江西省

"三校生"对口升学考试复习丛书

数学总复习

《数学总复习》编写组　编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

Contents

目录

第一章 集合与充要条件

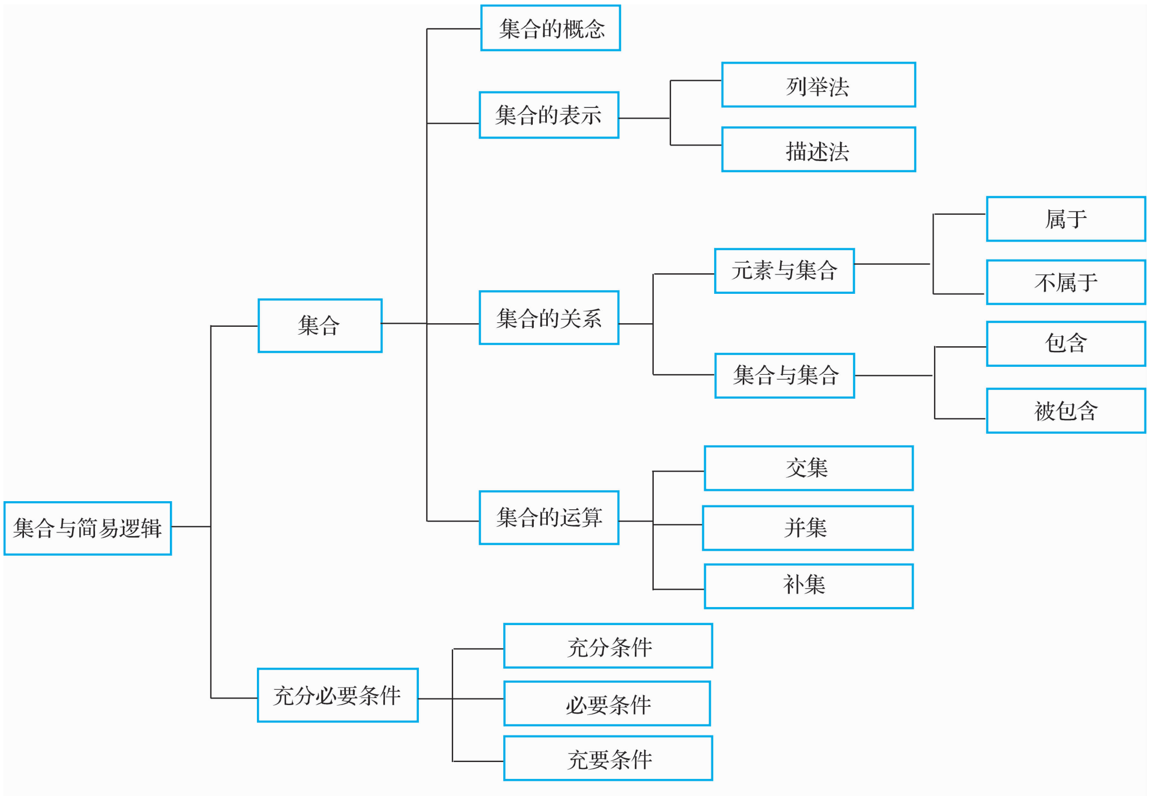
考纲要求

1. 理解集合的概念，会用符号表示元素与集合的关系.
2. 掌握集合的列举法和性质描述法，理解空集、子集、全集和补集的概念.
3. 理解集合的相等与包含关系，理解集合的交、并、补运算.
4. 了解充分条件、必要条件和充要条件的概念.

命题探究

<table>
<tr><td rowspan="4">命题规律</td><td rowspan="2">考点</td><td colspan="5">近几年常考题型及分值</td></tr>
<tr><td>2016 年</td><td>2017 年</td><td>2018 年</td><td>2019 年</td><td>2020 年</td></tr>
<tr><td>集合的基本概念与基本运算</td><td>是非选择题，3 分
单项选择题，5 分</td><td>是非选择题，3 分
填空题，5 分</td><td>是非选择题，3 分
单项选择题，5 分</td><td>是非选择题，3 分</td><td>是非选择题，3 分</td></tr>
<tr><td>充分必要条件</td><td></td><td>单项选择题，5 分</td><td>单项选择题，5 分</td><td>单项选择题，5 分</td><td>单项选择题，5 分</td></tr>
<tr><td>命题趋势</td><td colspan="6">本章是每年“三校生”考试的必考内容，也是比较容易拿分的知识点. 历年真题中多以是非选择题和单项选择题的形式出现，试题分值比例约占 5%，其中，元素和集合、集合与集合的关系，还有集合的运算是每年必考的内容.
集合在近几年“三校生”考试中主要从三个方面考查：一是考查集合的概念、集合的基本关系及常用数集的符号表示；二是考查集合的基本运算. 命题常以两个集合的交集、并集和补集运算为主，多与绝对值、不等式等相结合；三是考查充分条件、必要条件和充要条件的判定，多与函数等相结合</td></tr>
</table>

知识结构



第一节 集合的基本概念与基本运算

知识清单

知识点一 集合的概念与表示法

1. 集合

把具有某种属性的一些确定的对象看成一个整体，便形成了一个集合，常用大写英文字母 A,B,C 等表示.

2. 元素

集合中的每一个确定的对象叫作这个集合的元素，常用小写英文字母 a,b,c 等来表示.

3. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，

记作 $a\notin A$. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性的特征.

4. 常用的集合

(1)空集. 不含任何元素的集合叫作空集,记作$\varnothing$.

(2)正整数集. 所有正整数组成的集合叫作正整数集,记作 $\mathbf{N}_{+}$ 或 $\mathbf{N}^{*}$.

(3)自然数集. 所有自然数组成的集合叫作自然数集,记作 $\mathbf{N}$.

(4)整数集. 所有整数组成的集合叫作整数集,记作 $\mathbf{Z}$.

(5)有理数集. 所有有理数组成的集合叫作有理数集,记作 $\mathbf{Q}$.

(6)实数集. 所有实数组成的集合叫作实数集,记作 $\mathbf{R}$.

5. 集合的两种表示法

(1)列举法. 把集合的元素一一列举出来,写在大括号内,这种表示集合的方法叫作列举法.

注意:用列举法表示集合时,要注意以下几点:

①元素之间用“,”隔开.

②元素不能重复(满足集合中元素的互异性).

③元素不能遗漏.

④当集合中的元素较少时用列举法比较简单;若集合中的元素较多或无限,但存在一定的规律,在不发生误解的情况下,也可以用列举法表示.

(2)描述法. 用集合所含元素的共同特性表示集合的方法叫作描述法.

描述法表示集合的一般形式是$\{x\mid p(x)\}$,其中“x”是集合中元素的代表形式,“$p(x)$”是集合中元素的共同特征,两者之间的竖线不可省略.

注意:用描述法表示集合时,要注意以下几点:

①写清楚集合中元素的代表形式(一般用小写字母表示).

②写明集合中元素的特征或性质.

③用于描述元素特征的语句要力求简明、准确,不产生歧义;多层描述时,应当准确使用“且”“或”等关联词.

④所有描述的内容都要写在大括号内.

⑤在不引起混淆的情况下,用描述法表示集合时有时也可以省去竖线和竖线左边的部分. 例如,正整数的集合可简记为{正整数},但是,集合$\{x\mid x>1\}$就不能省略竖线及其左边的 x.

知识点二 集合间的关系

1. 子集

一般地,对于两个集合 A,B,如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素,那么,集合 A 就叫作集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.

当集合 A 不包含于集合 B 或集合 B 不包含集合 A 时,记作 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsupseteq A$.

性质:任何一个集合是它本身的子集,即 $A\subseteq A$;空集是任何集合的子集,即$\varnothing\subseteq A$;对于集合 A,B,C,若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

注意:不能把子集说成是由原来集合中的部分元素组成的集合,因为集合 A 的子集包括它本身,而这个子集由集合 A 的全体元素组成;空集也是集合 A 的子集,但这个子集中不包括集合 A 中的任何元素.

2. 真子集

如果集合 A 是集合 B 的子集,并且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A,则集合 A 是集合 B 的真子集(A 包含于 B 但不等于 B),记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$,读作“A 真包含于 B”(或“B 真包含 A”).

性质:空集是任何非空集合的真子集;对于集合 A,B,C,若 $A\subsetneqq B$,$B\subsetneqq C$,则 $A\subsetneqq C$.

注意:元素与集合之间是属于关系,集合与集合之间是包含关系.

3. 集合相等

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素也都是集合 B 的元素，同时集合 B 中的任何一个元素也都是集合 A 的元素，我们就说集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$（A，B 的所有元素均相等）.

注意：(1)若两个集合相等，则两个集合所包含的元素完全相同，反之亦然.

(2)要判断两个集合是否相等，对于元素较少的有限集合，主要看它们的元素是否完全相同；若是无限集合，则从“互为子集”入手进行判断.

知识点三 集合的运算

1. 交集

一般地，对于两个给定的集合 A，B，由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

性质：

(1)$A\cap B=B\cap A$.

(2)$A\cap A=A$.

(3)$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(4)$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$.

(5)若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$.

2. 并集

一般地，对于两个给定的集合 A，B，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

性质：

(1)$A\cup B=B\cup A$.

(2)$A\cup A=A$.

(3)$A\cup\varnothing=A$.

(4)$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$.

(5)若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$.

3. 图示两个集合的交集、并集

(1)用 Venn 图表示两个集合的交集、并集（如图 1-1 所示）.

(2)借助数轴表示数集的交集、并集（如图 1-2 所示）.

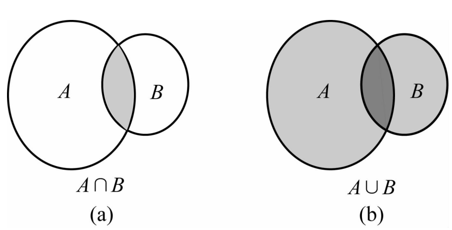


图 1-1

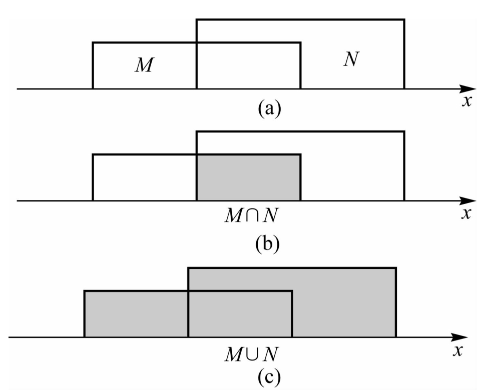


图 1-2

4. 全集

如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素，则称这个集合为全集，通常用 U 表示.

注意：全集是一个相对的概念，在不同的情况下全集的概念不同.

5. 补集

对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称为集合 A 的补集，记作 $\complement_U A$，读作“A 在 U 中的补集”，即 $\complement_U A=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

性质：

(1) $\complement_U(\complement_U A)=A$.

(2) $\complement_U\varnothing=U$，$\complement_U U=\varnothing$.

(3) $A\cup(\complement_U A)=U$.

(4) $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$.

6. 常见的集合表示

(1)方程的解集：$\{x|x^2-3x+2=0\}$或$\{1,2\}$，一般用列举法表示.

(2)方程组的解集：$\{(3,1)\}$或$\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x-2y=1\\x+3y=6\end{cases}\right.\right\}=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}\right.\right\}$，一般用后者表示.

(3)不等式的解集：$\{x|3\leqslant x<5\}$或$[3,5)$，一般用区间表示.

(4)点集：$\{(x,y)|y=2x+1\}$.

(5)具有某种性质的点集：$\{M||PM|=a\}$（P 为定点）.

(6)三角函数中角的集合表示：$M=\{\alpha|2k\pi<\alpha<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

典例精析

例 1 下列各组对象中，能构成集合的是(　　).

(1)我国著名的数学家

(2)超过 20 的所有自然数

(3)某校 2020 年招收的矮个子学生

(4)方程 $x^2-4=0$ 的实数解

(5)在直角坐标平面内，第三象限的所有点

A. (1)(2)(3)　　B. (2)(3)(4)　　C. (2)(4)(5)　　D. (3)(4)(5)

解析 (1)中的“我国著名的数学家”不是一个明确的标准，不能构成一个集合；(3)中的“矮个子学生”这一标准不确定，无法判定某人是高还是矮，不能构成集合；(2)，(4)中的对象是确定的；(5)中的对象虽然有无限个，但它是确定的. 故选 C.

技巧点拨 判断某组对象能否构成集合，关键看对象是否为整体的和确定的. 标准一定要是明确的，不能模糊，否则无法判断.

例 2 用列举法表示下列集合.

(1) $A=\{x|-2<x<5,x\in\mathbf{Z}\}$；

(2) $B=\{(x,y)|2x+y=5,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$.

视频
例 2

解析 (1) $A=\{-1,0,1,2,3,4\}$；(2) $B=\{(0,5),(1,3),(2,1)\}$.

技巧点拨 掌握集合的两种表示方法：列举法、描述法.

例 3 设集合 $A=\{0\}$，下列结论正确的是（　　）.

A. $A=0$　　B. $A=\varnothing$　　C. $0\in A$　　D. $\varnothing\in A$

解析 本题考查了元素与集合、集合与集合之间的关系. 答案选 C.

技巧点拨 正确理解符号 $\in$，$\notin$，$\subseteq$，$\subsetneqq$ 的意义是正确处理此类问题的关键.

例 4 已知集合 $A=\{x|x^2-x-2=0\}$，$B=\{x|x^2-4x+p=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

视频
例 4

解析 由题意得：$A=\{-1,2\}$，因为 $B\subseteq A$，所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{-1,2\}$.

又因为 $B=\{x|x^2-4x+p=0\}$，所以 $B=\{-1,2\}$ 不成立.

当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=(-4)^2-4p=16-4p<0$，解得 $p>4$；

当 $B=\{-1\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0,\\(-1)^2-4\times(-1)+p=0,\end{cases}$ 无解；

当 $B=\{2\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0,\\2^2-4\times2+p=0,\end{cases}$ 解得 $p=4$.

综上所述，实数 p 的取值范围是 $\{p|p\geqslant4\}$.

技巧点拨 本题考查了两个集合包含或相等关系的问题，首先分类讨论并建立方程（组），然后解出未知数，最后利用集合元素的特征进行检验.

例 5 已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant3,x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\}$，则集合 A 中元素的个数为（　　）.

A. 9　　B. 8　　C. 5　　D. 4

解析 由 $x^2+y^2\leqslant3$ 可知 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$. 又因为 $x\in\mathbf{Z}$，所以 $x\in\{-1,0,1\}$，因为 $y\in\mathbf{Z}$，所以 $x=-1$ 时，$y=-1,0,1$；$x=0$ 时，$y=-1,0,1$；$x=1$ 时，$y=-1,0,1$，所以集合 A 中元素的个数为 9. 故选 A.

技巧点拨 对于求解集合中元素个数的题目，应首先求出集合，然后根据集合中元素的互异性求出集合中元素的个数，或利用数形结合的方法求出集合中元素的个数.

例 6 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|0\leqslant x<2\}$，集合 $B=\{x|x^2-2x-3<0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$(\complement_U A)\cap B$.

视频
例 6

解析 $B=\{x|x^2-2x-3<0\}=\{x|-1<x<3\}$，$\complement_U A=\{x|x<0$ 或 $x\geqslant2\}$，所以 $A\cap B=\{x|0\leqslant x<2\}$，$A\cup B=\{x|-1<x<3\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{x|-1<x<0$ 或 $2\leqslant x<3\}$.

技巧点拨 考查对集合运算的理解及性质的运用.

例 7 已知集合 $M=\{x|a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$N=\{x|x<-1$ 或 $x>5\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

视频
例 7

解析 如图 1-3 所示，要使 $M\cap N=\varnothing$，必须满足 $\begin{cases}a+3\leqslant5,\\a\geqslant-1,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant2$，所以实数 a 的取值范围为 $\{a|-1\leqslant a\leqslant2\}$.

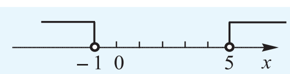


图 1-3

技巧点拨 解题时利用数轴表示集合,便于寻求满足条件的实数 a. 特别需要注意的是"端点值"的问题,要明确是能取"="还是不能取"=".

例 8 已知 U 为全集,集合 $M\subsetneqq U$,$N\subsetneqq U$,且 $N\subseteq M$,则( ).

A. $(\complement_U M)\supseteq(\complement_U N)$　　B. $(\complement_U M)\supseteq N$

C. $(\complement_U M)\subseteq(\complement_U N)$　　D. $M\supseteq(\complement_U N)$

解析 根据各集合之间的关系作图(如图 1-4 所示),这样就很容易做出判断,故选 C.

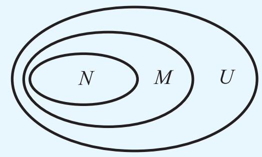


图 1-4

技巧点拨 (1)考虑集合之间的关系,用图形解答比较方便.

(2)在数学中利用"数形结合"的思想,往往能使问题简单化.

巩固练习

基础实战

一、选择题

1. 下列对象中能组成集合的是( ).

A. 好人　　B. 非常小的数　　C. 有趣的书　　D. 小于 5 的数

2. 给出下面四个关系:①$0\in\mathbf{Q}$;②$\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}$;③$\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}$;④$\varnothing\subseteq\{0\}$,其中正确的个数为( ).

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

3. 下列选项中,表述正确的是( ).

A. 由 1,3,5,7,5,3 组成的集合中有 6 个元素

B. 周长为 16 cm 的三角形组成的集合是有限集合

C. 集合$\{0\}$是空集

D. 阳光小学一(3)班的所有同学可以组成集合

4. 用列举法表示"大于 2 且小于 9 的偶数的全体"构成的集合是( ).

A. $\varnothing$　　B. $\{4,6,8\}$　　C. $\{3,5,7\}$　　D. $\{3,4,5,6,7,8\}$

5. 用列举法表示集合$\{x\mid x^2-3x+2=0\}$的结果是( ).

A. $(1,2)$　　B. 1,2　　C. $\{1,2\}$　　D. 以上都不是

6. 集合$\{1,2,3,4\}$所有子集的个数是( ).

A. 8　　B. 14　　C. 15　　D. 16

7. 若集合 $M=\{m,2-m\}$,则实数 m 需满足( ).

A. $m\neq2$　　B. $m\neq1$　　C. $m\neq-1$　　D. $m\neq-2$

8. 已知集合 $M=\{-1,0,m^2\}$,$N=\{-1,0,2m-1\}$,若 $M=N$,则实数 $m=$( ).

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. ±1

9. 设集合 $M=\{x\mid x\leqslant\sqrt{5}\}$,$a=2$,则下列关系正确的是( ).

A. $a\subseteq M$　　B. $a\nsubseteq M$　　C. $a\in M$　　D. $a\notin M$

10. 下列集合 M 与 N 表示同一个集合的是( ).

A. $M=\{(2,3)\}$,$N=\{2,3\}$　　B. $M=\{3.14\}$,$N=\{\pi\}$

C. $M=\{0\}$,$N=\varnothing$　　D. $M=\{0,1,2,3\}$,$N=\{x\in\mathbf{N}\mid x\leqslant3\}$

11. 方程组$\begin{cases}2x+y=0,\\x-y+3=0\end{cases}$的解集为(　　).

A. $\{-1,2\}$　　B. $(-2,2)$

C. $\{(-1,2)\}$　　D. $\{(x,y)\mid x=-1$ 或 $y=2\}$

12. 已知集合$A=\{1,3,t\}$，$B=\{t^2-t+1\}$，若$A\cup B=A$，则实数t的取值是(　　).

A. $t=1$　　B. $t=2,t=-1,t=0$

C. $t=2,t=\pm1$　　D. 不存在

13. 如果集合$A=\{x\mid ax^2+2x+1=0\}$中只有一个元素，那么a的值是(　　).

A. 0　　B. 0 或 1　　C. 1　　D. 不能确定

14. 设集合$A=\{x\mid |x|\leqslant4\}$，$B=\{x\mid x^2-10x+16<0\}$，则$A\cap B=$(　　).

A. $\{x\mid -4\leqslant x\leqslant 8\}$　　B. $\{x\mid 2<x\leqslant4\}$　　C. $\{x\mid -4<x<8\}$　　D. $\{x\mid 2\leqslant x<4\}$

15. 已知全集$U=\{x\mid x\leqslant4,x\in\mathbf{N}\}$，集合$A=\{x\mid x>2,x\in U\}$，则$\complement_U A=$(　　).

A. $\{1\}$　　B. $\{0\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{0,1,2\}$

16. 已知集合$\{1,2\}\cup A=\{1,2,3\}$，则符合条件的集合A的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

17. 设全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x\mid x>2\}$，$B=\{x\mid x<5\}$，则$A\cup B=$(　　).

A. $\{x\mid x>2\}$　　B. $\{x\mid x<5\}$　　C. $\{x\mid 2<x<5\}$　　D. $\mathbf{R}$

18. 如图 1-5 所示，阴影部分所表示的集合是(　　).

A. $(\complement_S A)\cap B$

B. $(\complement_S A)\cup B$

C. $(A\cup B)\cap\complement_S(A\cap B)$

D. $(A\cup B)\cup(\complement_S A)\cap B$

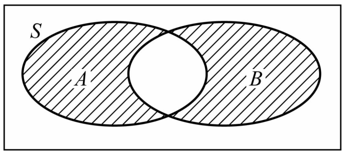


图 1-5

19. 设全集$U=\mathbf{N}^*$，集合$A=\{2,3,6,8,9\}$，集合$B=\{x\mid x>3,x\in\mathbf{N}^*\}$，则图 1-6 中阴影部分所表示的集合是(　　).

A. $\{2\}$

B. $\{2,3\}$

C. $\{1,2,3\}$

D. $\{6,8,9\}$

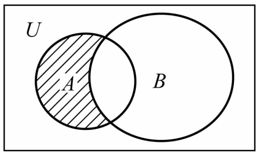


图 1-6

20. 设集合$M=\{0,1,2\}$，$N=\{1,2\}$，$P=\{0,2,3\}$，则$M\cap N\cap P=$(　　).

A. $\{0,2\}$　　B. $\{0,2,3\}$

C. $\{2\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

二、填空题

1. 用适当的符号($\in,\notin,\subseteq,\supseteq,=$)填空.

(1)3 ________ $\{2,3\}$；　(2)π ________ $\mathbf{Q}$；　(3)$\{1,2,3\}$ ________ $\mathbf{Z}$；

(4)$\mathbf{N}^*$ ________ $\mathbf{Z}$；　(5)$\{-3,3\}$ ________ $\{x\mid x^2=9\}$.

2. 已知集合$P=\{x\mid 2<x<a,x\in\mathbf{N}\}$，且集合$P$中恰有 3 个元素，则整数$a=$________.

3. 绝对值等于 1 的所有整数组成的集合是________.

4. 下列六个关系式：①$\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$；②$\{a,b\}=\{b,a\}$；③$0=\varnothing$；④$0\in\{0\}$；⑤$\varnothing\in\{0\}$；⑥$\varnothing\subseteq\{0\}$. 其中正确的个数为________.

三、解答题

1. 写出集合$\{-3,-1,1,3\}$的所有子集，并指出哪些是真子集.

2. 已知集合$A=\{0,1,2\}$，集合$B=\{x|x=ab,a\in A,b\in A\}$.

(1)用列举法写出集合B；

(2)判断集合B和集合A的关系.

3. 已知集合$\{1,a,b\}$与$\{-1,-b,1\}$是同一个集合，求实数a,b的值.

4. 设全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x|x^2-x-2=0\}$，$B=\{x||x|=y+1,y\in A\}$，求$\complement_U B$.

提升进阶

1. 满足$\{a,b\}\subsetneqq A\subseteq\{a,b,c,d,e\}$的集合$A$的个数是(　　).

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

2. 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中只有一个元素,求 a 的值;

(2)若 A 中恰有两个元素,求 a 的取值范围;

(3)若 A 中最多只有一个元素,求 a 的取值范围.

3. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x|ax+2=0\}$,且 $B\subseteq A$,求实数 a 的值组成的集合.

第二节 充分必要条件

知识清单

知识点一 命题的定义

在数学中,我们把用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫作命题.正确的命题叫作真命题,记作 T;错误的命题叫作假命题,记作 F. T 和 F 称为命题的真值(有的书上用 0 和 1 作为命题的真值). p 与 q 为等值的命题记作 $p=q$.

知识点二 充要条件

1. 充要条件的定义

(1)对于两个命题 p,q,如果有 $p\Rightarrow q$,则称 p 是 q 的充分条件,q 是 p 的必要条件.

注意:p是q的充分条件,是指只要具备了条件p,那么q就一定成立,即命题中的条件是充分的;q是p的必要条件,是指如果不具备条件q,则p就不能成立,即q是p成立的必不可少的条件.

(2)如果$p\Rightarrow q$且$q\Rightarrow p$,即$p=q$,则p是q的充分且必要条件,简称充要条件.

注意:①当$p\Leftrightarrow q$时,也称p与q是等价的.

②与充要条件等价的词语有"当且仅当""等价于""有且只有"……"反过来也成立"等.

2. 充要条件的判断方法

(1)从逻辑推理关系上判断(定义法).

①若$p\Rightarrow q$但$q\nRightarrow p$,则p是q的充分不必要条件.

②若$p\nRightarrow q$但$q\Rightarrow p$,则p是q的必要不充分条件.

③若$p\Rightarrow q$且$q\Rightarrow p$,则p是q的充要条件.

④若$p\nRightarrow q$且$q\nRightarrow p$,则p是q的既不充分也不必要条件.

(2)从命题所对应的集合与集合之间的关系上判断(集合法).

设命题p对应的集合为A,命题q对应的集合为B.

①若$A\subseteq B$,则p是q的充分条件.

②若$A\supseteq B$,则p是q的必要条件.

③若$A\subseteq B$且$A\supseteq B$,即$A=B$,则p是q的充要条件.

④若$A\nsubseteq B$且$A\nsupseteq B$,则p是q的既不充分也不必要条件.

典例精析

视频 例1

例1 已知p:$|3x-5|<4$,q:$(x-1)(x-2)<0$,则p是q的( ).

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

解析 p:$|3x-5|<4\Rightarrow p$:$\frac{1}{3}<x<3$,q:$(x-1)(x-2)<0\Rightarrow q$:$1<x<2$.所以$p\nRightarrow q$但$q\Rightarrow p$,所以$p$是$q$的必要不充分条件.故选B.

技巧点拨 判断充分、必要条件时,要先分清条件和结论,进而找到条件与结论之间的逻辑推理关系.常用的判断法:定义法和集合法.

例2 已知集合$A=\left\{y\,\middle|\,y=x^2-\frac{3}{2}x+1,x\in\left[\frac{3}{4},2\right]\right\}$,$B=\{x\mid x+m^2\geqslant 1\}$,$p$:$x\in A$,$q$:$x\in B$,并且$p$是$q$的充分条件,求实数$m$的取值范围.

解析 由题意得集合$A=\left[\frac{7}{16},2\right]$,$B=[1-m^2,+\infty)$,由于$p$是$q$的充分条件,所以$A\subseteq B$,所以$1-m^2\leqslant\frac{7}{16}$,解得$m\geqslant\frac{3}{4}$或$m\leqslant-\frac{3}{4}$,即实数$m$的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

技巧点拨 本题主要考查集合的运算及充要条件的判断,运用集合之间的关系建立不等式是解题的关键.

巩固练习

基础实战

一、选择题

1. "$A\cap B=A$"是"$A\subseteq B$"的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. "$x<-2$"是"不等式 $x^2-4>0$ 成立"的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. "$|x|\geqslant 1$"是"$x\geqslant 1$"的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 设甲是乙的充分不必要条件，乙是丙的充要条件，丁是丙的必要不充分条件，则甲是丁的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. "$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$"是"$\tan\alpha=1$"的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

二、解答题

1. 判断下列问题中，p 是 q 的什么条件.

(1) p：$x^2\geqslant y^2$，q：$x\geqslant y$；

(2) p：$x\in A\cup B$，q：$x\in A\cap B$；

(3) p：$x>3$，q：$x>2$；

(4) p：a 是有理数，q：$a+2$ 是有理数.

2. 求一个对于一切实数 x 都有 $ax^2-ax+1>0$ 成立的充要条件.

提升进阶

已知 p:$-2\leqslant x\leqslant 10$,$q$:$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$,若 p 是 q 的充分不必要条件,求实数 m 的取值范围.

真题在线

1. **(2020·江西省“三校生”对口升学)** 已知集合 $A=\{x|x>-1\}$,则 $\{0\}\in A$. (A B)

2. **(2019·江西省“三校生”对口升学)** 已知集合 $A=\{x|0<x<2\}$,$B=\{x|1<x<3\}$,则 $A\cup B=\{x|0<x<3\}$. (A B)

3. **(2018·江西省“三校生”对口升学)** 已知集合 $A=\{x|x-2\geqslant 0\}$,$B=\{3,4,5\}$,则 $B\subseteq A$. (A B)

4. **(2017·江西省“三校生”对口升学)** 若集合 $A=\{x|x=2k,k\in \mathbf{Z}\}$,$B=\{1,2,4\}$,则 $B\subseteq A$. (A B)

5. **(2016·江西省“三校生”对口升学)** 若集合 $A=\{0,1,2\}$,$B=\{0,2,4\}$,则 $A\cap B=\{2\}$. (A B)

6. **(2020·江西省“三校生”对口升学)** 已知直线 a,b 分别在平面 α,β 内,则“直线 a 和 b 相交”是“平面 α 和 β 相交”的( ).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. (2019・江西省“三校生”对口升学)已知 $a,b\in\mathbf{R}$,则 $a>b$ 是 $\lg a>\lg b$ 的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. (2018・江西省“三校生”对口升学)如图 1-7 所示,集合 $U=\{1,2,3,4\}$,$A=\{1,3\}$,$B=\{1,2\}$,则图中阴影部分所表示的集合是(　　).

A. $\{1,2\}$

B. $\{2\}$

C. $\{2,4\}$

D. $\{4\}$

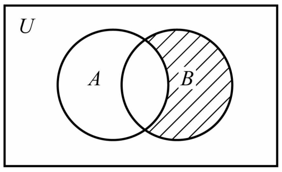


图 1-7

9. (2018・江西省“三校生”对口升学)若 $1\leqslant x\leqslant 2$ 是 $x\geqslant m$ 的充分不必要条件,则实数 m 的取值范围是(　　).

A. $(2,+\infty)$　　B. $[2,+\infty)$

C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,1]$

10. (2016・江西省“三校生”对口升学)已知集合 $A=\{y|y=\sin x\}$,那么(　　).

A. $2\in A$　　B. $1\in A$　　C. $A=\varnothing$　　D. $-1\notin A$

11. (2017・江西省“三校生”对口升学)已知全集 $U=\mathbf{N}^*$,集合 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{3,4,5,6\}$,则 $(\complement_U A)\cap B=$__________.

第二章

不等式

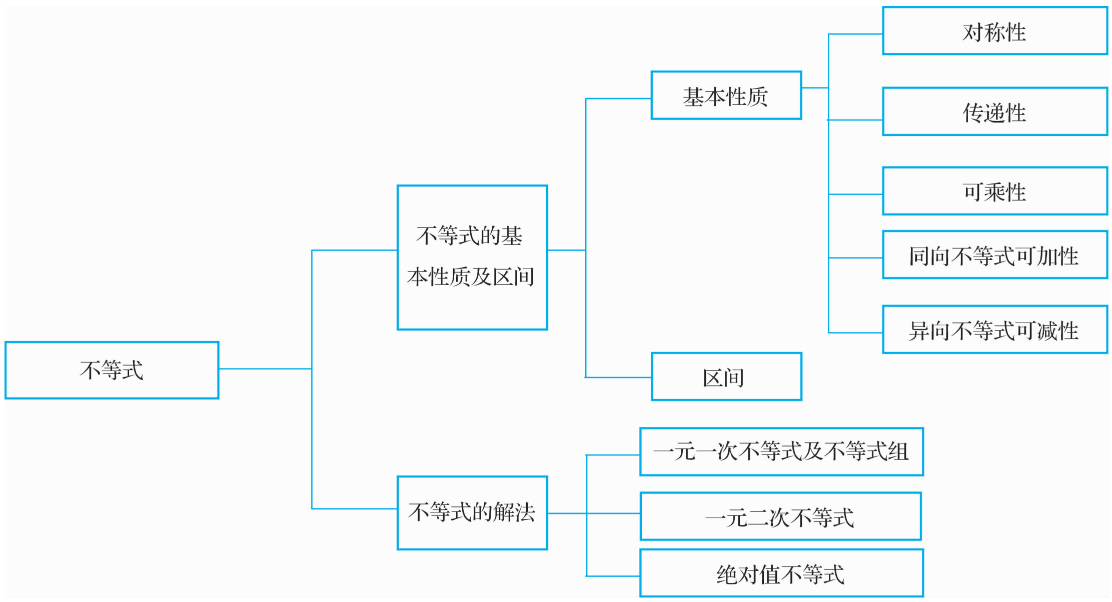
考纲要求

1. 理解不等式的基本性质,会用区间表示不等式的解集.
2. 掌握一元一次不等式、一元一次不等式组及一元二次不等式的解法.
3. 会解形如$|ax+b|<c$(或$>c$)的绝对值不等式.

命题探究

	考点	近几年常考题型及分值				
		2016 年	2017 年	2018 年	2019 年	2020 年
命题规律	不等式的基本性质	是非选择题,3 分 单项选择题,5 分	是非选择题,3 分	是非选择题,3 分	是非选择题,6 分	是非选择题,3 分
	有理不等式的解法	填空题,5 分	单项选择题,5 分 填空题,5 分	单项选择题,5 分 填空题,5 分	单项选择题,5 分	填空题,5 分
命题趋势	本章内容在历年真题中多以是非选择题、单项选择题和填空题的形式出现,其分值比例约占 8%.不等式主要从两个方面进行考查:一是考查不等式的基本性质;二是考查一元一次不等式组、一元二次不等式、一元一次绝对值不等式的解法,会用集合、区间表示不等式的解集					

知识结构



第一节 不等式的基本性质

知识清单

知识点一 不等式的基本性质

1. 不等式的定义

表示不等关系的式子叫作不等式,满足不等式的未知数的取值的集合叫作不等式的解集.

2. 不等式的基本性质

(1)对称性:$a>b \Leftrightarrow b<a$.

(2)传递性:$a>b, b>c \Rightarrow a>c$.

(3)加法法则:$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$.

推论:$a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$.(同向不等式可加性)

推论:$a>b, c<d \Rightarrow a-c>b-d$.(异向不等式可减性)

(4)乘法法则:$a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$;$a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$.

推论:$a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$.

推论:$a>b, ab>0 \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(5)乘方法则:$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$($n \in \mathbf{N}$ 且 $n \geqslant 1$).

(6)开方法则：$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$($n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant2$).

知识点二 不等式的证明

1. 作差比较法

对于任意两个实数 a,b.

(1)$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；

(2)$a-b=0\Leftrightarrow a=b$；

(3)$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

2. 作商比较法

对于任意两个实数 a,b.

(1)$\frac{a}{b}>1,b>0\Rightarrow a>b$；

(2)$\frac{a}{b}<1,b>0\Rightarrow a<b$.

3. 综合法

综合法是指利用某些已知的不等式和不等式的性质，结合已知条件证明不等式的方法. 常用的不等式如下：

(1)$(a-b)^2\geqslant0$(当且仅当 $a=b$ 时取等号)；

(2)如果 $a>0,b>0$，则$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当 $a=b$ 时取等号)；

(3)如果 $ab>0$，则$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant2$.

知识点三 区间

1. 有限区间

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，则：

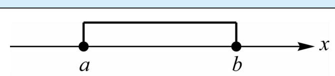
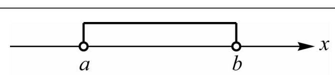
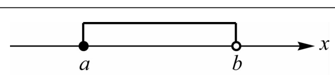
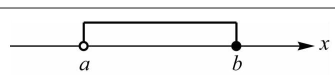
(1)满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫作闭区间，表示为$[a,b]$.

(2)满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫作开区间，表示为(a,b).

(3)满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫作半开半闭区间，分别表示为$[a,b)$和$(a,b]$.

在数轴上，这些区间都可以用一条以 a 和 b 为端点的线段来表示，用实心点表示区间端点在内的端点，用空心点表示不包括区间端点在内的端点，见表 2-1.

表 2-1

定　义	名　称	符　号	数轴表示
$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a,b]$	
$\{x\mid a<x<b\}$	开区间	(a,b)	
$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	左闭右开区间	$[a,b)$	
$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	左开右闭区间	$(a,b]$	

2. 无限区间

集合$\{x|x>2\}$表示的区间的左端点为2，不存在右端点，表示右端点任意大，记作$(2,+\infty)$，其中符号“$+\infty$”读作“正无穷大”；类似地，集合$\{x|x<2\}$表示的区间用$(-\infty,2)$表示，其中符号“$-\infty$”读作“负无穷大”.

设$a,b\in\mathbf{R}$，则：

(1)集合$\{x|x<b\}\Leftrightarrow$区间$(-\infty,b)$.

(2)集合$\{x|x\leqslant b\}\Leftrightarrow$区间$(-\infty,b]$.

(3)集合$\{x|x>a\}\Leftrightarrow$区间$(a,+\infty)$.

(4)集合$\{x|x\geqslant a\}\Leftrightarrow$区间$[a,+\infty)$.

(5)集合$\mathbf{R}\Leftrightarrow$区间$(-\infty,+\infty)$.

典例精析

例1 试比较$2x^2-3x+7$与x^2+x+2的大小.

解析 (作差比较法)$2x^2-3x+7-(x^2+x+2)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$.

因此$2x^2-3x+7>x^2+x+2$.

技巧点拨 本题考查比较代数式大小的方法.作差比较法是判断两个数(或代数式)大小的基本方法之一，在比较代数式大小的时候要注意变量的取值范围.

例2 下列命题中，正确的是(　　).

A. 若$a>b$，则$ac>bc$　　B. 若$a>b$且$c>d$，则$a+d>b+c$

C. 若$ac^2>bc^2$，则$a>b$　　D. 若$a>b$且$c>d$，则$ac>bd$

视频
例2

解析 对于本题选项A，若$c=0$，则$ac=bc=0$，选项A不成立；对于选项B和选项D，可以通过特殊值来判断，令$a=0,b=-1,c=-2,d=-3$，可排除选项B和D.故选C.

技巧点拨 解答此类题目，要注意不等式性质的正确应用，同时也要考虑其他知识.另外也可以用特殊值法来判断.

例3 已知$6<a<10$，$2<b<3$，求$a+b,a-b,ab,\dfrac{a}{b}$的取值范围.

解析 对于$a+b,ab$的取值范围，可直接利用不等式的同向可加性和同向可乘性求得.对于$a-b$和$\dfrac{a}{b}$的取值范围，应先求出$-b$和$\dfrac{1}{b}$的取值范围.

根据不等式的同向可加性可知$8<a+b<13$.

根据不等式的同向可乘性可知$12<ab<30$.

因为$2<b<3$，所以$-3<-b<-2$.又因为$6<a<10$，所以$6-3<a-b<10-2$，即$3<a-b<8$.

因为$\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{6}{3}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{10}{2}$，即$2<\dfrac{a}{b}<5$.

技巧点拨 利用不等式的性质求取值范围时一定要熟练掌握不等式的性质，特别是同向可加性和同向可乘性.

巩固练习

基础实战

一、选择题

1. 设 $x\neq 0$，则 $(x^2+1)^2$ 与 x^4+x^2+1 的大小关系是（　　）.

A. $(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$　　B. $(x^2+1)^2<x^4+x^2+1$

C. $(x^2+1)^2=x^4+x^2+1$　　D. 不能确定

2. 若 $a>b$，则下列式子中正确的是（　　）.

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C. $a^2>b^2$　　D. $b-2<a-1$

3. 如果 $a>b>0$，则（　　）.

A. $ac>bc$　　B. $-2b<-2a$　　C. $a^2>b^2$　　D. 以上均不对

4. 下列命题中正确的是（　　）.

A. $a>b,c>d\Rightarrow ac>bd$　　B. $ac<bc\Rightarrow a<b$

C. $a>b\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N})$　　D. $a>b>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

5. 若 $\frac{2a+3}{5}$ 不小于 $\frac{a+2}{3}$，则实数 a 的取值范围是（　　）.

A. $[1,+\infty)$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-1,+\infty)$

二、填空题

1. 若 $a<-2a$，则 a ________ 0；若 $a>2a$，则 a ________ 0.

2. 若 $a>b>0,c+1<0$，则 ac ________ bc，ac^2 ________ bc^2.

3. 比较大小：$\frac{7}{9}$ ________ $\frac{7}{11}$，$\frac{5}{8}$ ________ $\frac{8}{11}$，a^2 ________ 0.

三、解答题

1. 试比较 $2a^2-2a+6$ 与 a^2+2a+1 的大小.

2. 已知 $a>0$，比较 $\frac{a}{a+1}$ 与 $\frac{a+1}{a+2}$ 的大小.

3. 已知 $x<0$，求 $x+\frac{2}{x}$ 的最大值.

4. 已知 $(x-1)^2+|y+3|=0$，求 x，y 的值.

5. 某种商品的进价为 800 元，出售时标价为 1 200 元，后来由于该商品积压，商店准备打折出售，但要保持利润不低于 5%，则最多可打几折出售？

提升进阶

1. 如果 $m<n$，$m\neq0$，$n\neq0$，那么（　　）.

A. $\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$

B. $\frac{1}{m}=\frac{1}{n}$

C. $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$

D. $\frac{1}{m}$ 和 $\frac{1}{n}$ 的大小不能确定

2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=[-2,5)$，$B=(-\infty,3)$. 求：

(1) $\complement_U A$，$\complement_U B$；　(2) $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$；　(3) $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

3. 要修建一个面积为 1 800 m^2 的矩形鱼池，并在长的方向上修出宽为 2 m，宽的方向上修出宽为 1 m 的小路，那么占地面积最少需要多少？

第二节 不等式的解法

知识清单

知识点一 一元一次不等式的解法

1. 一元一次不等式

经过去分母、去括号、移项、合并同类项等变形后，能化为 $ax<b$ 或 $ax>b$ 或 $ax\leqslant b$ 或 $ax\geqslant b$ 的形式，其中 x 是未知数，a，b 是已知数，并且 $a\neq 0$，这样的不等式叫作一元一次不等式.

$ax<b$ 或 $ax>b$ 或 $ax\leqslant b$ 或 $ax\geqslant b(a\neq 0)$ 叫作一元一次不等式的标准形式.

2. 解一元一次不等式

去分母→去括号→移项→合并同类项(化成 $ax<(\leqslant)b$ 或 $ax>(\geqslant)b$ 的形式)→系数化为1(化成 $x>(\geqslant)\dfrac{b}{a}$ 或 $x<(\leqslant)\dfrac{b}{a}$ 的形式).

一般地，几个一元一次不等式的解集的公共部分叫作由它们组成的一元一次不等式组的解集.

解一元一次不等式组的一般步骤如下：

(1)求出这个不等式组中各个不等式的解集.

(2)利用数轴求出这些不等式的解集的公共部分，即可求出这个不等式组的解集.

注意：

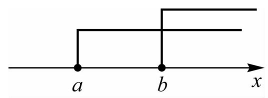
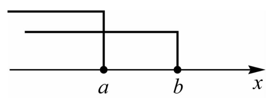
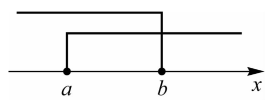
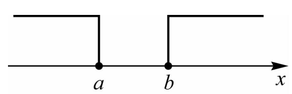
(1)利用数轴表示不等式的解集时，要注意表示数的点的位置上是空心圆圈，还是实心圆点.

(2)若不等式组中各个不等式的解集没有公共部分，则这个不等式组无解.

3. 由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集的情况

由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集的情况见表 2-2.

表 2-2

不等式组（$a<b$）	图　示	解　集	口　诀
$\begin{cases}x\geqslant a\\x\geqslant b\end{cases}$		$x\geqslant b$	同大取大
$\begin{cases}x\leqslant a\\x\leqslant b\end{cases}$		$x\leqslant a$	同小取小
$\begin{cases}x\geqslant a\\x\leqslant b\end{cases}$		$a\leqslant x\leqslant b$	大小、小大中间找
$\begin{cases}x\leqslant a\\x\geqslant b\end{cases}$		空集	小小、大大找不到

知识点二　一元二次不等式的解法

1. 一元二次不等式的定义

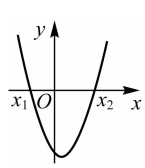
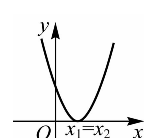
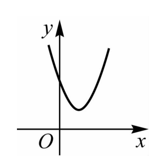
只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式，叫作一元二次不等式. 例如，$x^2-5x<0$. 任意的一元二次不等式总可以化为一般形式：$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$.

2. 一般一元二次不等式的解法

一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a\neq0)$ 的解集可以联系二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图像，图像在 x 轴上方部分对应的横坐标 x 值的集合为不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集，图像在 x 轴下方部分对应的横坐标 x 值的集合为不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集.

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根为 x_1,x_2，且 $x_1\leqslant x_2$，$\Delta=b^2-4ac$，则相应的不等式的解集的各种情况见表 2-3.

表 2-3

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像			
$ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	有两个相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两个相等实根 $x_1,x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无实根

续表

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\left\{x\,\middle\vert\, x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$	**R**
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

注意：

(1)一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根 x_1,x_2 是相应的一元二次不等式的解集的端点取值，是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点的横坐标.

(2)表 2-3 中不等式的二次项系数均为正，如果不等式的二次项系数为负，应先利用不等式的性质将其转化为二次项系数为正的形式，然后再讨论解决.

3. 解一元二次不等式的步骤

(1)看二次项系数是否为正，若为负，则将二次项系数化为正数.

(2)写出相应的方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$，计算判别式 Δ.

①当 $\Delta>0$ 时，求出两根 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$(注意灵活运用因式分解法和配方法).

②当 $\Delta=0$ 时，两根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

③当 $\Delta<0$ 时，方程无解.

(3)根据不等式，写出解集.

知识点三 简单分式不等式的解法

解分式不等式的基本思想是将分式不等式化为整式不等式. 在解分式不等式时，通过恒等变形，先将其化为 $f(x)g(x)>0$ 或 $f(x)g(x)<0$ 的形式，再利用商的符号法则将其转化为整式不等式来求解，即 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)g(x)<0$.

对于 $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant0(\leqslant0)$ 型的分式不等式，将其化为整式不等式后，应注意分子可取零，而分母不能为零.

知识点四 含绝对值不等式的求解

1. 绝对值的定义

(1)代数意义：一个数的绝对值是非负数，即 $|a|=\begin{cases}a,a\geqslant0,\\-a,a<0.\end{cases}$

(2)几何意义：一个数的绝对值 $|a|$ 表示这个数 a 在数轴上对应的点到原点的距离.

2. 含绝对值不等式的解法

解含绝对值不等式的关键在于去掉绝对值符号，而去掉绝对值符号的常用方法有以下几种：

(1)根据绝对值的定义：$|a|=\begin{cases}a,a\geqslant0,\\-a,a<0.\end{cases}$

(2)零点分段讨论法：通常用于解含有两个或两个以上的绝对值符号的不等式.

(3)利用不等式的性质：$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$；$|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$.

(4)两边平方法：$|f(x)|<a(a>0)\Leftrightarrow f^2(x)<a^2$；$|f(x)|>a(a>0)\Leftrightarrow f^2(x)>a^2$.

知识点五 指数不等式和对数不等式

利用同解变形解指数不等式和对数不等式.

(1)若 $0<a<1$，则 $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$.

(2)若 $a>1$，则 $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$.

(3)若 $0<a<1$，则 $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<g(x),\\f(x)>0,\\g(x)>0.\end{cases}$

(4)若 $a>1$，则 $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>g(x),\\f(x)>0,\\g(x)>0.\end{cases}$

典例精析

例 1 一元一次不等式 $3x+9>0$ 的解集是(　　).

A. $\{x|x\geqslant 3\}$　　B. $\{x|x\geqslant -3\}$　　C. $\{x|x>-3\}$　　D. $\{x|x<-3\}$

解析 整理后为 $x>-3$. 故选 C.

技巧点拨 不等式移项时正、负号要改变.

例 2 解不等式组：$\begin{cases}x+2\leqslant 0,\\x-3<0.\end{cases}$

解析 考查不等式的性质，由题意可得 $\begin{cases}x\leqslant -2,\\x<3,\end{cases}$ 即 $x\leqslant -2$，所以不等式组的解集为 $\{x|x\leqslant -2\}$.

技巧点拨 掌握不等式“同小取小”的口诀.

例 3 求下列含绝对值不等式的解集.

(1)$|2x-1|\leqslant 5$；　　(2)$3|1-x|>12$；　　(3)$|x|+3<0$.

解析 (1)$|2x-1|\leqslant 5\Leftrightarrow -5\leqslant 2x-1\leqslant 5$，即 $-2\leqslant x\leqslant 3$，所以原不等式的解集为 $[-2,3]$.

(2)$3|1-x|>12\Leftrightarrow |1-x|>4\Leftrightarrow 1-x<-4$ 或 $1-x>4$，即 $x>5$ 或 $x<-3$，所以原不等式的解集为 $(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$.

(3)由 $|x|+3<0$ 得 $|x|<-3$，与绝对值为非负值矛盾，所以原不等式的解集为 $\varnothing$.

技巧点拨 首先判断所给不等式是否为标准形式的绝对值不等式，其次将含绝对值的不等式等价转化为一元一次不等式(组)，最后求解.

例 4 解不等式组：$\begin{cases}|2x+3|\leqslant 5,\\x^2-3>2x.\end{cases}$

解析 由不等式 $|2x+3|\leqslant 5$ 得 $-5\leqslant 2x+3\leqslant 5$，即 $-4\leqslant x\leqslant 1$.

由不等式 $x^2-3>2x$ 得 $x^2-2x-3>0\Leftrightarrow(x+1)(x-3)>0$，即 $x<-1$ 或 $x>3$.

可列不等式组 $\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 1,\\ x<-1 \text{ 或 } x>3,\end{cases}$ 最终可求交集得原不等式组的解集为 $[-4,-1)$.

技巧点拨 先分别求绝对值不等式和一元二次不等式的解集，再求两个不等式解集的交集.

视频
例 4

例 5 解不等式 $x^2-x-12<0$.

解析 原不等式可化为 $(x-4)(x+3)<0$，解得 $-3<x<4$，所以原不等式的解集是 $\{x|-3<x<4\}$.

技巧点拨 在解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 时，可以运用十字相乘法分解因式，提高计算能力与速度.

巩固练习

基础实战

一、选择题

1. 不等式 $x^2+2x+3>0$ 的解集为(　　).

A. $(-3,-1)$　　B. $(1,3)$　　C. $\mathbf{R}$　　D. $\varnothing$

2. 不等式 $|x+2|<3$ 的解集是(　　).

A. $\{x|x<-5$ 或 $x>1\}$　　B. $\{x|x>1\}$

C. $\{x|x<-5\}$　　D. $\{x|-5<x<1\}$

3. 不等式 $3|x-2|\leqslant 9$ 的解集为(　　).

A. $(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$　　B. $[-1,5]$

C. $[5,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1]$

4. 在数轴上与原点距离不大于 3 的点的坐标的集合是(　　).

A. $\{x|x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 3\}$　　B. $\{x|-3\leqslant x\leqslant 3\}$

C. $\{x|x\leqslant -3\}$　　D. $\{x|x\geqslant 3\}$

5. 不等式 $|x+1|+2>0$ 的解集是(　　).

A. $\mathbf{R}$　　B. $\varnothing$　　C. $(-1,+\infty)$　　D. $(-1,0)$

6. 不等式 $|3x-1|\geqslant 5$ 的解集为(　　).

A. $\left(-\infty,-\dfrac{4}{3}\right]$　　B. $[2,+\infty)$

C. $\left(-\infty,-\dfrac{4}{3}\right]\cup[2,+\infty)$　　D. $\left[-\dfrac{4}{3},2\right]$

7. 不等式 $|2x-3|\leqslant 1$ 的整数解的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 不等式 $2|2x+1|-3\leqslant 7$ 的解集为(　　).

A. $(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$　　B. $[2,+\infty)$

C. $(-\infty,-3]$　　D. $[-3,2]$

9. 不等式$|x-a|<1$的解集为(　　).

A. $\{x|-1+a<x<1+a\}$

B. $\{x|-1-a<x<1-a\}$

C. $\{x|-1-|a|<x<1-|a|\}$

D. $\{x|x<-1+a$ 或 $x>1+a\}$

10. 已知关于x的不等式$x^2-ax+a>0$的解集为实数集$\mathbf{R}$,则a的取值范围是(　　).

A. $(0,4)$

B. $[2,+\infty)$

C. $[0,2)$

D. $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$

二、填空题

1. 不等式$|1-3x|<2$的解集为____________.

2. 不等式$|2x+3|-7>0$的解集是____________.

3. 已知集合$A=\{x||x-1|<3\}$,$B=\{x||x+2|\geqslant5\}$,则$A\cap B=$____________.

4. 设不等式$|x-b|<a(a>0)$的解集为$(-1,2)$,则$a+b$的值为____________.

三、解答题

1. 求不等式$|1-4x|\leqslant7$的解集.

2. 解不等式组:$\begin{cases}|x+2|\leqslant5,\\x^2-4x-5<0.\end{cases}$

3. 求不等式$1<|2x-1|\leqslant3$的解集.

4. 求不等式$1-x<2x-1<x+1$的解集.(用区间表示)

5. 解不等式 $\frac{7-2x}{3}+3>\frac{3x+8}{4}-x$，并把解集在数轴上表示出来.

提升进阶

1. 若关于 x 的不等式 $|x+a|<1$ 的解集是 $\{x|1<x<3\}$，求实数 a 的值.

2. 已知集合 $A=\{x||x-1|<2\}$，$B=\{x|x-a>0\}$，且 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

3. 已知不等式 $kx^2+kx-2>0$ 的解集是空集，求实数 k 的取值范围.

4. 已知不等式 $x^2+ax+b<0$ 的解集是 $\{x|2<x<3\}$，求实数 a，b 的值.

真题在线

1. (2020·江西省"三校生"对口升学)若 $0<a<b<1$，则 $a^2>b^2$. (A　B)

2. (2019·江西省"三校生"对口升学)若 $a<b<0$ 则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. (A　B)

3. (2019·江西省"三校生"对口升学)不等式组 $\begin{cases} x^2-2x-3<0 \\ 2x\geqslant 4-2x \end{cases}$ 的解集为 $[1,3)$. (A　B)

4. (2018·江西省"三校生"对口升学)已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$. (A　B)

5. (2017·江西省"三校生"对口升学)已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，若 $a>b>c$，则 $(a-c)^2>(b-c)^2$.
(A　B)

6. (2016·江西省"三校生"对口升学)不等式 $x^2<1$ 的解集为 $\{x|x<1\}$. (A　B)

7. (2019·江西省"三校生"对口升学)不等式 $|2x-5|<7$ 的解集为(　　).

A. $\{x|x>-1\}$　　B. $\{x|x<6\}$

C. $\{x|-1<x<6\}$　　D. $\{x|x>6$ 或 $x<-1\}$

8. (2018·江西省"三校生"对口升学)不等式 $6x^2-5x+1<0$ 的解集为(　　).

A. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

9. (2017·江西省"三校生"对口升学)不等式 $3-x>2x-6$ 的解集为(　　).

A. $(-3,+\infty)$　B. $(-\infty,-3)$　C. $(3,+\infty)$　D. $(-\infty,3)$

10. (2016·江西省"三校生"对口升学)若实数 a,b,c,d 满足 $a>b>0$，$c>d$，则下列命题正确的是(　　).

A. $ac>bc$　B. $c^3>d^3$　C. $a-c>b-d$　D. $\frac{1}{c}<\frac{1}{d}$

11. (2020·江西省"三校生"对口升学)不等式 $|3x-2|>1$ 的解集为________.

12. (2018·江西省"三校生"对口升学)满足不等式 $|3x-2|<4$ 的正整数 $x=$________.

13. (2017·江西省"三校生"对口升学)不等式 $|4x-2|<3$ 的解集为________.

14. (2016·江西省"三校生"对口升学)不等式 $|3x-8|<2$ 的整数解为 $x=$________.

数学总复习

参考答案及解析

目　　录

第一章　集合与充要条件

第一节　集合的基本概念与基本运算

【巩固练习】

基础实战

一、选择题

1. D　**解析**:“好”“非常小”“有趣”都是不确定的.故选 D.

2. A　**解析**:正确理解符号$\in$,$\notin$,$\subseteq$,$\supseteq$的意义.

3. D　**解析**:掌握集合的概念及其特征.

4. B

5. C　**解析**:掌握集合的两种表示方法.

6. D　**解析**:由 n 个元素组成的集合的子集的个数是 2^n.

7. B　**解析**:根据集合中元素的互异性可得 $m\neq 2-m$,解得 $m\neq 1$.

8. B　**解析**:根据集合的概念可得 $m^2=2m-1$,解得 $m=1$.

9. C　**解析**:因为 $2<\sqrt{5}$,所以 2 是集合 M 中的一个元素.

10. D

11. C　**解析**:根据题意,解方程组得$\begin{cases}x=-1,\\y=2,\end{cases}$所以此方程组的解集是$\{(-1,2)\}$.

12. B　**解析**:根据题意,分为三种情况.第一种情况:$t^2-t+1=1$,解得 $t=0$ 或 $t=1$(舍去);第二种情况:$t^2-t+1=3$,解得 $t=2$ 或 $t=-1$;第三种情况:$t^2-t+1=t$,解得 $t=1$(舍去),综上所述,t 的值是$-1,0,2$.

13. B　**解析**:若 $a=0$,则式子是一元一次方程,集合 A 中只有一个元素;若 $a\neq 0$,则式子是一元二次方程,集合 A 中只有一个元素,利用“$\Delta=2\times2-4\times a\times1=0$”求解,解得 $a=1$.

14. B　**解析**:集合 $A=\{x\mid -4\leqslant x\leqslant 4\}$,$B=\{x\mid 2<x<8\}$,所以 $A\cap B=\{x\mid 2<x\leqslant 4\}$.

15. D　**解析**:掌握集合与集合的运算关系.

16. D　**解析**:集合 A 中一定含有元素 3,其他 2 个元素自由组合,所以符合条件的集合 A 的个数是 4.

17. D　**解析**:集合 A 和集合 B 的并集是全集 $\mathbf{R}$.

18. C

19. B　**解析**:因为集合 B 表示的是大于 3 的正整数集,所以 $A\cap B=\{6,8,9\}$,所以阴影部分所表示的集合为 $A\cap \complement_U(A\cap B)=\{2,3\}$.故选 B.

20. C　**解析**:求 3 个集合的交集就是选择 3 个集合共有的元素.故选 C.

二、填空题

1. (1)$\in$;(2)$\notin$;(3)$\subseteq$;(4)$\subseteq$;(5)$=$

2. 6　**解析**:根据集合元素的特征可知集合 $P=\{3,4,5\}$,所以 $a=6$.

3. $\{-1,1\}$

4. 4　**解析**:①②④⑥正确.

三、解答题

1. **解**:子集:$\varnothing$,$\{-3\}$,$\{-1\}$,$\{1\}$,$\{3\}$,$\{-3,-1\}$,$\{-3,1\}$,$\{-3,3\}$,$\{-1,1\}$,$\{-1,3\}$,$\{1,3\}$,$\{-3,-1,1\}$,$\{-3,-1,3\}$,$\{-1,1,3\}$,$\{-3,1,3\}$,$\{-3,-1,1,3\}$;

真子集: $\varnothing$,$\{-3\}$,$\{-1\}$,$\{1\}$,$\{3\}$,$\{-3,-1\}$,$\{-3,1\}$,$\{-3,3\}$,$\{-1,1\}$,$\{-1,3\}$,$\{1,3\}$,$\{-3,-1,1\}$,$\{-3,-1,3\}$,$\{-1,1,3\}$,$\{-3,1,3\}$.

2. **解**:(1)$B=\{0,1,2,4\}$.

(2)因为集合 A 中的元素都在集合 B 中且 $A\neq B$,所以 $A\subsetneqq B$.

3. **解**:因为集合$\{1,a,b\}$与$\{-1,-b,1\}$是同一个集合,

所以有$\begin{cases}a=-1,\\b=-b\end{cases}$或$\begin{cases}a=-b,\\b=-1.\end{cases}$

若$a=-1,b=-b=0$,符合题意.

若$a=-b,b=-1$,则$a=1$,不符合题意,舍去.

综上所述,$a=-1,b=0$.

4. **解**:因为集合$A=\{x\mid x^2-x-2=0\}=\{-1,2\}$,$y\in A$,所以在集合$B$中,当$y=-1$时,$x=0$;当$y=2$时,$x=\pm3$,所以集合$B=\{-3,0,3\}$.所以$\complement_U B=\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq-3$且$x\neq0$且$x\neq3\}$.

提升进阶

1. C **解析**:确定集合A中元素的组成情况即可.由已知得集合A必含a,b,且至少有一个不同于a,b的元素,符合条件的集合共有7个.

2. **解**:(1)若集合A中只有一个元素,分两种情况讨论:

当$a=0$时,集合$A=\{x\mid 2x+1=0\}=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

当$a\neq0$时,则$ax^2+2x+1=0$有两个相等的根,即$\Delta=4-4a=0$,解得$a=1$.

所以当$a=0$或$a=1$时,集合A中只有一个元素.

(2)若集合A中恰有两个元素,则$ax^2+2x+1=0$有两个不相等的根,即$\begin{cases}a\neq0,\\\Delta=4-4a>0,\end{cases}$解得$a<1$且$a\neq0$.所以当$a<1$且$a\neq0$时,集合$A$中恰有两个元素.

(3)“若集合A中最多只有一个元素”包含两种情况:集合A中只有一个元素或集合A为$\varnothing$.

由(1)可知当$a=0$或$a=1$时,集合A中只有一个元素.

若集合A为$\varnothing$,则$ax^2+2x+1=0$无解,即$\begin{cases}a\neq0,\\\Delta=4-4a<0,\end{cases}$解得$a>1$.

所以当$a\geqslant1$或$a=0$时,集合A中最多只有一个元素.

3. **解**:集合$A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$.因为$B\subseteq A$,所以集合$B$为$\varnothing$,$\{1\}$或$\{2\}$.集合$B$为$\varnothing$时,$a=0$;集合$B$为$\{1\}$时,$a=-2$;集合$B$为$\{2\}$时,$a=-1$.所以实数$a$的值组成的集合为$\{-2,-1,0\}$.

第二节 充分必要条件

【巩固练习】

基础实战

一、选择题

1. C **解析**:$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.故选C.

2. A **解析**:$x<-2\Rightarrow x^2-4>0$,而$x^2-4>0\nRightarrow x<-2$.故选A.

3. B **解析**:$x\geqslant1\Rightarrow|x|\geqslant1$,而$|x|\geqslant1\nRightarrow x\geqslant1$.故选B.

4. A **解析**:根据题意,甲$\Rightarrow$乙,乙$\Leftrightarrow$丙,丙$\Rightarrow$丁,所以甲$\Rightarrow$丁.故选A.

5. A **解析**:$\alpha=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\tan\alpha=1$,而$\tan\alpha=1\nRightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$.故选A.

二、解答题

1. **解**:(1)既不充分也不必要条件;(2)必要不充分条件;(3)充分不必要条件;(4)充要条件.

2. **解**:分两种情况进行讨论:

当$a=0$时,不等式$1>0$恒成立.

当$a\neq0$时,对于一切实数x都有$ax^2-ax+1>0$成立,则$a>0$且$\Delta=a^2-4a<0$,解得$0<a<4$.

综上所述,a的取值范围为$0\leqslant a<4$,即充要条件是$0\leqslant a<4$.

提升进阶

解：q：$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)\Leftrightarrow[x-(1-m)][x-(1+m)]\leqslant 0$.

因为 $m>0$，所以不等式 $[x-(1-m)][x-(1+m)]\leqslant 0$ 的解集为 $1-m\leqslant x\leqslant 1+m$.

因为 p 是 q 的充分不必要条件，所以不等式 $-2\leqslant x\leqslant 10$ 的解集是 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$ 解集的真子集. 所以 $\begin{cases}1-m\leqslant -2,\\1+m\geqslant 10\end{cases}\Rightarrow m\geqslant 9$. 所以实数 m 的取值范围为 $[9,+\infty)$.

【真题在线】

1. B　**解析**：$\{0\}$ 是集合，集合 A 也是集合，两个集合之间不能用符号 $\in$.
2. A　**解析**：本题考查的是集合的运算.
3. A　**解析**：因为集合 $A=\{x|x\geqslant 2\}$，$B=\{3,4,5\}$，所以 $B\subseteq A$.
4. B　**解析**：因为集合 $A=\{0,\pm 2,\pm 4,\cdots\}$，$B=\{1,2,4,\cdots\}$，所以集合 B 不是集合 A 的子集.
5. B　**解析**：$A\cap B=\{0,2\}$.
6. A　**解析**：已知直线 a，b 分别在平面 α，β 内，则“直线 a 和 b 相交”是“平面 α 和 β 相交”的充分不必要条件.
7. B　**解析**：已知 $a,b\in\mathbf{R}$，则 $a>b$ 是 $\lg a>\lg b$ 的必要不充分条件.
8. B　**解析**：因为 $A\cap B=\{1\}$，所以图中阴影表示的是 $\{2\}$.
9. D　**解析**：若 $1\leqslant x\leqslant 2$ 是 $x\geqslant m$ 的充分不必要条件，则 $m\leqslant 1$，所以实数的取值范围是 $(-\infty,1]$.
10. B　**解析**：因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，所以 $1\in A$，$-1\in A$. 集合 A 中有元素，所以集合 A 不是空集.
11. $\{5,6\}$　**解析**：$(\complement_U A)\cap B=\{5,6\}$.

第二章　不　等　式

第一节　不等式的基本性质

【巩固练习】

基础实战

一、选择题

1. A　**解析**：作差比较法，$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)=x^2>0$. 故选 A.

2. D　**解析**：取特殊值法排除选项 A，B，C. 选项 D 中式子得 $a-b>-1$. 若 $a>b$，则 $a-b>0$，必有 $a-b>-1$，故选项 D 中式子一定成立. 故选 D.

3. C　4. D　5. A

二、填空题

1. $<,<$　2. $<,>$　3. $>,<,\geqslant$

三、解答题

1. **解**：(作差比较法) $(2a^2-2a+6)-(a^2+2a+1)=a^2-4a+5=(a-2)^2+1>0$.

所以 $2a^2-2a+6>a^2+2a+1$.

2. **解**：$\dfrac{a}{a+1}-\dfrac{a+1}{a+2}=\dfrac{a(a+2)}{(a+1)(a+2)}-\dfrac{(a+1)^2}{(a+1)(a+2)}=\dfrac{a^2+2a-a^2-2a-1}{(a+1)(a+2)}=-\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}$.

因为 $a>0$，所以 $-\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}<0$，即 $\dfrac{a}{a+1}<\dfrac{a+1}{a+2}$.

3. **解**：由 $x<0$ 可知 $-x>0$，所以 $-x+\left(\dfrac{2}{-x}\right)\geqslant 2\sqrt{(-x)\times\left(\dfrac{2}{-x}\right)}=2\sqrt{2}$，则 $x+\dfrac{2}{x}\leqslant -2\sqrt{2}$，当且仅当 $x=-\sqrt{2}$ 时，上式取“=”.

综上所述，当且仅当 $x=-\sqrt{2}$ 时，$x+\dfrac{2}{x}$ 的最大值是 $-2\sqrt{2}$.

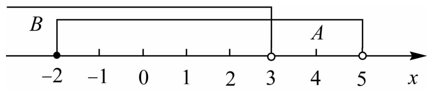
4.**解**:因为$(x-1)^2+|y+3|=0$,只有$(x-1)^2=0$且$|y+3|=0$一种情况,所以$x=1,y=-3$.

5.**解**:根据题意设最多可打x折,则可列不等式$1\,200\times\frac{x}{10}-800\geqslant800\times5\%$,解得$x\geqslant7$,即要保持利润不低于5%,最多可打7折出售.

提升进阶

1.D　**解析**:此题可用作差比较法判断.$\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{n-m}{mn}$,因为$m<n$,所以$n-m>0$.若$m,n$同号,则$mn>0$,此时$\frac{n-m}{mn}>0\Rightarrow\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$.若$m,n$异号,则$mn<0$,此时$\frac{n-m}{mn}<0\Rightarrow\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$.故选D.

2.**解**:集合A,B在数轴上可表示如下:



(1)$\complement_UA=(-\infty,-2)\cup[5,+\infty)$,$\complement_UB=[3,+\infty)$.

(2)$\left(\complement_UA\right)\cup\left(\complement_UB\right)=(-\infty,-2)\cup[3,+\infty)$.

(3)$\left(\complement_UA\right)\cap\left(\complement_UB\right)=[5,+\infty)$.

3.**解**:设矩形鱼池的长为x m,宽为$\frac{1\,800}{x}$ m,则占地矩形的长为$(x+4)$m,宽为$\left(\frac{1\,800}{x}+2\right)$m,设占地矩形的面积为$y$,则

根据题意可列式为$y=(x+4)\left(\frac{1\,800}{x}+2\right)$.

$y=(x+4)\left(\frac{1\,800}{x}+2\right)=2x+\frac{7\,200}{x}+1\,808\geqslant2\sqrt{2x\cdot\frac{7\,200}{x}}+1\,808=2\,048$.

当且仅当$2x=\frac{7\,200}{x}$,即$x=60$时,等号成立,即y取得最小值2 048.

第二节　不等式的解法

【巩固练习】

基础实战

一、选择题

1.C　**解析**:由于$x^2+2x+3=(x+1)^2+2$恒大于0,故不等式$x^2+2x+3>0$的解集为$\mathbf{R}$.

2.D　3.B　4.B　5.A　6.C　7.C　8.D　9.A

10.A　**解析**:不等式$x^2-ax+a>0$的解集为实数集$\mathbf{R}$,则$\Delta=a^2-4a<0$,解得$0<a<4$.

二、填空题

1. $\left(-\frac{1}{3},1\right)$

2. $(-\infty,-5)\cup(2,+\infty)$

3.$[3,4)$　**解析**:集合$A=\{x\mid|x-1|<3\}=\{x\mid-2<x<4\}$,$B=\{x\mid|x+2|\geqslant5\}=\{x\mid x\geqslant3$或$x\leqslant-7\}$,所以$A\cap B=[3,4)$.

4.2

三、解答题

1.**解**:由$|1-4x|\leqslant7$可知,$-7\leqslant1-4x\leqslant7$,解得$-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant2$,则不等式$|1-4x|\leqslant7$的解集为$\left[-\frac{3}{2},2\right]$.

2. **解**:由 $|x+2|\leqslant 5$ 解得 $-7\leqslant x\leqslant 3$,由 $x^2-4x-5<0$ 解得 $-1<x<5$. 所以不等式组 $\begin{cases}|x+2|\leqslant 5,\\x^2-4x-5<0\end{cases}$ 的解集为 $\{x\mid -1<x\leqslant 3\}$.

3. $[-1,0)\cup(1,2]$.

4. **解**:解不等式 $1-x<2x-1$ 得 $x>\dfrac{2}{3}$;解不等式 $2x-1<x+1$ 得 $x<2$,所以解集是 $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{2}{3}<x<2\right\}$.

5. $x<8$;图略.

提升进阶

1. **解**:由不等式 $|x+a|<1$,得 $-1-a<x<1-a$,又因为不等式的解集是 $\{x\mid 1<x<3\}$,所以 $\begin{cases}-1-a=1,\\1-a=3,\end{cases}$ 解得 $a=-2$.

2. **解**:由不等式 $|x-1|<2$ 得 $-2<x-1<2$,解得 $-1<x<3$,由不等式 $x-a>0$ 得 $x>a$,因为 $A\subseteq B$,所以 $a\leqslant -1$. 故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-1]$.

3. **解**:当 $k=0$ 时,$-2<0$,所以解集为空集;当 $k\neq 0$ 时,要使不等式 $kx^2+kx-2>0$ 的解集为空集,则 $\begin{cases}k<0,\\\Delta\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}k<0,\\k^2+8k\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-8\leqslant k<0$. 故实数 k 的取值范围为 $[-8,0]$.

4. **解**:由题意得 2 和 3 是方程 $x^2+ax+b<0$ 的两个根,由根与系数的关系可得 $\begin{cases}2+3=-a,\\2\times 3=b,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=-5,\\b=6.\end{cases}$

【真题在线】

1. B　**解析**:若 $0<a<b<1$,则 $a^2<b^2$.

2. B　**解析**:若 $a<b<0$,则 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$.

3. A　**解析**:不等式组 $\begin{cases}x^2-2x-3<0,\\2x\geqslant 4-2x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}-1<x<3,\\x\geqslant 1,\end{cases}$ 故该不等式组的解集为 $[1,3)$.

4. B　**解析**:若 $c=0$,则 $ac^2>bc^2$ 不成立.

5. A　**解析**:若 $a>b>c$,则 $a-c>b-c$,所以 $(a-c)^2>(b-c)^2$.

6. B　**解析**:不等式 $x^2<1$ 的解集为 $\{x\mid -1<x<1\}$.

7. C　**解析**:不等式 $|2x-5|<7$ 等价于 $-7<2x-5<7$,解得 $-1<x<6$,所以该不等式的解集为 $\{x\mid -1<x<6\}$.

8. A　**解析**:解不等式 $6x^2-5x+1=(3x-1)(2x-1)<0$,解得 $\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}$,所以该不等式的解集是 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$.

9. D　**解析**:解不等式 $3-x>2x-6$,$3x<9$,解得 $x<3$,所以解集是 $(-\infty,3)$.

10. B　**解析**:若 $a>b>0$,$c\leqslant 0$,则 $ac\leqslant bc$,故选项 A,D 错误;因为 c,d 正负不确定,所以选项 C 错误. 故选 B.

11. $\left\{x\,\middle|\,x>1\text{ 或 }x<\dfrac{1}{3}\right\}$　**解析**:不等式 $|3x-2|>1$ 等价于 $\begin{cases}3x-2>1,\\3x-2<-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x>1,\\x<\dfrac{1}{3},\end{cases}$ 所以该不等式的解集是 $\left\{x\,\middle|\,x>1\text{ 或 }x<\dfrac{1}{3}\right\}$.

12. 1　**解析**:解不等式 $|3x-2|<4$,解得 $-\dfrac{2}{3}<x<2$,所以满足该不等式的正整数 $x=1$.

13. $\left\{x\left|-\frac{1}{4}<x<\frac{5}{4}\right.\right\}$　**解析**:解不等式$|4x-2|<3$,$-3<4x-2<3$,解得$-\frac{1}{4}<x<\frac{5}{4}$,所以不等式$|4x-2|<3$的解集是$\left\{x\left|-\frac{1}{4}<x<\frac{5}{4}\right.\right\}$.

14. 3　**解析**:不等式$|3x-8|<2\Leftrightarrow-2<3x-8<2\Leftrightarrow 2<x<\frac{10}{3}$,所以整数解只有$x=3$.

第三章　函　　数

第一节　函数的概念及其表示方法

【巩固练习】

基础实战

一、选择题

1. C　**解析**:选项A中,$y=x(x\geqslant 0)$与函数$y=x$定义域不同,选项B中,$y=|x|$与函数$y=x$的对应法则不同,所以排除;选项D中,$y=x(x\neq 0)$与函数$y=x$的定义域不同,所以排除. 故选C.

2. A　3. B

4. A　**解析**:设$u=x+1$,则$-1+1\leqslant u\leqslant 1+1\Rightarrow 0\leqslant u\leqslant 2$. 所以函数$f(u)$的定义域是$[0,2]$,即函数$f(x)$的定义域为$[0,2]$.

5. A

6. B　**解析**:要使函数$y=\sqrt{4-2^x}$有意义,需使$4-2^x\geqslant 0$,即$2^x\leqslant 2^2$,由函数$y=2^x$的图像与性质可知$x\leqslant 2$.

7. C　**解析**:A,B,D三个选项中的两个函数彼此定义域都互不相同,故不能表示同一个函数,而只有定义域和对应法则完全相同时,两个函数才是同一个函数,与表示函数所选的字母无关. 故选C.

8. C　**解析**:将$f[f(x)]$中的$f(x)$理解为$f(x)$中x的取值. $f[f(x)]=\frac{f(x)+1}{2f(x)-3}=\frac{\frac{x+1}{2x-3}+1}{2\times\frac{x+1}{2x-3}-3}=\frac{3x-2}{11-4x}$. 故选C.

9. B

10. C

二、填空题

1. $\frac{1}{3}$　2. $\frac{x}{x^2+1}$　3. 6　4. 1

三、解答题

1. **解**:根据题意设$f(x)=kx+b(k\neq 0)$,有$\begin{cases}4k+b=8,\\ b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=2,\\ b=0,\end{cases}$所以$f(x)=2x$.

2. **解**:(1)因为$(-\infty,-2]\cup(-2,4)\cup[4,+\infty)=(-\infty,\infty)$,所以$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2)若$x+3=3$,则$x=0$,$0\notin(-\infty,-2]$;若$x^3+1=3$,则$x=\sqrt[3]{2}$,$\sqrt[3]{2}\in(-2,4)$;若$3x=3$,则$x=1$,$1\notin[4,+\infty)$. 所以$x=\sqrt[3]{2}$.

3. **解**:令$x+1=t$,则$x=t-1$,因此$f(t)=(t-1)^2-1=t^2-2t$,即$f(x)=x^2-2x$,
所以$f(2)=2^2-2\times 2=0$,$f(a)=a^2-2a=a(a-2)$,$f(a+2)=(a+2)^2-2(a+2)=a(a+2)$.

提升进阶

1. **解**:因为$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$,所以$f(x)=x^2-2$.