. 已知一元二次不等式 $mx^2 + nx - 4 < 0$ 的解集是 $(-2, 4)$, 则 $mn =$ _____.

三、解答题

16. 解不等式 $4(x+1) - 1 \geq 7 - 2(x-1)$, 并把解集在数轴上表示出来.

17. 已知 $A = \{x | |2x-3| > 1\}$, $B = \{x | |3x-2| \leq 4\}$, 求 $A \cap B, A \cup B$.

18. 解不等式 $|x^2 - 5x| \leq 6$.

19. 解不等式组 $\begin{cases} \frac{2}{2x-3} > 0, \\ \frac{x-1}{3} < 0. \end{cases}$ (解集用区间表示)

20. 已知一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(-\frac{1}{3}, 2)$, 求不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 的解集.

第二章自我检测题

一、选择题

1. 下列命题正确的是().

A. 若 $a > b$, 则 $ac > bc$

B. 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$

C. 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$

D. 若 $a > b, c > d$, 则 $ac > bd$

2. 如果 $b > a > 0$, 那么().

A. $-\frac{1}{a} > -\frac{1}{b}$

B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

C. $-\frac{1}{a} < -\frac{1}{b}$

D. $-b > -a$

3. 不等式组 $\begin{cases} -x+2 < x-6, \\ x > m \end{cases}$ 的解集是 $\{x | x > 4\}$, 那么 m 的取值范围是().

A. $\{m | m \geq 4\}$

B. $\{m | m \leq 4\}$

C. $\{m | m < 4\}$

D. $\{m | m = 4\}$

4. 设不等式 $|x - \frac{1}{2}| < a$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 2\}$, 则 a 等于().

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{2}$

5. “ $|x+1| > 2$ ”是“ $|x| > 1$ ”的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. “ $ab > 0$ ”是“ $a > 0, b > 0$ ”的().

A. 充分条件

B. 必要条件

C. 充要条件

D. 无法确定

7. 不等式 $kx^2 - kx + 1 > 0$ 对任意的实数 x 都成立, 则 k 的取值范围为().

A. $\{k | 0 < k < 4\}$

B. $\{k | k < 0 \text{ 或 } k > 4\}$

C. $\{k | 0 \leq k < 4\}$

D. $\{k | k \leq 0 \text{ 或 } k > 4\}$

8. “ $x < -1$ ”是“ $|x| > 1$ ”的().

A. 充分条件

B. 必要条件

C. 充要条件

D. 无法确定

9. 不等式 $x(2-x) > 3$ 的解集是().

A. $\{x | -1 < x < 3\}$

B. $\{x | -3 < x < 1\}$

C. $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$

D. \emptyset

10. 不等式 $x^2 - |x| - 2 < 0$ 的解集是().

A. $\{x | -2 < x < 2\}$

B. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$

C. $\{x | -1 < x < 1\}$

D. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$

二、填空题

11. 不等式 $-x^2 + 2x \geq 4x + 1$ 的解集是_____.
12. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 3x + 2 > 0\}$, 集合 $B = \{x \in \mathbf{R} \mid (x + 1)(x - 3) < 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
13. 不等式 $|x + 2| \geq |x|$ 的解集是_____.
14. 设集合 $A = \{x \mid |x| \leq 3\}$, $B = \{x \mid |3 - x| < 1\}$, 则 $A \cup B =$ _____.
15. 若不等式 $|x - a| < b$ 的解集是 $(-2, 8)$, 则 a, b 分别是_____.
16. 已知 $a > 0$, 且不等式 $|3x - 2| < a$ 的解集是 $(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$, 则 a 的值为_____.

三、解答题

17. 解不等式: $(1 - 3x)^2 + (2x - 1)^2 > 13(x - 1)(x + 1)$.

18. 已知集合 $A = \{x \mid |x - a| \leq 1\}$, $B = \left\{x \mid \frac{x + 2}{x - 3} > 0\right\}$, 且 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

19. 若关于 x 的方程 $ax^2+2x+a=0$ 无实数根, 求 a 的取值范围.

20. 若一元二次不等式 $ax^2+bx+1>0(a\neq 0)$ 的解集为 $[-2, 4]$, 求 a, b 的值.

21. 求关于 x 的不等式 $|2x-1| < 2m+1 (m \in \mathbf{R})$ 的解集.

22. 如果以 x, y 为未知数的方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x - y = k \end{cases}$ 有实数解, 求 k 的取值范围.

参考答案及解析

第一章 集合与充要条件

第一节 集合的基本概念与基本运算

一、选择题

1. A 解析:注意各个符号的意义.
2. C 解析:将各个 x, y 的值代入求解,注意集合元素互异性.
3. B 解析:由题意可知 $a^2 - 3 = -2$, 即 $a = \pm 1$. 当 $a = -1$ 时, $M = \{3, 1, -2\}$, $N = \{-1, -2\}$, 不满足题意, 故舍去; 当 $a = 1$ 时, $M = \{3, 1, -2\}$, $N = \{1, -2\}$, 满足题意. 故选 B.
4. C 解析:集合元素具有无序性.
5. D 解析: $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\} = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, 因为 $A \subseteq C$, 所以元素 $1, 2 \in C$. 又因为 $C \subseteq B$, 所以满足条件的集合 $C = \{1, 2\}$ 或 $\{1, 2, 3\}$ 或 $\{1, 2, 4\}$ 或 $\{1, 2, 3, 4\}$, 共 4 个. 故选 D.
6. D 解析: $M \cap N = \{(6, -1)\}$. 故选 D.
7. B 解析:等边三角形一定是三角形, 但三角形不一定是等边三角形, 由真子集定义知 $A \subsetneq B$.
8. D 解析:当 $m = 0$ 时, $B = \emptyset$, 满足 $A \cup B = A$; 当 $m \neq 0$ 时, $B = \left\{ \frac{1}{m} \right\}$, 而 $A \cup B = A$, 所以 $\frac{1}{m} = 1$ 或 $\frac{1}{m} = -1$, 解得 $m = 1$ 或 $m = -1$. 综上所述, $m = 1, -1$ 或 0 .
9. C 解析:由 Venn 图可知 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 5, 6\}$, 所以 $(\complement_U B) \cap A = \{1, 2\}$. 故选 C.
10. D 解析:因为 $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$, 所以 $\complement_U(A \cup B) = \{2, 4, 9\}$. 故选 D.

二、填空题

11. -1 解析:由题意可知 $a - 1 = -2$, 解得 $a = -1$, 所以 $a^2 = 1$, 所以 $N = \{-2, 1\}$.
12. 7 解析:由题意可知集合 M 为不仅仅包含元素 1, 2 的 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的子集, 故其个数为 $2^3 - 1 = 7$.
13. $\{3, 4, 5\}$ 解析:因为 $\complement_U A = \{3, 4, 5\}$, 所以 $(\complement_U A) \cup B = \{3, 4, 5\}$.
14. 0 或 $\frac{1}{4}$ 解析:由 $A \cap B = A \cup B$ 可知 $A = B$, 则 $\begin{cases} a = 2a, \\ b = b^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = b^2, \\ b = 2a. \end{cases}$ 又根据集合元素的互异性可得 $\begin{cases} a = 0, \\ b = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases}$ 故 $a = 0$ 或 $a = \frac{1}{4}$.
15. $U = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ 解析: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = (2, 4)$, 所以 $\complement_U A = \{2, 4, 6\}$, $\complement_U B = \{1, 3, 5, 6\}$, 所以 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \{2, 4, 6\} \cup \{1, 3, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 所以 $U = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$.

三、解答题

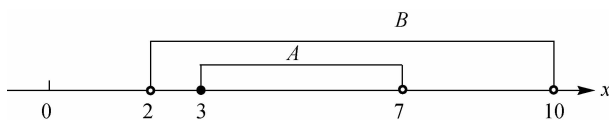
16.【参考答案】 $A = \{-2, -1\}$, 由 $(\complement_U A) \cap B = \emptyset$, 得 $B \subseteq A$.

当 $m=1$ 时, $B = \{-1\}$, 符合 $B \subseteq A$;

当 $m \neq 1$ 时, $B = \{-1, -m\}$, 而 $B \subseteq A$, 所以 $-m = -2$, 即 $m=2$.

综上所述, $m=1$ 或 $m=2$.

17.【参考答案】把集合 A, B 在数轴上表示如下:



由图可知 $\complement_U B = \{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 10\}$, $A \cup B = \{x | 2 < x < 10\}$, 所以 $\complement_U (A \cup B) = \{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 10\}$.

因为 $\complement_U A = \{x | x < 3 \text{ 或 } x \geq 7\}$, 所以 $(\complement_U A) \cap B = \{x | 2 < x < 3 \text{ 或 } 7 \leq x < 10\}$.

18.【参考答案】由题意可知集合 A 只有 1 个元素.

当 $a^2 - 1 = 0$ 时, $a = \pm 1$, $A = \{-\frac{1}{2}\}$, 满足题意;

当 $a^2 - 1 \neq 0$ 时, 要使方程 $(a^2 - 1)x^2 - 2x - 1 = 0$ 有唯一的实根, 则 $(-2)^2 - 4(a^2 - 1) \times (-1) = 0$, 解得 $a=0$, 此时 $A = \{-1\}$, 满足题意.

综上所述, 满足条件的 a 的值有 $-1, 0, 1$.

19.【参考答案】由题意可得

$$\begin{cases} 1+m=n, \\ 1+2m=n^2, \\ 1+m \neq 1, \\ 1+2m \neq 1, \\ 1+2m \neq 1+m, \\ 1 \neq n, \\ n \neq n^2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 1+m=n^2, \\ 1+2m=n, \\ 1+m \neq 1, \\ 1+2m \neq 1, \\ 1+2m \neq 1+m, \\ 1 \neq n, \\ n \neq n^2 \end{cases} \quad \text{无解或} \quad \begin{cases} m = -\frac{3}{4}, \\ n = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{所以} \quad \begin{cases} m = -\frac{3}{4}, \\ n = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

20.【参考答案】 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$.

因为 $B \subseteq A$, 所以 B 为 $\emptyset, \{1\}$ 或 $\{2\}$.

当 B 为 \emptyset 时, $a=0$;

当 B 为 $\{1\}$ 时, $-\frac{2}{a} = 1$, 得 $a = -2$;

当 B 为 $\{2\}$ 时, $-\frac{2}{a} = 2$, 得 $a = -1$.

综上所述, 实数 a 的值组成的集合为 $\{-2, -1, 0\}$.

21.【参考答案】当 $k=0$ 时, $A = \{x | kx^2 + 5x + 2 = 0\} = \{-\frac{2}{5}\}$, 符合题意;

当 $k \neq 0$ 时, 欲使 $A \neq \emptyset$, 须使方程 $kx^2 + 5x + 2 = 0$ 有解, 即 $\Delta = 5^2 - 8k \geq 0$, 解得 $k \leq \frac{25}{8}$.

因为 $k \in \mathbf{N}$ 且 $k \neq 0$, 所以 $k=1, 2, 3$.

综上所述, k 的所有值组成的集合为 $\{0, 1, 2, 3\}$.

第二节 充分必要条件

一、选择题

1. A 解析:方程 $x^2=4$ 的解为 $x=-2$ 和 $x=2$,所以“ $x=2$ ”是“ $x^2=4$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

2. C 解析: $(x-2)(x+1)>0 \Leftrightarrow x<-1$ 或 $x>2$,所以“ $x<-1$ 或 $x>2$ ”是“ $(x-2)(x+1)>0$ ”的充要条件. 故选 C.

3. B 解析:因为 $p:|3x-5|<4 \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<3$, $q:(x-1)(x-2)<0 \Leftrightarrow 1<x<2$,所以 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.

4. B 解析:略.

5. B 解析:由 $ac^2>bc^2$ 得 $a>b$. 当 $c=0$ 时, $a>b$ 不能推出 $ac^2>bc^2$,所以“ $a>b$ ”是“ $ac^2>bc^2$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

6. A 解析:略.

7. B 解析: $\sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 30^\circ$ 或 150° ,所以“ $\sin A = \frac{1}{2}$ ”是“ $A = 30^\circ$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

8. B 解析:如果 a, b, c 成等比数列,则 $b^2=ac$. 相反,如果 $b=a=0$,则 $b^2=ac$,但 a, b, c 不是等比数列. 因此,“ $ac=b^2$ ”是“ a, b, c 成等比数列”的必要不充分条件. 故选 B.

二、填空题

9. 充分不必要 解析:可通过画集合的 Venn 图得到“ $x \in A \cap B$ ”是“ $x \in A \cup B$ ”的充分不必要条件.

10. 必要不充分 解析:一个数是 4 的倍数就一定 是 2 的倍数. 相反,一个数是 2 的倍数却不一定 是 4 的倍数. 因此,“2 的倍数”是“4 的倍数”的必要不充分条件.

11. 必要不充分 解析:由 $x^2-x-2<0$ 解得 $-1<x<2$. 小范围能推出大范围,但大范围推不出小范围,所以“ $x<2$ ”是“ $x^2-x-2<0$ ”的必要不充分条件.

12. 充要 解析:因为 $mn \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ 且 $n \neq 0$,所以“ $m \neq 0$ 且 $n \neq 0$ ”是“ $mn \neq 0$ ”的充要条件.

三、解答题

13. 【参考答案】解不等式 $x^3 \geq 8$ 可得 $x \geq 2$;解不等式 $x^2 \geq 4$ 可得 $x \geq 2$ 或 $x \leq -2$.

因此,“ $x^3 \geq 8$ ”是“ $x^2 \geq 4$ ”的充分不必要条件.

14. 【参考答案】 $x^2-5x-6 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 6$.

故“ $x^2-5x-6 \leq 0$ ”的充要条件为“ $-1 \leq x \leq 6$ ”.

15. 【参考答案】令 $f(x) = x^2 + (2k-1)x + k^2$,若方程 $f(x) = 0$ 有两个大于 1 的实根,则 $f(x)$ 的图像与 x 轴的两个交点横坐标都位于 $(1, +\infty)$ 之内,可列方程组

$$\begin{cases} \Delta = (2k-1)^2 - 4k^2 \geq 0, \\ -\frac{2k-1}{2} > 1, \\ f(1) = 1^2 + 2k - 1 + k^2 > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } k < -2.$$

第一章自我检测题

一、选择题

1. B 解析:① $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbf{R}$ 正确. ② 集合之间不能用“ \in ”,故错误. ③ $0 \in \mathbf{N}^*$ 错误. ④ $\{-5\} \subseteq \mathbf{Z}$ 正确. 故选 B.

2. D 解析:因为 $M = \{x | -3 < x \leq 5\}$, $N = \{x | -5 < x < 5\}$,所以利用数轴可知 $M \cap N = \{x | -3 < x < 5\}$. 故选 D.

3. C 解析:真子集含一个元素的有 $\{1\}, \{2\}, \{3\}$,共 3 个;含两个元素的有 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$,共 3 个;空

集是任何非空集合的真子集,所以一共有7个真子集.故选C.

4. B 解析:因为 $A=\{1,4\}, B=\{4,5,6\}$,所以 $A\cup B=\{1,4,5,6\}$. 故选B.

5. A 解析:因为 $U=\{0,1,3,5,6,8\}, A=\{1,5,8\}$,所以 $\complement_U A=\{0,3,6\}$. 又因为 $B=\{2\}$,所以 $(\complement_U A)\cup B=\{0,2,3,6\}$. 故选A.

6. A 解析:“ $x<-1$ ”是“ $x<-1$ 或 $x>1$ ”的充分不必要条件. 故选A.

7. C 解析:因为 $B\subseteq A$,所以 $2a>a+3$ 或 $\begin{cases} 2a\leq a+3, \\ 2a\geq 2, \\ a+3\leq 6, \end{cases}$ 解得 $a>3$ 或 $1\leq a\leq 3$,综合可得 $a\geq 1$. 故选C.

8. D 解析:因为集合 $M=\{x|x^2<4\}$,所以 $M=\{x|-2<x<2\}$. 因为 $N=\{x|x\leq 1\}$,且图中阴影部分表示 M, N 两集合的交集,所以 $M\cap N=\{x|-2<x\leq 1\}$. 故选D.

9. B 解析:联立 $\begin{cases} x+2y=4, \\ 2x-y=3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=1, \end{cases}$ 所以 $A\cap B=\{(2,1)\}$. 故选B.

10. B 解析:因为 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}, B=\{x|x=2a, a\in A\}=\{2,4\}$,所以 $A\cup B=\{1,2,4\}$,所以 $\complement_U(A\cup B)=\{3,5\}$. 故选B.

二、填空题

11. 充分不必要 解析:“ $a>4$ ”能推出“ $a>1$ ”,但“ $a>1$ ”推不出“ $a>4$ ”,所以“ $a>4$ ”是“ $a>1$ ”的充分不必要条件.

12. $[1,3]$ 解析:因为集合 $A=\{x|-1\leq x\leq 3\}, \complement_{\mathbb{R}}B=\{x|x\geq 1\}$,所以 $A\cap(\complement_{\mathbb{R}}B)=\{x|1\leq x\leq 3\}$.

13. $\{-1,0,2,5\}$ 解析:因为 $A\cap B=\{2\}$,所以集合 A 中 $a=2$,所以 $A\cup B=\{-1,0,2,5\}$.

14. $\{(2,1)\}$ 解析:根据题意可以列方程组 $\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

15. -1 或 4 解析:因为 $A\cap B=\{3\}$,所以 $m^2-3m-1=3$,解得 $m=-1$ 或 $m=4$.

16. $(-\infty,3)$ 解析: $p:2x-6\geq 0$,解得 $x\geq 3$. $q:x\geq a$,若 p 是 q 的充分不必要条件,则 $a<3$.

三、解答题

17. 【参考答案】因为 $A=\{x|2\leq x<4\}, B=\{x|x\geq 3\}$,借用数轴得 $A\cap B=\{x|3\leq x<4\}, \complement_U A=\{x|x<2$ 或 $x\geq 4\}$,所以 $(\complement_U A)\cup B=\{x|x<2$ 或 $x\geq 3\}$.

18. 【参考答案】当 $m-3=-3$,即 $m=0$ 时, $A=\{0,1,-3\}, B=\{-3,-1,1\}, A\cap B=\{-3,1\}$,不符合题意;当 $2m-1=-3$,即 $m=-1$ 时, $A=\{1,0,-3\}, B=\{-4,-3,2\}, A\cap B=\{-3\}$,符合题意. 故 $m=-1$.

19. 【参考答案】(1)化简 $A=\{x|x^2-3x+2<0\}=\{x|1<x<2\}, B=\left\{x\left|1<x<\frac{3}{2}\right.\right\}$,故 $A\cap B=\left\{x\left|1<x<\frac{3}{2}\right.\right\}$.

(2)当 $a\leq 1$ 时, $B=\emptyset$,故 $B\subseteq A$ 成立;当 $a>1$ 时,因为 $B\subseteq A$,所以 $1<a\leq 2$. 故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,2]$.

20. 【参考答案】由题意可知 $x^2+1=3$ 或 $x^2+1=5$.

若 $x^2+1=3$,则 $x=\pm\sqrt{2}$;

若 $x^2+1=5$,则 $x=\pm 2$.

综上所述, $x=\pm\sqrt{2}$ 或 $x=\pm 2$.

第二章 不等式

当 $x = \pm 2$ 时, $B = \{1, 2, 5\}$, 此时 $A \cap B = \{1, 5\}$;

当 $x = \pm\sqrt{2}$ 时, $B = \{1, 2, 3\}$, 此时 $A \cap B = \{1, 3\}$.

21. 【参考答案】分两种情况:

当 $a = 0$ 时, 集合 $A = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, 符合题意.

当 $a \neq 0$ 时, 要使集合 A 中最多含有一个元素, 则判别式 $\Delta = 9 - 8a \leq 0$, 即 $a \geq \frac{9}{8}$.

综上所述, a 的取值范围为 $\left\{a \mid a = 0 \text{ 或 } a \geq \frac{9}{8}\right\}$.

22. 【参考答案】 $p: \left|1 - \frac{x-1}{3}\right| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 1 - \frac{x-1}{3} \leq 2$, 解得 $-2 \leq x \leq 10$.

$q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow [x - (1-m)][x - (1+m)] \leq 0$, 因为 $m > 0$, 所以 $1-m \leq x \leq 1+m$.

因为 p 是 q 的充分必要条件, 所以 $-2 \leq x \leq 10$ 是 $1-m \leq x \leq 1+m$ 的真子集,

可得 $\begin{cases} 1-m \leq -2, \\ 1+m \geq 10, \end{cases}$ 解得 $m \geq 9$. 故实数 m 的取值范围是 $[9, +\infty)$.

第二章 不等式

第一节 不等式的基本性质

一、选择题

1. D 解析: $3a - 1 \geq 4a - 6$, 解得 $a \leq 5$. 故选 D.
2. C 解析: 取两个区间的并集, 可以用数轴帮助我们更快地解题.
3. A 解析: 取两个区间的交集, 就是求两个区间中的公共部分.
4. D 解析: 因为 $a + b > 0, b < 0$, 则 $a > 0, b < 0, -a < 0, -b > 0, a > -b, b > -a$, 所以 $a > -b > b > -a$. 故选 D.
5. A 解析: 若 $a > b + 1$, 则 $a > b + 1 > b$, 所以一定会有 $a > b$. 故选 A.
6. B 解析: 若 $a > b > 0, c > d > 0$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}, \frac{a}{d} > \frac{b}{d}, \frac{a}{c} < \frac{a}{d}, \frac{b}{c} < \frac{b}{d}$, 所以 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$. 故选 B.
7. C 解析: 虽然 $a > b$, 但是正负值不确定, 所以①②错误. 故选 C.
8. C 解析: 因为 $a > b, c^2 + 1 \geq 1$, 所以 $\frac{a}{c^2 + 1} > \frac{b}{c^2 + 1}$. 故选 C.
9. C 解析: a, b 可能为正数、零、负数, 因此选项 A, B, D 无法确定, 而 a 一定小于 $a + 1$. 故选 C.
10. D 解析: 略.

二、填空题

11. $>$ 解析: 因为 $a(a+b) = a^2 + ab$, 又因为 $a > b > 0$, 即 $ab > 0$, 所以 $a(a+b) > a^2$.
12. $(-\infty, 5]$ 解析: 根据题意解得集合 $A = \{x \mid x > 5\}, B = \{x \mid x < 7\}, \complement_{\mathbb{R}} A = \{x \mid x \leq 5\}$, 所以 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = (-\infty, 5]$.
13. $<$ 解析: 由题意可知, 因为 $M = \sqrt{2019} - \sqrt{2018} > 0, N = \sqrt{2018} - \sqrt{2017} > 0$, 所以 $\frac{1}{M} = \frac{\sqrt{2019} + \sqrt{2018}}{(\sqrt{2019} - \sqrt{2018})(\sqrt{2019} + \sqrt{2018})} = \sqrt{2019} + \sqrt{2018}, \frac{1}{N} = \frac{\sqrt{2018} + \sqrt{2017}}{(\sqrt{2018} - \sqrt{2017})(\sqrt{2018} + \sqrt{2017})} =$