第一章 集合

知识结构

- 集合
  - 集合的概念
  - 集合的表示
    - 列举法
    - 描述法
  - 集合的关系
    - 元素与集合
      - 属于
      - 不属于
    - 集合与集合
      - 包含
      - 包含于
  - 集合的运算
    - 交集
    - 并集
    - 补集
  - 充要条件
    - 充分条件
    - 必要条件
    - 充要条件

命题趋势

本章内容在历年真题中出题数量基本保持在两道,要求不高,难度不大.涉及的知识有:集合间的关系,集合的运算,充分条件、必要条件与充要条件的判定.常与不等式、函数等内容相交汇.

第一节 集合的概念及表示

知识梳理

知识点一 集合的概念

1. 集合

把具有某种属性的一些确定的对象看成一个整体,便形成一个集合,常用大写的拉丁字母 A,B,C 等表示.

2. 元素

集合中的每一个确定的对象叫作这个集合的元素,常用小写字母 a,b,c 等表示.

3. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的一个元素,就说 a 属于 A,记作 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A,记作 $a\notin A$. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性的特征.

4. 集合的分类

(1)按元素个数分类:

①有限集. 含有元素的个数有限的集合叫作有限集.

②无限集. 含有元素的个数无限的集合叫作无限集.

③空集. 不含任何元素的集合叫作空集,记作$\varnothing$.

注意:$\varnothing$不是$\{0\}$.

(2)按元素的特征分类:数集、点集等.

5. 常用的集合

常用的集合有正整数集($\mathbf{Z}^+$或$\mathbf{N}^*$)、自然数集($\mathbf{N}$)、整数集($\mathbf{Z}$)、有理数集($\mathbf{Q}$)、实数集($\mathbf{R}$).

(1)正整数集. 所有正整数组成的集合叫作正整数集,记作 $\mathbf{Z}^+$ 或 $\mathbf{N}^*$.

(2)自然数集. 所有自然数组成的集合叫作自然数集,记作 $\mathbf{N}$.

(3)整数集. 所有整数组成的集合叫作整数集,记作 $\mathbf{Z}$.

(4)有理数集. 所有有理数组成的集合叫作有理数集,记作 $\mathbf{Q}$.

(5)实数集. 所有实数组成的集合叫作实数集,记作 $\mathbf{R}$.

知识点二 集合的表示法

1. 列举法

把集合的元素一一列举出来,写在大括号内,这种表示集合的方法叫作列举法.

注意：用列举法表示集合时，要注意以下几点：

(1)元素之间用逗号“,”隔开.

(2)元素不能重复(满足集合中元素的互异性).

(3)元素不能遗漏.

(4)当集合中的元素较少时，用列举法比较简单；当集合中的元素较多或无限，但存在一定的规律时，在不发生误解的情况下，也可以用列举法表示.

2. 描述法

用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法.

描述法表示集合的一般形式是$\{x|p(x)\}$，其中“x”是集合中元素的代表形式，“$p(x)$”是集合中元素的共同特征，两者之间的竖线不可省略.

注意：用描述法表示集合时，要注意以下几点：

(1)写清楚集合中元素的代表形式(一般用小写字母表示).

(2)写明集合中元素的特征或性质.

(3)用于描述元素特征的语句要力求简明、准确，不产生歧义；多层描述时，应当准确使用“且”“或”等关联词.

(4)所有描述的内容都要写在大括号内.

(5)在不引起混淆的情况下，用描述法表示集合有时也可以省去竖线和竖线左边的部分. 例如，正整数的集合可简记为{正整数}，但是，集合$\{x|x>1\}$就不能省略竖线及其左边的“x”.

典例解析

例 1　在下列每组对象中：

(1)我国著名的数学家；

(2)超过 10 的所有自然数；

(3)某校 2020 年新入学的高个子学生；

(4)方程 $x-1=0$ 的实数解；

(5)在直角坐标平面内，第二象限的所有点.

其中能构成集合的是(　　).

A. (1)(2)(3)　　　　B. (2)(3)(4)

C. (2)(4)(5)　　　　D. (3)(4)(5)

解析　(1)“我国著名的数学家”不是一个明确的标准，不能构成一个集合；(3)“高个子学生”这一标准也不确定，无法判定某人是高还是矮，也不能构成集合；(2)(4)的对象是确定的；(5)的对象虽然有无限个，但它是确定的. 因此选 C.

技巧点拨　判断某组对象能否构成集合，关键看对象是否为整体的和确定的. 标准一定要是明确的，不能模糊，否则无法判断.

变式训练 1

下列语句中,能构成集合的是(　　).

A. 我班数学好的男生

B. 与 0 接近的全体实数

C. 大于 π 的自然数

D. 优秀的中等职业学校

例 2　已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 3, x\in\mathbf{Z}, y\in\mathbf{Z}\}$,则 A 中元素的个数为(　　).

A. 9

B. 8

C. 5

D. 4

解析　由 $x^2+y^2\leqslant 3$ 可知,$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$,$-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$. 又因为 $x\in\mathbf{Z}$,$y\in\mathbf{Z}$,所以 $x\in\{-1,0,1\}$,$y\in\{-1,0,1\}$. 所以 A 中元素的个数为 9.

技巧点拨　对于求解集合中元素个数的题目,首先求出集合,然后根据集合中元素的互异性求出集合中元素的个数,或利用数形结合的方法求出集合中元素的个数.

变式训练 2

已知集合 $A=\{1,2,4\}$,集合 $B=\{x\mid x=a+b, a\in A, b\in A\}$,则集合 B 中元素的个数为________.

例 3　用列举法表示下列集合.

(1)$A=\{x\mid -2<x<5, x\in\mathbf{Z}\}$;

(2)$B=\{(x,y)\mid 2x+y=5, x\in\mathbf{N}, y\in\mathbf{N}\}$.

解析　(1)$A=\{-1,0,1,2,3,4\}$;(2)$B=\{(0,5),(1,3),(2,1)\}$.

技巧点拨　掌握集合的两种表示方法.

变式训练 3

用合适的方法表示下列集合.

(1)11,12,13,14,15,…;

(2)$\{1,4,9,16,25,36\}$.

巩固练习

1. 下列命题所列对象中，能组成集合的是（　　）.

A. 有趣的书　　B. 非常小的数

C. 好听的歌　　D. 小于 3 的数

2. 用列举法表示集合$\{x|x^2-3x+2=0\}$的结果是（　　）.

A. $(1,2)$　　B. $1,2$

C. $\{1,2\}$　　D. 以上都不是

3. 用列举法表示"大于 2 且小于 9 的偶数的全体"构成的集合是（　　）.

A. $\varnothing$　　B. $\{4,6,8\}$

C. $\{3,5,7\}$　　D. $\{3,4,5,6,7,8\}$

4. 用描述法表示"绝对值等于 1 的所有整数"组成的集合是（　　）.

A. $\{-1,1\}$　　B. $(-1,1)$

C. $\{x||x|=1,x\in\mathbf{Z}\}$　　D. $\{x|x=1,x\in\mathbf{Z}\}$

5. 下列命题中，可以确定一个集合的是（　　）.

A. 全体有理数　　B. 无限趋近于 2 的实数

C. 由 1,2,3,3,4,4,5,6,8 构成的全体　　D. 本班性格外向的同学

6. 不大于 3 的正整数的集合是（　　）.

A. $\{0,1,2,3\}$　　B. $\{1,2,3\}$

C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 3\}$　　D. $\{x|x\leqslant 3\}$

7. 由坐标平面内不在坐标轴上的点组成的集合是（　　）.

A. $\{(x,y)|x\neq 0\}$　　B. $\{(x,y)|y\neq 0\}$

C. $\{(x,y)|xy\neq 0\}$　　D. $\{(x,y)|xy=0\}$

8. 用列举法表示"大于 2 且小于 5 的整数"构成的集合是（　　）.

A. $\{x|2<x<5\}$　　B. $\{x|2<x<5,x\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{2,3,4,5\}$　　D. $\{3,4\}$

9. 下列选项中，表述正确的是（　　）.

A. 由 1,3,5,7,5,3，组成的集合中有 6 个元素

B. 周长为 16 cm 的三角形组成的集合是有限集合

C. 集合$\{0\}$是空集

D. 一年级(3)班的所有同学可以组成集合

10. 已知集合$A=\{x|1<x<2\}$，$a=\sqrt{5}$，则下列关系中，正确的是（　　）.

A. $a\in A$　　B. $a\notin A$

C. $\{a\}\in A$　　D. $\{a\}\notin A$

第二节 集合的关系及运算

知识梳理

知识点一 集合间的关系

1. 子集

一般地，对于两个集合 A,B，如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素，那么，集合 A 就叫作集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

当集合 A 不包含于集合 B 或集合 B 不包含集合 A 时，记作 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsupseteq A$.

性质：任何一个集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$；空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$；对集合 A,B,C，若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

注意：不能把子集说成由原来集合中的部分元素组成的集合，因为 A 的子集包括它本身，而这个子集由 A 的全体元素组成；空集也是 A 的子集，但这个子集中不包括 A 中的任何元素.

2. 真子集

如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，则 A 是 B 的真子集（A 包含于 B 但不等于 B），记作 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

性质：空集是任何非空集合的真子集；对于集合 A,B,C，若 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$.

注意：元素与集合之间是属于关系，集合与集合之间是包含关系.

3. 集合相等

一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 中的任何一个元素都是集合 A 的元素，我们就说集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$（A,B 的所有元素均相等）.

注意：(1)若两个集合相等，则两个集合所含元素完全相同，反之亦然.

(2)要判断两个集合是否相等，对于元素较少的有限集，主要看它们的元素是否完全相同；若是无限集，则从"互为子集"入手进行判断.

知识点二 集合的运算

1. 交集

一般地，由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A 且 x\in B\}$.

性质：

(1)$A\cap B=B\cap A$.

(2)$A\cap A=A$.

(3)$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(4)$A\cap B\subseteq A$,$A\cap B\subseteq B$.

(5)若 $A\subseteq B$,则 $A\cap B=A$.

2. 并集

一般地,由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与集合 B 的并集,记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

性质:

(1)$A\cup B=B\cup A$.

(2)$A\cup A=A$.

(3)$A\cup\varnothing=A$.

(4)$A\subseteq A\cup B$,$B\subseteq A\cup B$.

(5)若 $A\subseteq B$,则 $A\cup B=B$.

3. 图示两个集合的交集、并集

(1)用 Venn 图表示两个集合的交集、并集(图 1-1).

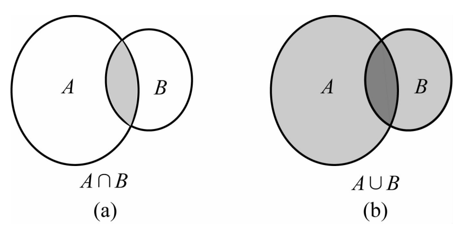

图 1-1

(2)借助数轴表示数集的交集、并集(图 1-2).

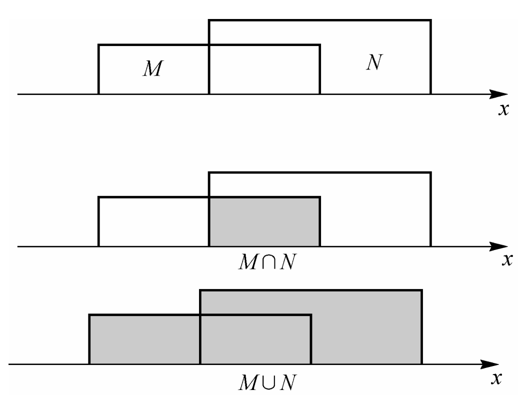

图 1-2

4. 全集

如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素,则称这个集合为全集,通常用 U 表示.

注意:全集是一个相对的概念,在不同的情况下全集的概念也不同.

5. 补集

对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称集合 A 的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

性质：

(1) $\complement_U(\complement_U A)=A$.

(2) $\complement_U\varnothing=U$，$\complement_U U=\varnothing$.

(3) $A\cup(\complement_U A)=U$.

(4) $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$.

典例解析

例 1 设集合 $A=\{0\}$，下列结论正确的是（　　）.

A. $A=0$　　B. $A\subseteq\varnothing$

C. $0\in A$　　D. $\varnothing\in A$

解析 本题考查了元素与集合、集合与集合之间的关系. 答案选 C.

技巧点拨 正确理解符号 $\in$，$\notin$，$\subseteq$，$\subsetneqq$ 的意义，是正确处理此类问题的关键.

变式训练 1

下列说法中，正确的有（　　）.

①空集没有子集；②任何集合至少有两个子集；③空集是任何集合的真子集；④若 $\varnothing\subsetneqq A$，则 $A\neq\varnothing$.

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

例 2 已知集合 $A=\{x|x^2-x-2=0\}$，$B=\{x|x^2-4x+p=0\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

解析 由题意得：$A=\{-1,2\}$，因为 $B\subseteq A$，所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{2\}$ 或 $B=\{-1,2\}$.

又因为 $B=\{x|x^2-4x+p=0\}$，所以 $B=\{-1,2\}$ 不成立.

当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=(-4)^2-4p=16-4p<0$，解得 $p>4$；

当 $B=\{-1\}$ 时，$\begin{cases}\Delta=16-4p=0\\(-1)^2-4\times(-1)+p=0\end{cases}$，无解；

当 $B=\{2\}$ 时，$\Delta=16-4p=0$，$2^2-4\times2+p=0$，解得 $p=4$.

综上，实数 p 的取值范围是 $p\in[4,+\infty)$.

技巧点拨 两个集合包含或相等关系的问题，通过建立方程（组），然后解出未知数，最后利用集合元素的特征进行检验即可.

变式训练 2

已知集合 $A=\{1,1+m,1+2m\}$，$B=\{1,n,n^2\}$，其中 $m,n\in\mathbf{R}$，若 $A=B$，求 m,n 的值.

例 3 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，集合 $B=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A\cap B$.

解析 $B=\{x\mid x^2-2x-3<0\}=\{x\mid -1<x<3\}$，$\complement_U A=\{x\mid x<0$ 或 $x\geqslant 2\}$，所以 $A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，$A\cup B=\{x\mid -1<x<3\}$，$\complement_U A\cap B=\{x\mid -1<x<0$ 或 $2\leqslant x<3\}$.

技巧点拨 考查对集合运算的理解及性质的运用.

变式训练 3

设全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{0,1,2,3\}$，集合 $B=\{2,3,4\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A\cup\complement_U B$.

例 4 已知集合 $M=\{x\mid a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$N=\{x\mid x<-1$ 或 $x>5\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解析 如图 1-3 所示，要使 $M\cap N=\varnothing$，必须满足 $\begin{cases}a+3\leqslant 5\\ a\geqslant -1\end{cases}$，解得 $-1\leqslant a\leqslant 2$，所以实数 a 的取值范围为 $\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 2\}$.

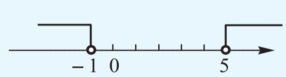

图 1-3

技巧点拨 解题时利用数轴表示集合，便于寻求满足条件的实数 a. 特别需要注意的是“端点值”的问题，是能取“=”还是不能取“=”.

变式训练 4

已知 $A=\{x|a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$B=\{x|x>1$ 或 $x<-6\}$.

(1)若 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的取值范围；

(2)若 $A\cup B=B$，求 a 的取值范围.

例 5 U 为全集，集合 $M\subsetneqq U$，$N\subsetneqq U$，且 $N\subseteq M$，则(　　).

A. $(\complement_U M)\supseteq(\complement_U N)$　　B. $(\complement_U M)\supseteq N$

C. $(\complement_U M)\subseteq(\complement_U N)$　　D. $M\supseteq(\complement_U N)$

解析　根据各集合之间的关系作图(图 1-4)，这样就很容易做出判断，故选 C.

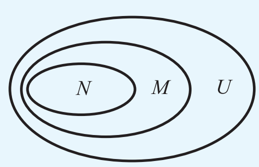

图 1-4

技巧点拨　(1)考虑集合之间的关系，用图形解答比较方便.

(2)在数学中利用“数形结合”的思想，往往能使问题简单化.

变式训练 5

U 为全集，M，N 为两个非空集合，且满足 $M\cap N=M$，则下列正确的是(　　).

A. $M\subsetneqq N$　　B. $N\subsetneqq M$

C. $M=N$　　D. $M\cap(\complement_U N)=\varnothing$

巩固练习

一、选择题

1. 下面四个关系中,正确的个数为(　　).

①$0\in\mathbf{Q}$;　②$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$;　③$\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}$;　④$\varnothing\subsetneqq\{0\}$.

A. 4个　　B. 3个
C. 2个　　D. 1个

2. 集合$\{1,2,3,4\}$所有子集的个数是(　　).

A. 8　　B. 14
C. 15　　D. 16

3. 设集合$A=\{1,2,3\}$,$B=\{4,5,6\}$,则$A\cap B=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{3\}$
C. $\{1,2\}$　　D. $\{1,2,3,4,5,6\}$

4. 设集合$A=\{0,1,2,3\}$,$B=\{-1,0,1\}$,则$A\cap B=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{0,1\}$
C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

5. 设集合$A=\{0,1\}$,$B=\{-1,0\}$,则$A\cup B=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{0\}$
C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{0,1\}$

6. 设集合$A=\{a,b\}$,$B=\{b,c\}$,则$A\cap B=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{b\}$
C. $\{a,c\}$　　D. $\{a,b,c\}$

7. 设集合$A=\{-2,2\}$,$B=\{-1,2\}$,则$A\cup B=$(　　).

A. $\{2\}$　　B. $\{-2,-1\}$
C. $\{-2,2\}$　　D. $\{-2,-1,2\}$

8. 设全集$U=\{1,2,3,4\}$,集合$A=\{2,3\}$,$B=\{1,4\}$,则$\complement_U B\cap A=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{1,4\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

二、填空题

1. 用适当的符号($\in,\notin,\subseteq,\supseteq,=$)填空.

3 ________ $\{2,3\}$;　　π ________ $\mathbf{Q}$;　　$\{1,2,3\}$ ________ $\mathbf{Z}$;

$\mathbf{N}^*$ ________ $\mathbf{Z}$;　　$\{-3,3\}$ ________ $\{x|x^2=9\}$.

2. 已知集合$P=\{x|2<x<a,x\in\mathbf{N}\}$,且集合$P$中恰有3个元素,则整数$a=$________.

3. 关系式①$\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$;②$\{a,b\}=\{b,a\}$;③$0=\varnothing$;④$0\in\{0\}$;⑤$\varnothing\in\{0\}$;⑥$\varnothing\subseteq\{0\}$中正确的是________.

4. 设全集$U=\mathbf{R}$,集合$A=\{x\mid x^2-x-2=0\}$,$B=\{x\mid |x|=y+1,y\in A\}$,则$\complement_U B=$________.

5. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,a\}$，$A\cap B=\{1,3\}$，则 $A\cup B=$____________.

三、解答题

1. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$，集合 $B=\{x|x=ab,a\in A,b\in A\}$，判断集合 B 和集合 A 的关系.

2. 写出集合 $\{-3,-1,1,3\}$ 的所有子集，并指出哪些是真子集.

3. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|ax+2=0\}$，且 $B\subsetneqq A$，求实数 a 的值组成的集合.

4. 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中只有一个元素，求 a 的值；

(2)若 A 中恰有两个元素，求 a 的取值范围；

(3)若 A 中至多只有一个元素，求 a 的取值范围.

第三节 充要条件

知识梳理

1. 命题的概念

在数学中，我们把语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句称为命题. 正确的命题称为真命题，错误的命题称为假命题.

2. 必要条件的定义

(1)对于两个命题 p,q，如果有 $p\Rightarrow q$，则称 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

注意：p 是 q 的充分条件是指只要具备了条件 p，那么 q 就一定成立，即命题中的条件是充分的；q 是 p 的必要条件是指如果不具备条件 q，则 p 就不能成立，即 q 是 p 成立的必不可少的条件.

(2)如果 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，即 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充分且必要条件，简称充要条件.

注意：(1)当 $p\Leftrightarrow q$ 时，也称 p 与 q 是等价的.

(2)与充要条件等价的词语有“当且仅当”“等价于”“有且只有”“……，反过来也成立”等.

3. 必要条件的判断方法

(1)从逻辑推理关系上判断(定义法).

①若 $p\Rightarrow q$ 但 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件.

②若 $p\nRightarrow q$ 但 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要不充分条件.

③若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件.

④若 $p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

(2)从命题所对应的集合与集合之间的关系上判断(集合法). 设命题 p 对应的集合为 A，命题 q 对应的集合为 B.

①若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分不必要条件.

②若 $A\supseteq B$，则 p 是 q 的必要不充分条件.

③若 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$，即 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件.

④若 $A\nsubseteq B$ 且 $A\nsupseteq B$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

典例解析

例 1　已知 p：$|3x-5|<4$，q：$(x-1)(x-2)<0$，则 p 是 q 的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析 $p:|3x-5|<4\Rightarrow p:\frac{1}{3}<x<3$，$q:(x-1)(x-2)<0\Rightarrow q:1<x<2$. 所以 $p\nRightarrow q$ 但 $q\Rightarrow p$，所以 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.

技巧点拨 判断充分必要条件时，先要分清条件和结论，进而找到条件与结论之间的逻辑推理关系.

变式训练 1

设命题甲为 $0<x<5$，命题乙为 $|x-2|<3$，那么甲是乙的(　　).

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

例 2 已知集合 $A=\left\{y\middle|y=x^2-\frac{3}{2}x+1,x\in\left[\frac{3}{4},2\right]\right\}$，$B=\{x|x+m^2\geqslant 1\}$，$p:x\in A$，$q:x\in B$，并且 p 是 q 的充分条件，求实数 m 的取值范围.

解析 由题意得 $A=\left[\frac{7}{16},2\right]$，$B=[1-m^2,+\infty)$，由于 p 是 q 的充分条件，所以 $A\subseteq B$，所以 $1-m^2\leqslant\frac{7}{16}$，解得 $m\geqslant\frac{3}{4}$ 或 $m\leqslant-\frac{3}{4}$，即实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

技巧点拨 本题主要考查集合的运算以及充要条件的判断，解题的关键是不等式之间的关系.

变式训练 2

已知 $p:x^2-2x-3<0$，$q:-a<x-1<a$. 若 q 是 p 的一个必要不充分条件，求实数 a 的取值范围.

巩固练习

一、选择题

1. “$x<-2$”是“$x^2-4>0$”的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. “$A\cap B=A$”是“$A\subseteq B$”的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. 设甲是乙的充分不必要条件,乙是丙的充要条件,丁是丙的必要不充分条件,则甲是丁的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. “$|x|\geqslant 1$”是“$x\geqslant 1$”的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. “$\alpha=\frac{\pi}{4}$”是“$\tan\alpha=1$”的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. “$x<2$”是“$x^2-x-2<0$”的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. “$x>0$”是“$x>1$”的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}$,则“$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

二、解答题

1. 判断下列问题中,p 是 q 的什么条件?

(1)$p:x^2\geqslant y^2$,$q:x\geqslant y$.

(2)$p:x\in A\cup B$,$q:x\in A\cap B$.

(3)$p:x>3$,$q:x>2$.

(4)$p:a$ 是有理数,$q:a+2$ 是有理数.

2. 求一个对于一切实数 x 都有 $ax^2-ax+1>0$ 成立的充要条件.

3. 已知 p：$-2\leqslant x\leqslant 10$，$q$：$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$，若 p 是 q 的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围.

真题链接

1. (2019 · 安徽省分类考试)设集合 $A=\{1,2m+1\}$，$B=\{3,1\}$，若 $A=B$，则 $m=($　　$)$.

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

2. (2019 · 安徽省分类考试)“$a-b=0$”是“$a^2-b^2=0$”的(　　).

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. (2018 · 安徽省分类考试)已知集合 $A=\{0,3\}$，$B=\{-2,0,1,2\}$，则 $A\cap B=($　　$)$.

A. $\varnothing$　　B. $\{0\}$

C. $\{0,3\}$　　D. $\{-2,0,1,2,3\}$

4. (2018 · 安徽省分类考试)设 A，B 为两个非空集合，且 $B\subseteq A$，则“$x\in A$”是“$x\in B$”的(　　).

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. (2017 · 安徽省分类考试)若集合 $A=\{1,3\}$，$B=\{2,3,5\}$，则 $A\cup B=($　　$)$.

A. $\{3\}$　　B. $\{1,3\}$

C. $\{2,3,5\}$　　D. $\{1,2,3,5\}$

6. (2017 · 安徽省分类考试)“$a^2>0$”是“$a>0$”的(　　).

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件