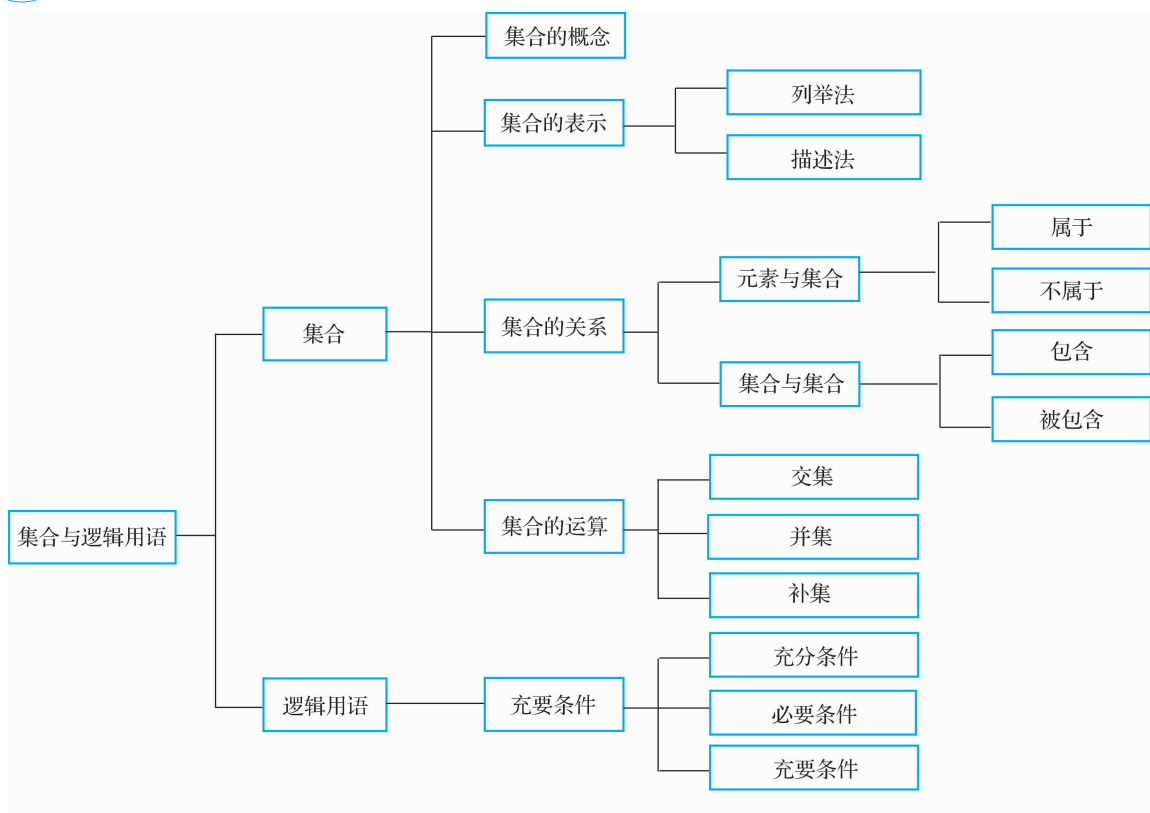


第一章

集合与简易逻辑



知识结构图



考纲划重点

考纲要求

1. 理解集合的意义,掌握集合的两种表示方法:列举法和描述法.
2. 掌握元素与集合之间的属于关系以及集合与集合之间的包含关系、相等关系.
3. 掌握集合的交集、并集、补集的运算.

| | |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 命题趋势 | <p>集合在近几年中职生报考高职(专科)院校分类考试中主要从三个方面考查:一是考查集合的概念、集合的基本关系及常用数集的符号表示;二是考查集合的基本运算.命题常以两个集合的交集、并集和补集运算为主,多与绝对值、不等式等相结合;三是考查充分条件、必要条件和充要条件的判定,多与函数等相结合.</p> <p>本章是每年对口高职分类考试的必考内容,也是比较容易拿分的知识点,试题分值占比较大,其中,元素和集合、集合与集合的关系,还有集合的运算是每年必考的内容.</p> |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

第一节 集合的基本概念与基本运算



真题回放站

1.【2019·贵州省分类考试】设集合 $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{4,6,10\}$, 则 $A\cup B=(\quad)$.

- A. $\{2,4,6,10\}$ B. $\{2,8,10\}$ C. $\{2,4,6,8,10\}$ D. $\{4,6\}$

【专家详解】此题考查的是集合的基本运算.集合 A 与集合 B 的并集,就是把两个集合中的所有元素放在一起,所以 $A\cup B=\{2,4,6,8,10\}$. 故选 C.

2.【2019·贵州省分类考试】下列命题中正确的是(\quad)

- A. $\{2\}\in\{-1,2,4\}$ B. $\emptyset=\{0\}$ C. $\emptyset\subset\{0\}$ D. $\{1,3\}\subset\{1\}$

【专家详解】此题考查的是元素和集合之间的关系及符号表示,还有集合和集合之间的关系及符号表示.两个集合间不能用“ \in ”,排除选项 A;空集是不含任何元素的集合,而 $\{0\}$ 含有元素 0,排除选项 B;空集是任何集合的子集,选项 C 正确;集合 $\{1,3\}$ 的元素多于 $\{1\}$ 的元素,排除选项 D. 故选 C.

3.【2019·贵州省分类考试】下列各项能组成集合的有(\quad). (多选)

- A. 小于 3 的正整数 B. 好看的衣服 C. 某校所有的男同学 D. 非常高的树

【专家详解】此题考查的是集合的概念.“好看的衣服”和“非常高的树”这两个选项不符合集合的概念,排除选项 B 和选项 D. 故选 AC.

4.【2019·贵州省分类考试】下列集合属于描述法的有(\quad). (多选)

- A. $\{\text{直角三角形}\}$ B. $\{x|x\geq 2\}$
C. $\{1,2,3,4\}$ D. $\{x|x=2n+1, n \text{ 是自然数}\}$

【专家详解】此题考查的是集合表示法中的描述法.描述法是把集合中的元素的公共属性描述出来,而选项 C 是把集合的元素一一列举出来,用的是列举法排除选项 C. 故选 ABD.

5.【2018·贵州省分类考试】已知集合 $U=\{x|4\leq x\leq 10, x\in\mathbf{N}\}$, $A=\{4,6,8,10\}$, $\complement_U A=(\quad)$.

- A. $\{5\}$ B. $\{5,7\}$ C. $\{5,7,9\}$ D. $\{7,9\}$

【专家详解】此题考查了集合与集合运算关系中的补集和常用的自然数集.已知全集 $U=\{4,5,6,7,8,9,10\}$, 集合 $A\subseteq U$, 由集合 U 中所有不属于集合 A 的元素组成的集合就是 $\complement_U A$. 故选 C.



考点一 集合的概念与表示法

1. 集合

把具有某种属性的一些确定的对象看成一个整体,便形成了一个集合,常用大写英文字母 A, B, C 等表示.

2. 元素

集合中的每一个确定的对象叫做这个集合的元素,常用小写英文字母 a, b, c 等来表示.

3. 元素与集合的关系及性质

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性的特征.

4. 常用的集合

- (1)空集. 不含任何元素的集合叫做空集,记作 \emptyset .
- (2)正整数集. 所有正整数组成的集合叫做正整数集,记作 \mathbf{N}_+ 或 \mathbf{N}^* .
- (3)自然数集. 所有自然数组成的集合叫做自然数集,记作 \mathbf{N} .
- (4)整数集. 所有整数组成的集合叫做整数集,记作 \mathbf{Z} .
- (5)有理数集. 所有有理数组成的集合叫做有理数集,记作 \mathbf{Q} .
- (6)实数集. 所有实数组成的集合叫做实数集,记作 \mathbf{R} .

5. 集合的两种表示法

(1)列举法. 把集合的元素一一列举出来,写在大括号内,这种表示集合的方法叫做列举法.

注意:用列举法表示集合时,要注意以下几点:

- ①元素之间用逗号“,”隔开.
- ②元素不能重复(满足集合中元素的互异性).
- ③元素不能遗漏.

④当集合中的元素较少时用列举法比较简单;若集合中的元素较多或无限,但存在一定的规律,在不发生误解的情况下,也可以用列举法表示.

(2)描述法. 用集合所含元素的共同特性表示集合的方法叫做描述法.

描述法表示集合的一般形式是 $\{x | p(x)\}$,其中“ x ”是集合中元素的代表形式,“ $p(x)$ ”是集合中元素的共同特征,两者之间的竖线不可省略.

注意:用描述法表示集合时,要注意以下几点:

- ①写清楚集合中元素的代表形式(一般用小写字母表示).
- ②写明集合中元素的特征或性质.
- ③用于描述元素特征的语句要力求简明、准确,不产生歧义;多层描述时,应当准确使用“且”“或”等关联词.
- ④所有描述的内容都要写在大括号内.

⑤在不引起混淆的情况下,用描述法表示集合时有时也可以省去竖线和竖线左边的部分.例如,正整数的集合可简记为{正整数},但是,集合 $\{x | x > 1\}$ 就不能省略竖线及其左边的 x .

考点二 集合间的关系

1. 子集

一般地,对于两个集合 A, B ,如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素,那么,集合 A 就叫做集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$,读作“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”。

当集合 A 不包含于集合 B 或集合 B 不包含集合 A 时,记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$ 。

性质:任何一个集合是它本身的子集,即 $A \subseteq A$;空集是任何集合的子集,即 $\emptyset \subseteq A$;对于集合 A, B, C ,若 $A \subseteq B, B \subseteq C$,则 $A \subseteq C$ 。

注意:不能把子集说成由原来集合中的部分元素组成的集合,因为集合 A 的子集包括它本身,而这个子集由集合 A 的全体集合组成;空集也是集合 A 的子集,但这个子集中不包括集合 A 中的任何元素。

2. 真子集

如果集合 A 是集合 B 的子集,并且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A ,则集合 A 是集合 B 的真子集(A 包含于 B 但不等于 B),记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$,读作“ A 真包含于 B ”(或“ B 真包含 A ”)。

性质:空集是任何非空集合的真子集;对于集合 A, B, C ,若 $A \subsetneq B, B \subsetneq C$,则 $A \subsetneq C$ 。

注意:元素与集合之间是属于关系,集合与集合之间是包含关系。

3. 集合相等

一般地,对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 中的任何一个元素也都是集合 B 的元素,同时集合 B 中的任何一个元素也都是集合 A 的元素,我们就说集合 A 等于集合 B ,记作 $A = B$ (A, B 的所有元素均相等)。

注意:(1)若两个集合相等,则两个集合所包含的元素完全相同,反之亦然。

(2)要判断两个集合是否相等,对于元素较少的有限集合,主要看它们的元素是否完全相同;若是无限集合,则从“互为子集”入手进行判断。

考点三 集合的运算

1. 交集

一般地,对于两个给定的集合 A, B ,由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素组成的集合,称为集合 A 与集合 B 的交集,记作 $A \cap B$,即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。

性质:

$$(1) A \cap B = B \cap A.$$

$$(2) A \cap A = A.$$

$$(3) A \cap \emptyset = \emptyset.$$

$$(4) A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B.$$

$$(5) \text{若 } A \subseteq B, \text{则 } A \cap B = A.$$

2. 并集

一般地,对于两个给定的集合 A, B ,由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合,称为集合 A 与集合 B 的并集,记作 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。

性质:

$$(1) A \cup B = B \cup A.$$

$$(2) A \cup A = A.$$

$$(3) A \cup \emptyset = A.$$

- (4) $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$.
 (5) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$.

3. 图示两个集合的交集、并集

- (1) 用 Venn 图表示两个集合的交集、并集(如图 1-1 所示).
 (2) 借助数轴表示数集的交集、并集(如图 1-2 所示).

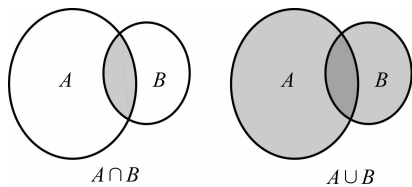


图 1-1

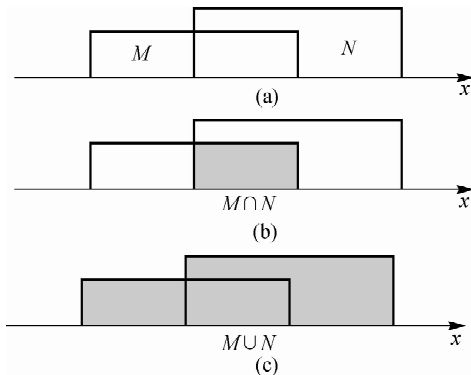


图 1-2

4. 全集

如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素, 则称这个集合为全集, 通常用 U 表示.

注意: 全集是一个相对的概念, 在不同的情况下全集的概念不同.

5. 补集

对于一个集合 A , 由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集, 简称为集合 A 的补集, 记作 $\complement_U A$, 读作“ A 在 U 中的补集”, 即 $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$.

性质:

- (1) $\complement_U(\complement_U A) = A$.
 (2) $\complement_U \emptyset = U, \complement_U U = \emptyset$.
 (3) $A \cup (\complement_U A) = U$.
 (4) $A \cap (\complement_U A) = \emptyset$.

6. 常见的集合表示

- (1) 方程的解集: $\{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ 或 $\{1, 2\}$, 一般用列举法表示.
 (2) 方程组的解集: $\{(3, 1)\}$ 或 $\{(x, y) | \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 3y = 6 \end{cases}\} = \{(x, y) | \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}\}$, 一般用后者表示.
 (3) 不等式的解集: $\{x | 3 \leq x < 5\}$ 或 $[3, 5)$, 一般用区间表示.
 (4) 点集: $\{(x, y) | y = 2x + 1\}$.
 (5) 具有某种性质的点集: $\{M | |PM| = a\}$ (P 为定点).
 (6) 三角函数中角的集合表示: $M = \{\alpha | 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}\}$.



课堂讲与练

例 1 下列各组对象中, 能构成集合的是().

- (1) 我国著名的数学家;

- (2)超过 20 的所有自然数;
 (3)某校 2020 年招收的矮个子学生;
 (4)方程 $x^2-4=0$ 的实数解;
 (5)在直角坐标平面内,第三象限的所有点.

A. (1)(2)(3) B. (2)(3)(4) C. (2)(4)(5) D. (3)(4)(5)



解析

(1)中的“我国著名的数学家”不是一个明确的标准,不能构成一个集合;(3)中的“矮个子学生”这一标准不确定,无法判定某人是高还是矮,不能构成集合;(2)(4)中的对象是确定的;(5)中的对象虽然有无限个,但它是确定的. 故选 C.



技巧点拨

判断某组对象能否构成集合,关键看对象是否为整体的和确定的. 标准一定要是明确的,不能模糊,否则无法判断.



变式训练 1

下列语句能构成集合的是().

- A. 我班学习好的男生 B. 与 0 接近的全体实数
 C. 大于 π 的自然数 D. 优秀的中等职业学校

例 2 用列举法表示下列集合:

- (1) $A=\{x|-2<x<5, x\in\mathbf{Z}\}$;
 (2) $B=\{(x, y)|2x+y=5, x\in\mathbf{N}, y\in\mathbf{N}\}$.



解析

(1) $A=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; (2) $B=\{(0, 5), (1, 3), (2, 1)\}$.



技巧点拨

掌握集合的两种表示方法:列举法、描述法.




变式训练 2


用合适的方法表示下列集合:

- (1)11, 12, 13, 14, 15, ...;
 (2) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$.

例 3 设集合 $A=\{0\}$, 下列结论正确的是().

- A. $A=0$ B. $A=\emptyset$ C. $0\in A$ D. $\emptyset\in A$

 **解析** 本题考查了元素与集合、集合与集合之间的关系. 答案选 C.

 **技巧点拨** 正确理解符号 $\in, \notin, \subseteq, \supseteq$ 的意义是正确处理此类问题的关键.



变式训练 3

下列说法中正确的有()个.

①空集没有子集; ②任何集合至少有两个子集; ③空集是任何集合的真子集; ④若 $\emptyset \subsetneq A$, 则 $A \neq \emptyset$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

例 4 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + p = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 p 的取值范围.

 **解析** 由题意得: $A = \{-1, 2\}$, 因为 $B \subseteq A$, 所以 $B = \emptyset$ 或 $B = \{-1\}$ 或 $B = \{2\}$ 或 $B = \{-1, 2\}$.


又因为 $B = \{x | x^2 - 4x + p = 0\}$, 所以 $B = \{-1, 2\}$ 不成立.

当 $B = \emptyset$ 时, $\Delta = (-4)^2 - 4p = 16 - 4p < 0$, 解得 $p > 4$;

当 $B = \{-1\}$ 时, $\begin{cases} \Delta = 16 - 4p = 0, \\ (-1)^2 - 4 \times (-1) + p = 0, \end{cases}$ 无解;

当 $B = \{2\}$ 时, $\begin{cases} \Delta = 16 - 4p = 0, \\ 2^2 - 4 \times 2 + p = 0, \end{cases}$ 解得 $p = 4$.

综上所述, 实数 p 的取值范围是 $p \in [4, +\infty)$.

 **技巧点拨** 本题考查了两个集合包含或相等关系的问题, 首先可以建立方程(组), 然后解出未知数, 最后利用集合元素的特征进行检验.



变式训练 4

已知集合 $A = \{1, 1+m, 1+2m\}$, $B = \{1, n, n^2\}$, 其中, $m, n \in \mathbf{R}$, 若 $A = B$, 求 m, n 的值.


例 5 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\}$, 则集合 A 中元素的个数为().


A. 9

B. 8

C. 5

D. 4

 **解析** 由 $x^2 + y^2 \leq 3$ 可知 $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$. 又因为 $x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}$, 所以 $x \in \{-1, 0, 1\}$, $y \in \{-1, 0, 1\}$, 所以集合 A 中元素的个数为 9.

 **技巧点拨** 对于求解集合中元素个数的题目, 应首先求出集合, 然后根据集合中元素的互异性求出集合中元素的个数, 或利用数形结合的方法求出集合中元素的个数.



变式训练 5

已知集合 $A = \{1, 2, 4\}$, 集合 $B = \{x | x = a + b, a \in A, b \in A\}$, 则集合 B 中元素的个数为 _____.

例 6 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 0 \leq x < 2\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 求 $A \cap B, A \cup B, \complement_U A \cap B$.



解析 $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\} = \{x | -1 < x < 3\}$, $\complement_U A = \{x | x < 0 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 0 \leq x < 2\}$, $A \cup B = \{x | -1 < x < 3\}$, $\complement_U A \cap B = \{x | -1 < x < 0 \text{ 或 } 2 \leq x < 3\}$.



技巧点拨 考查对集合运算的理解及性质的运用.



变式训练 6

设全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, 集合 $B = \{2, 3, 4\}$, 求 $A \cap B, A \cup B, \complement_U A \cup \complement_U B$.

例 7 已知集合 $M = \{x | a \leq x \leq a + 3\}$, $N = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.



解析 如图 1-3 所示, 要使 $M \cap N = \emptyset$, 必须满足 $\begin{cases} a + 3 \leq 5, \\ a \geq -1, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq a \leq 2$, 所以实数 a 的取值范围为 $-1 \leq a \leq 2$.

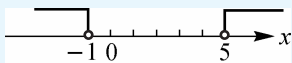


图 1-3



技巧点拨 解题时利用数轴表示集合, 便于寻求满足条件的实数 a . 特别需要注意的是“端点值”的问题, 要明确是能取“=”还是不能取“=”.



变式训练 7

已知 $A = \{x | a \leq x \leq a + 3\}$, $B = \{x | x > 1 \text{ 或 } x < -6\}$.

- (1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围;
- (2) 若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值范围.

8. 已知集合 $M = \{-1, 0, m^2\}$, $N = \{-1, 0, 2m-1\}$, 若 $M=N$, 则实数 $m = (\quad)$.

- A. -1 B. 1 C. 0 D. ± 1

9. 设集合 $M = \{x | x \leq \sqrt{5}\}$, $a = 2$, 则下列关系正确的是().

- A. $a \subseteq M$ B. $a \notin M$ C. $a \in M$ D. $a \notin M$

10. 下列集合 M 与 N 表示同一个集合的是().

- A. $M = \{(2, 3)\}$, $N = \{2, 3\}$ B. $M = \{3.14\}$, $N = \{\pi\}$
 C. $M = \{0\}$, $N = \emptyset$ D. $M = \{0, 1, 2, 3\}$, $N = \{x \in \mathbf{N} | x \leq 3\}$

11. 方程组 $\begin{cases} 2x+y=0, \\ x-y+3=0 \end{cases}$ 的解集为().

- A. $\{-1, 2\}$ B. $(-2, 2)$
 C. $\{(-1, 2)\}$ D. $\{(x, y) | x = -1 \text{ 或 } y = 2\}$

12. 集合 $A = \{1, 3, t\}$, $B = \{t^2 - t + 1\}$, 若 $A \cup B = A$, 则实数 t 的取值范围是().

- A. $t = 1$ B. $t = 2, t = -1, t = 0$ C. $t = 2, t = \pm 1$ D. 不存在

13. 如果集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0\}$ 中只有一个元素, 则 a 的值是().

- A. 0 B. 0 或 1 C. 1 D. 不能确定

14. 设集合 $A = \{x | |x| \leq 4\}$, $B = \{x | x^2 - 10x + 16 < 0\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

- A. $[-4, 8]$ B. $(2, 4]$ C. $(-4, 8)$ D. $[2, 4)$

15. 已知全集 $U = \{x | x \leq 4, x \in \mathbf{N}\}$, 集合 $A = \{x | x > 2, x \in U\}$, 则 $\complement_U A = (\quad)$.

- A. $\{1\}$ B. $\{0\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

16. 已知集合 $\{1, 2\} \cup A = \{1, 2, 3\}$, 则符合条件的集合 A 的个数是().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

17. 设集合 $A = \{x | x > 2\}$, $B = \{x | x < 5\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$.

- A. $\{x | x > 2\}$ B. $\{x | x < 5\}$ C. $\{x | 2 < x < 5\}$ D. \mathbf{R}

18. 如图 1-5 所示, 阴影部分所表示的集合是().

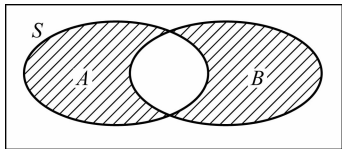


图 1-5

- A. $\complement_S A \cap B$ B. $\complement_S A \cup B$
 C. $(A \cup B) \cap \complement_S (A \cap B)$ D. $(A \cup B) \cup \complement_S A \cap B$

19. 设全集 $U = \mathbf{N}^*$, 集合 $A = \{2, 3, 6, 8, 9\}$, 集合 $B = \{x | x > 3, x \in \mathbf{N}^*\}$, 则图 1-6 中阴影所表示的集合是().

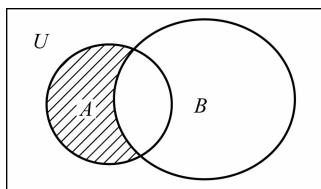


图 1-6

- A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{6, 8, 9\}$

20. 设集合 $M = \{0, 1, 2\}$, $N = \{1, 2\}$, $P = \{0, 2, 3\}$, 则 $M \cap N \cap P =$ ().

- A. $\{0, 2\}$ B. $\{0, 2, 3\}$ C. $\{2\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$

二、填空题

1. 用适当的符号 ($\in, \notin, \subseteq, \supseteq, =$) 填空.

(1) 3 _____ $\{2, 3\}$; (2) π _____ \mathbf{Q} ; (3) $\{1, 2, 3\}$ _____ \mathbf{Z} ;

(4) \mathbf{N}^* _____ \mathbf{Z} ; (5) $\{-3, 3\}$ _____ $\{x | x^2 = 9\}$.

2. 已知集合 $P = \{x | 2 < x < a, x \in \mathbf{N}\}$, 且集合 P 中恰有 3 个元素, 则整数 $a =$ _____.

3. 绝对值等于 1 的所有整数组成的集合是 _____.

4. 下列六个关系式: ① $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$; ② $\{a, b\} = \{b, a\}$; ③ $0 = \emptyset$; ④ $0 \in \{0\}$; ⑤ $\emptyset \in \{0\}$; ⑥ $\emptyset \subseteq \{0\}$. 其中正确的个数为 _____.

三、解答题

1. 写出集合 $\{-3, -1, 1, 3\}$ 的所有子集, 并指出哪些是真子集.

2. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, 集合 $B = \{x | x = ab, a \in A, b \in A\}$.

(1) 用列举法写出集合 B ;

(2) 判断集合 B 的元素和集合 A 的关系.

3. 已知集合 $\{1, a, b\}$ 与 $\{-1, -b, 1\}$ 是同一个集合, 求实数 a, b 的值.

4. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{x | |x| = y + 1, y \in A\}$, 求 $\complement_U B$.

提升进阶

- 满足 $\{a, b\} \subsetneq A \subseteq \{a, b, c, d, e\}$ 的集合 A 的个数是().
 A. 9 B. 8 C. 7 D. 6
- 已知集合 $A = \{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$.
 (1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值;
 (2) 若 A 中恰有两个元素, 求 a 的取值范围;
 (3) 若 A 中最多只有一个元素, 求 a 的取值范围.
- 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid ax + 2 = 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 求实数 a 的值组成的集合.

第二节 充分必要条件



真题回放站

- 【2018·贵州省分类考试】“ $a > 0$ 且 $b > 0$ ”是“ $ab > 0$ ”的()条件.
 A. 充分 B. 必要 C. 充要 D. 既不充分也不必要

【专家详解】从逻辑推理关系上判断(定义法): 对于两个命题 p, q , 若 $p \Rightarrow q$ 但 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充分不必要条件. 根据题意可知, 前者小范围能推出后者大范围, 后者大范围推不出前者小范围. 故选 A.



知识面面观

1. 命题的概念

在数学中, 我们把用语言、符号或式子表达的, 可以判断真假的陈述句叫做命题. 正确的命题叫做真命题, 记作 T; 错误的命题叫做假命题, 记作 F. T 和 F 称为命题的真值(有的书上用 0 和 1 作为命题的真值). p 与 q 为等值的命题记作 $p = q$.

2. 充要条件的定义

(1) 对于两个命题 p, q , 如果有 $p \Rightarrow q$, 则称 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件.

注意: p 是 q 的充分条件, 是指只要具备了条件 p , 那么 q 就一定成立, 即命题中的条件是充分的; q 是 p 的必要条件, 是指如果不具备条件 q , 则 p 就不能成立, 即 q 是 p 成立的必不可少的条件.

(2) 如果 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 即 $p = q$, 则 p 是 q 的充分且必要条件, 简称充要条件.

注意: ① 当 $p \Leftrightarrow q$ 时, 也称 p 与 q 是等价的.

② 与充要条件等价的词语有“当且仅当”“等价于”“有且只有”……“反过来也成立”等.

3. 充要条件的判断方法

(1) 从逻辑推理关系上判断(定义法).

① 若 $p \Rightarrow q$ 但 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充分不必要条件.

② 若 $p \not\Rightarrow q$ 但 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的必要不充分条件.

③ 若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充要条件.

④ 若 $p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

(2) 从命题所对应的集合与集合之间的关系上判断(集合法).

设命题 p 对应的集合为 A , 命题 q 对应的集合为 B .

① 若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的充分条件.

② 若 $A \supseteq B$, 则 p 是 q 的必要条件.

③ 若 $A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$, 即 $A = B$, 则 p 是 q 的充要条件.

④ 若 $A \not\subseteq B$ 且 $A \not\supseteq B$, 则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.



课堂讲与练

例 1 已知 $p: |3x-5| < 4, q: (x-1)(x-2) < 0$, 则 p 是 q 的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件



解析 $p: |3x-5| < 4 \Rightarrow p: \frac{1}{3} < x < 3, q: (x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow q: 1 < x < 2$. 所以 $p \Rightarrow q$ 但 $q \not\Rightarrow p$, 所以 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.



技巧点拨 判断充分、必要条件时, 要先分清条件和结论, 进而找到条件与结论之间的逻辑推理关系. 常用的判断法: 定义法和集合法.



变式训练 1

设命题甲为 $0 < x < 5$, 命题乙为 $|x-2| < 3$, 那么甲是乙的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

例 2 已知集合 $A = \left\{ y \mid y = x^2 - \frac{3}{2}x + 1, x \in \left[\frac{3}{4}, 2 \right] \right\}, B = \{ x \mid x + m^2 \geq 1 \}, p: x \in A, q: x \in B$, 并且 p 是 q 的充分条件, 求实数 m 的取值范围.



解析

由题意得集合 $A = [\frac{7}{16}, 2]$, $B = [1 - m^2, +\infty)$, 由于 p 是 q 的充分条件, 所以 $A \subseteq B$, 所以 $1 - m^2 \leq \frac{7}{16}$, 解得 $m \geq \frac{3}{4}$ 或 $m \leq -\frac{3}{4}$, 即实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, +\infty)$.



技巧点拨

本题主要考查集合的运算及充要条件的判断, 运用不等式之间的关系是解题的关键.



变式训练 2

已知 $p: x^2 - 2x - 3 < 0$, $q: -a < x - 1 < a$. 若 q 是 p 的一个必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围.



巩固与提升

基础实战

一、选择题

- “ $A \cap B = A$ ”是“ $A \subseteq B$ ”的().
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- “ $x < -2$ ”是“不等式 $x^2 - 4 > 0$ 成立”的().
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- “ $|x| \geq 1$ ”是“ $x \geq 1$ ”的().
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- 设甲是乙的充分不必要条件, 乙是丙的充要条件, 丁是丙的必要不充分条件, 则甲是丁的().
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- “ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ”是“ $\tan \alpha = 1$ ”的().
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件

二、解答题

1. 判断下列问题中, p 是 q 的什么条件.

(1) $p: x^2 \geq y^2, q: x \geq y$;

(2) $p: x \in A \cup B, q: x \in A \cap B$;

(3) $p: x > 3, q: x > 2$;

(4) $p: a$ 是有理数, $q: a+2$ 是有理数.

2. 求一个对于一切实数 x 都有 $ax^2 - ax + 1 > 0$ 成立的充要条件.

提升进阶

已知 $p: -2 \leq x \leq 10, q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$, 若 p 是 q 的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.



第一章单元检测

一、单项选择题

1. 设集合 $A = \{-2, 2\}, B = \{-1, 2\}$, 则 $A \cup B =$ ().

A. $\{2\}$

B. $\{-2, -1\}$

C. $\{-2, 2\}$

D. $\{-2, -1, 2\}$

2. 设集合 $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $A \cup B =$ ().

A. $\{4\}$

B. $\{2, 4\}$

C. $\{1, 2, 4\}$

D. $\{1, 2, 3, 4\}$

3. 设集合 $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $A \cap B =$ ().

A. \emptyset

B. $\{1, 2\}$

C. $\{1, 2, 4\}$

D. $\{1, 2, 3, 4\}$

4. 设集合 $A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 3\}$, 则 $A \cup B =$ ().

A. $\{0, 1, 2\}$

B. $\{1, 3\}$

C. $\{1\}$

D. $\{0, 1, 2, 3\}$

5. “ $x < 2$ ”是“ $x^2 - x - 2 < 0$ ”的().
 A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. “ $|x| \leq 2$ ”是“ $-2 \leq x \leq 2$ ”的().
 A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则“ $ac = b^2$ ”是“ a, b, c 成等比数列”的().
 A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
8. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则“ $a > b$ ”是“ $ac^2 > bc^2$ ”的().
 A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
9. “ $x > 0$ ”是“ $x > 1$ ”的().
 A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
10. 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{-1, 0\}$, 则 $A \cup B =$ ().
 A. \emptyset B. $\{0\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{0, 1\}$

二、多项选择题

1. 下列对象能组成集合的是().
 A. 全体自然数 B. 大于 3 的所有质数
 C. 所有著名体操运动员 D. 某高职院校的足球队员
2. 下列集合是有限集的是().
 A. $\{x | x \leq 50, x \in \mathbf{N}\}$ B. $\{0\}$ C. $\{x | x^2 - 1 = 0\}$ D. $\{x | 0 < x < 2\}$
3. 下列命题正确的是().
 A. $\emptyset \cup A$ B. $\emptyset \subseteq A$ C. $A \subseteq A$ D. $A \cup A$
4. 下列命题正确的是().
 A. $2, 2 \in \mathbf{Q}$ B. $\pi \in \mathbf{Q}$ C. $0 \in \mathbf{N}$ D. $0 \notin \mathbf{Z}$
5. 下列运算正确的是().
 A. $A \cup B = B \cup A$ B. $A \cap B = B \cap A$ C. $\bigcup_s S = \emptyset$ D. $\bigcup_s S = S$
6. 集合 $A = \{m - 1, 2, m^2 - 1\}$ 中的 m 不能取的值是().
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
7. 若 $3 \in \{x - 1, x^2 + 1\}$, 则 x 的值可能是().
 A. 4 B. 1 C. $\pm\sqrt{2}$ D. 0
8. 集合 $A = \{(x, y) | y = x + 2\}$, 则 A 中的元素有().
 A. 0 B. 2 C. (0, 2) D. (2, 4)
9. 集合 $N = \{1, 2, 3\}$, 则下列等式成立的是().
 A. $N \in 1$ B. $2 \subseteq N$ C. $3 \in N$ D. $0 \notin N$
10. 集合 $A = \{1, 3, x + 2\}$, $B = \{1, x^2\}$, 若 $A \cap B = \{1, 4\}$, 则 x 不可能的值是().
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

三、填空题

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, a\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $a =$ _____.
2. 设集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 6, 9\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
3. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
4. 设集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cup B =$ _____.
5. 设集合 $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$, 则 $A \cap B =$ _____.