# 第一章

# 集　合

## 考纲再现

(1)了解集合元素的性质、空集与全集的意义.
(2)掌握集合的表示方法.
(3)理解子集、真子集和集合相等的概念.
(4)掌握交集、并集和补集运算.
(5)掌握简单的充分条件、必要条件和充要条件的判定方法.

## 考情观察室

| | 考点 | 近几年高职考分值统计 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 |
| 命题规律 | 集合的概念与集合之间的关系 | — | — | 7 | — | — | — |
| | 集合的运算 | 7 | 7 | — | 7 | 6 | 6 |
| | 充要条件 | 7 | 7 | 7 | — | — | — |
| 命题趋势 | 集合在近几年重庆市高职考中以选择题为主,主要从三个方面进行考查:一是考查集合的概念、集合间的关系,常用数集的符号表示;二是考查集合的运算和集合语言的运用.命题常以两个集合的交集和补集运算为主,多与不等式相结合,需要重点掌握;三是考查充分条件、必要条件和充要条件的判定方法. | | | | | | |

# 第一节　集合的概念与集合之间的关系

## 真题回放站

(2017 · 重庆市对口高职)　设集合 $A=\{0\}$，则下列结论正确的是(　　).

A. $A=0$　　B. $A=\varnothing$　　C. $0\in A$　　D. $\varnothing\in A$

【专家详解】本题考查元素与集合的关系. 答案选 C.

## 知识面面观

### 一、集合的概念与表示法

**1. 集合**

把具有某种属性的一些确定的对象看成一个整体，便形成一个集合，常用大写的拉丁字母和英文字母等表示.

**2. 元素**

集合中的每一个确定的对象叫作这个集合的元素，常用小写字母 $a,b,c$ 等来表示.

**3. 元素与集合的关系及性质**

如果 $a$ 是集合 $A$ 的一个元素，就说 $a$ 属于 $A$，记作 $a\in A$；如果 $a$ 不是集合 $A$ 的元素，就说 $a$ 不属于 $A$，记作 $a\notin A$. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性的特征.

**4. 常用的集合**

空集($\varnothing$)、正整数集($\mathbf{Z}^+$ 或 $\mathbf{N}^*$)、自然数集($\mathbf{N}$)、整数集($\mathbf{Z}$)、有理数集($\mathbf{Q}$)、实数集($\mathbf{R}$).

**5. 集合的两种表示法**

(1)列举法. 把集合的元素一一列举出来，写在大括号内，这种表示集合的方法叫作列举法.

注意：用列举法表示集合时，要注意以下几点：

①元素之间用逗号“,”隔开.

②元素不能重复(满足集合中元素的互异性).

③元素不能遗漏.

④当集合中的元素较少时用列举法比较简单；若集合中的元素较多或无限，但存在一定的规律性，在不发生误解的情况下，也可以用列举法表示.

(2)描述法. 用集合所含元素的共同特性表示集合的方法称为描述法.

描述法表示的一般形式是 $\{x\mid p(x)\}$，其中“$x$”是集合中元素的代表形式，“$p(x)$”是集合中元素的共同特征，两者之间的竖线不可省略.

注意：用描述法表示集合时，要注意以下几点：

①写清楚集合中元素的代表形式(一般用小写字母表示).

②写明集合中元素的特征或性质.

③用于描述元素特征的语句要力求简明、准确,不产生歧义;多层描述时,应当准确使用“且”“或”等关联词.

④所有描述的内容都要写在大括号内.

⑤在不引起混淆的情况下,用描述法表示集合时有时也可以省去竖线和竖线左边的部分.例如,正整数的集合可简记为{正整数},但是,集合$\{x|x>1\}$就不能省略竖线及其左边的$x$.

## 二、集合间的关系

### 1. 子集

一般地,对于两个集合$A$,$B$,如果集合$A$中任何一个元素都是集合$B$的元素,那么,集合$A$就叫作集合$B$的子集,记作$A\subseteq B$或者$B\supseteq A$,读作“$A$包含于$B$”,或“$B$包含$A$”.

当集合$A$不包含于集合$B$,或集合$B$不包含集合$A$时,记作$A\nsubseteq B$或$B\nsupseteq A$.

**性质:**任何一个集合是它本身的子集,即$A\subseteq A$;空集是任何集合的子集,即$\varnothing\subseteq A$;对集合$A$,$B$,$C$,若$A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则$A\subseteq C$.

**注意:**不能把子集说成由原来集合中的部分元素组成的集合,因为$A$的子集包括它本身,而这个子集由$A$的全体集合组成;空集也是$A$的子集,但这个子集中不包括$A$中的任何元素.

### 2. 真子集

如果$A$是$B$的子集,并且$B$中至少有一个元素不属于$A$,则$A$是$B$的真子集($A$包含于$B$但不等于$B$),记作$A\subsetneqq B$或$B\supsetneqq A$.

**性质:**空集是任何非空集合的真子集;对于集合$A$,$B$,$C$,若$A\subsetneqq B$,$B\subsetneqq C$,则$A\subsetneqq C$.

**注意:**元素与集合之间是属于关系,集合与集合之间是包含关系.

### 3. 集合相等

一般地,对于两个集合$A$与$B$,如果集合$A$中的任何一个元素都是集合$B$的元素,同时集合$B$中的任何一个元素都是集合$A$的元素,我们就说集合$A$等于集合$B$,记作$A=B$($A$,$B$的所有元素均相等).

**注意:**(1)若两个集合相等,则两个集合所含元素完全相同,反之亦然.

(2)要判断两个集合是否相等,对于元素较少的有限集,主要看它们的元素是否完全相同;若是无限集,则从“互为子集”入手进行判断.

## 课堂讲与练

**【例1】** 设集合$A=\{a\}$,下列结论正确的是(　　).

A. $a\in A$　　　　B. $a\notin A$

C. $a\subsetneqq A$　　　　D. $a\nsubseteq B$

**【解析】**本题考查了元素与集合、集合与集合之间的关系.答案选A.

**【技巧点拨】**正确理解符号$\in$,$\notin$,$\subseteq$,$\subsetneqq$的意义,是正确处理此类问题的关键.

**变式训练 1**

下列说法正确的有(　　)个.

①空集没有子集;②任何集合至少有两个子集;③空集是任何集合的真子集;④若$\varnothing \subsetneqq A$,则$A \neq \varnothing$.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

【例 2】 用列举法表示下列集合:

(1)$A=\{x \mid -2<x<5, x \in \mathbf{Z}\}$;

(2)$B=\{(x,y) \mid 2x+y=5, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$.

【解析】(1)$A=\{-1,0,1,2,3,4\}$;(2)$B=\{(0,5),(1,3),(2,1)\}$.

【技巧点拨】掌握集合的两种表示方法.

**变式训练 2**

用合适的方法表示下列集合:

(1)$\{11,12,13,14,15,\cdots\}$;

(2)$\{1,4,9,16,25,36\}$.

【例 3】 已知集合$A=\{x \mid x^2-x-2=0\}$,$B=\{x \mid x^2-4x+p=0\}$,若$B \subseteq A$,求实数$p$的取值范围.

【解析】由题意得:$A=\{-1,2\}$,因为$B \subseteq A$,所以$B=\varnothing$或$B=\{-1\}$或$B=\{2\}$或$B=\{-1,2\}$.

又因为$B=\{x \mid x^2-4x+p=0\}$,所以$B=\{-1,2\}$不成立.

当$B=\varnothing$时,$\Delta=(-4)^2-4p=16-4p<0$,解得$p>4$;

当$B=\{-1\}$时,$\begin{cases}\Delta=16-4p=0\\(-1)^2-4\times(-1)+p=0\end{cases}$,无解;

当$B=\{2\}$时,$\Delta=16-4p=0$,$2^2-4\times 2+p=0$,解得$p=4$.

综上,实数$p$的取值范围是:$p \in [4,+\infty)$.

【技巧点拨】两个集合包含或相等关系的问题,通过建立方程(组),然后解出未知数,最后利用集合元素的特征进行检验即可.

**变式训练 3**

已知集合 $A=\{1,1+m,1+2m\}$，$B=\{1,n,n^2\}$，其中，$m,n\in\mathbf{R}$，若 $A=B$，则 $m=$ ________，$n=$ ________.

**【例 4】** 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 3,x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\}$，则 $A$ 中元素的个数为(　　).

A. 9　　B. 8　　C. 5　　D. 4

**【解析】**由 $x^2+y^2\leqslant 3$，知 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$. 又 $x\in\mathbf{Z}$，$y\in\mathbf{Z}$，所以 $x\in\{-1,0,1\}$，$y\in\{-1,0,1\}$. 所以 $A$ 中元素的个数为 9.

**【技巧点拨】**对于求解集合中元素个数的题目，首先求出集合，然后根据集合中元素的互异性求出集合中元素的个数，或利用数形结合的方法求出集合中元素的个数.

**变式训练 4**

已知集合 $A=\{1,2,4\}$，集合 $B=\{x\mid x=a+b,a\in A,b\in A\}$，则集合 $B$ 中元素的个数为______.

## 巩固与提升

### 基础训练

**一、选择题**

1. 下列命题所列对象中能组成集合的是(　　).

A. 好人　　B. 非常小的数

C. 有趣的书　　D. 小于 5 的数

2. 给出下面四个关系：①$0\in\mathbf{Q}$；②$\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}$；③$Z\subseteq\mathbf{Q}$；④$\varnothing\subsetneqq\{0\}$，其中正确的个数为(　　).

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

3. 用列举法表示集合 $\{x\mid x^2-3x+2=0\}$ 的结果是(　　).

A. $(1,2)$　　B. $1,2$

C. $\{1,2\}$　　D. 以上都不是

4. 集合 $\{1,2,3,4\}$ 所有子集的个数是(　　).

A. 8　　B. 14　　C. 15　　D. 16

5. 下列选项中表述正确的是(　　).

A. 由 1，3，5，7，5，3 组成的集合中有 6 个元素

B. 周长为 16 cm 的三角形组成的集合是有限集合

C. 集合 $\{0\}$ 是空集

D. 一年级(3)班的所有同学可以组成集合

6. 用列举法表示"大于 2 且小于 9 的偶数的全体"构成的集合是(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{4,6,8\}$

C. $\{3,5,7\}$　　D. $\{3,4,5,6,7,8\}$

## 二、填空题

1. 用适当的符号($\in$，$\notin$，$\subseteq$，$\supseteq$，$=$)填空.

3 ________ $\{2,3\}$；　　π ________ $\mathbf{Q}$；　　$\{1,2,3\}$ ________ $\mathbf{Z}$；

$\mathbf{N}^*$ ________ $\mathbf{Z}$；　　$\{-3,3\}$ ________ $\{x|x^2=9\}$；

2. 绝对值等于1的所有整数组成的集合是________.

3. 已知集合 $P=\{x|2<x<a,x\in\mathbf{N}\}$，已知集合 $P$ 中恰有3个元素，则整数 $a=$________.

4. 下列六个关系式：①$\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$；②$\{a,b\}=\{b,a\}$；③$0=\varnothing$；④$0\in\{0\}$；⑤$\varnothing\in\{0\}$；⑥$\varnothing\subseteq\{0\}$. 其中正确的个数为________.

## 三、解答题

1. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$，集合 $B=\{x|x=ab,a\in A,b\in A\}$.

(1)用列举法写出集合 $B$；

(2)判断集合 $B$ 的元素和集合 $A$ 的关系.

2. 写出集合$\{-3,-1,1,3\}$的所有子集，并指出哪些是真子集.

3. 已知集合$\{1,a,b\}$与$\{-1,-b,1\}$是同一集合，求实数 $a,b$ 的值.

## 提升训练

1. 满足$\{a,b\}\subsetneqq A\subseteq\{a,b,c,d,e\}$的集合 $A$ 的个数是(　　).

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

2. 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 $A$ 中只有一个元素，求 $a$ 的值；

(2)若 $A$ 中恰有两个元素,求 $a$ 的取值范围;

(3)若 $A$ 中至多只有一个元素,求 $a$ 的取值范围.

3. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x|ax+2=0\}$,且 $B\subseteq A$,求实数 $a$ 的值组成的集合.

# 第二节　集合的运算

## 真题回放站

**(2015·重庆市对口高职)**　已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$,$A=\{1,3,5\}$,则 $\complement_U A=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{2,4\}$

C. $\{1,3,5\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

【专家详解】根据补集定义可知答案选 B.

**(2016·重庆市对口高职)**　已知集合 $A=\{-1,0,1\}$,$B=\{0,1,2\}$. 则 $A\cup B$ 中元素的个数为(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

【专家详解】根据并集定义可知答案选 C.

**(2018·重庆市对口高职)**　设集合 $A=\{-1,0\}$,$B=\{0,1\}$. 则 $A\cap B=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{-1\}$　　C. $\{0\}$　　D. $\{1\}$

【专家详解】根据交集定义可知答案选 C.

## 知识面面观

**1. 交集**

一般地，由既属于集合 $A$ 又属于集合 $B$ 的所有元素组成的集合，称为集合 $A$ 与集合 $B$ 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

性质：(1) $A\cap B=B\cap A$.

(2) $A\cap A=A$.

(3) $A\cap\varnothing=\varnothing$.

(4) $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$.

(5) 若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$.

**2. 并集**

一般地，由所有属于集合 $A$ 或属于集合 $B$ 的元素组成的集合，称为集合 $A$ 与集合 $B$ 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

性质：(1) $A\cup B=B\cup A$.

(2) $A\cup A=A$.

(3) $A\cup\varnothing=A$.

(4) $A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$.

(5) 若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$.

**3. 全集**

如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素，则称这个集合为全集，通常用 $U$ 表示.

注意：全集是一个相对的概念，在不同的情况下全集的概念也不同.

**4. 补集**

对于一个集合 $A$，由全集 $U$ 中不属于集合 $A$ 的所有元素组成的集合称为集合 $A$ 相对于全集 $U$ 的补集，简称为集合 $A$ 的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

性质：(1) $\complement_U(\complement_U A)=A$.

(2) $\complement_U\varnothing=U$，$\complement_U U=\varnothing$.

(3) $A\cup(\complement_U A)=U$.

(4) $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$.

## 课堂讲与练

**【例 1】** (1) 设集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4\}$，则 $A\cup B=$ (　　).

A. $\{3\}$　　B. $\{3,4\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

(2) 设集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $A\cap B=$ (　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{1,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

(3) 已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,a\}$，$A\cup B=\{1,2,3,4\}$，则 $a=$ ________.

【解析】(1)$A\cup B$ 是由集合 A 和集合 B 中所有元素组成的，因为 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$. 故选 D.

(2)$A\cap B$ 是由集合 A 和集合 B 中相同的元素组成的，集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，所以 $A\cap B=\{2,3\}$. 故选 B.

(3)根据并集运算可知 $a=4$.

【技巧点拨】弄清交集与并集之间的关系.

**变式训练 1**

1. 设集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{1,3\}$，则 $A\cap B=$(　　).

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,3\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

2. 设集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{-1,0\}$，则 $A\cup B=$(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\{0\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{0,1\}$

【例 2】　设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，集合 $B=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A\cap B$.

【解析】$B=\{x\mid x^2-2x-3<0\}=\{x\mid -1<x<3\}$，$\complement_U A=\{x\mid x<0$ 或 $x\geqslant 2\}$，

所以 $A\cap B=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$，$A\cup B=\{x\mid -1<x<3\}$，$\complement_U A\cap B=\{x\mid -1<x<0$ 或 $2\leqslant x<3\}$.

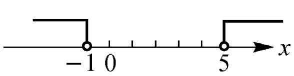
【技巧点拨】考查对集合运算的理解及性质的运用.

**变式训练 2**

设全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{0,1,2,3\}$，集合 $B=\{2,3,4\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A\cup\complement_U B$.

【例 3】　已知集合 $M=\{x\mid a\leqslant x\leqslant a+3\}$，$N=\{x\mid x<-1$ 或 $x>5\}$，若 $M\cap N=\varnothing$，求实数 $a$ 的取值范围.

【解析】如图所示，要使 $M\cap N=\varnothing$，必须满足 $\begin{cases}a+3\leqslant 5\\ a\geqslant -1\end{cases}$，解得 $-1\leqslant a\leqslant 2$，所以实数 $a$ 的取值范围为 $\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 2\}$.




【技巧点拨】解题时利用数轴表示集合，便于寻求满足条件的实数 $a$. 特别需要注意的是“端点值”的问题，是能取“$=$”还是不能取“$=$”.

**变式训练 3**

已知 $A=\{x|a\leqslant x\leqslant a+3\}$,$B=\{x|x>1$ 或 $x<-6\}$.

(1)若 $A\cap B=\varnothing$,求 $a$ 的取值范围;

(2)若 $A\cup B=B$,求 $a$ 的取值范围.

## 巩固与提升

### 基础训练

**一、选择题**

1. 已知集合 $A=\{2,3,4\}$,$B=\{2,4,6,8\}$. 则 $A\cap B=($　　$)$.

A. $\{2\}$　　B. $\{2,4\}$

C. $\{2,3,4,6,8\}$　　D. $\{3,6,8\}$

2. 已知集合 $U=\{1,3,5,7,9\}$,$A=\{1,5,7\}$. 则 $\complement_U A=($　　$)$.

A. $\{1,3\}$　　B. $\{3,7,9\}$

C. $\{3,5,9\}$　　D. $\{3,9\}$

3. 设集合 $A=\{x|-2<x<3\}$,$B=\{x|x\geqslant 1\}$. 则 $A\cup B=($　　$)$.

A. $\{x|1\leqslant x<3\}$　　B. $\{x|x<-2$或 $x>3\}$

C. $\{x|x>-2\}$　　D. $\{x|x<-2$或 $x\geqslant 1\}$

4. 设集合 $A=\{1,2,3\}$,集合 $B$ 满足 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$,则集合 $B$ 的个数为(　　).

A. 2　　B. 4　　C. 8　　D. 16

5. 设集合 $A=\{x|2\leqslant x<4\}$,$B=\{x|3x-7\geqslant 8-2x\}$,则 $A\cup B$ 等于(　　).

A. $\{x|x\geqslant 3\}$　　B. $\{x|x\geqslant 2\}$　　C. $\{x|2\leqslant x<3\}$　　D. $\{x|x\geqslant 4\}$

6. 集合 $A=\{0,2,a\}$,$B=\{1,a^2\}$. 若 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$,则 $a$ 的值为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

**二、填空题**

1. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$,$B=\{1,2,3\}$,则 $A\cap B=$________.

2. 已知集合 $A=\{(x,y)|x+y=1\}$,$B=\{(x,y)|2x-y=2\}$,则 $A\cap B=$________.

3. 已知集合 $A=\{x|x+1>0\}$,$B=\{x|3x-6<0\}$. 则 $A\cap B=$________.

4. 50 名学生参加甲、乙两项体育活动,每人至少参加了一项,参加甲项的学生有 30 名,参加乙项的学生有 25 名,则仅参加了两项活动的学生人数为________.

## 三、解答题

1. 已知集合 $A=\{1,5\}$，$B=\{1,2,x^2-1\}$，若 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$，求 $x$ 及 $A\cap B$.

2. 设全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{0,1,2,3\}$，集合 $B=\{2,3,4\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，$\complement_U A\cup\complement_U B$.

3. 已知集合 $A=\{-4,2a-1,a^2\}$，$B=\{a-5,1-a,9\}$，若 $A\cap B=\{9\}$，求 $a$ 的值.

## 提升训练

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-px+16=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+q=0\}$. 且 $A\cap B=\{2\}$. 求 $A\cup B$.

2. 已知集合 $A=\{y \mid y=x^2-2x+5, y\in \mathbf{N}\}$，$B=\{y \mid y=-x^2-4x+10, y\in \mathbf{N}\}$. 求 $A\cap B$ 中所有元素的和.

3. 某班 36 名同学参加数学、物理、化学课外探究小组，每名同学至多参加两个小组，已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为 26，15，13，同时参加数学和物理小组的有 6 人，同时参加物理和化学小组的有 4 人，求同时参加数学和化学小组的人数.

# 第三节　充要条件

## 真题回放站

（2015·重庆市对口高职）　命题“$a$ 是 8 的倍数”是命题“$a$ 是 4 的倍数”的（　　）.

A. 充要条件　　　　B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

【专家详解】小范围能推出大范围，大范围推不出小范围，故选 B.

## 知识面面观

### 1. 命题的概念

在数学中，我们把用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫命题. 正确的命题叫真命题，记作 T；错误的命题叫假命题，记作 F，T 和 F 叫作命题的真值（有的书上用 0 和 1 作为命题的真

值).$p$ 与 $q$ 为等值的命题记作 $p=q$.

### 2. 充分必要条件的定义

(1)对于两个命题 $p,q$,如果有 $p\Rightarrow q$,则称 $p$ 是 $q$ 的充分条件,$q$ 是 $p$ 的必要条件.

**注意:**$p$ 是 $q$ 的充分条件,是指只要具备了条件 $p$,那么 $q$ 就一定成立,即命题中的条件是充分的;$q$ 是 $p$ 的必要条件,是指如果不具备条件 $q$,则 $p$ 就不能成立,即 $q$ 是 p 成立的必不可少的条件.

(2)如果 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$,即 $p=q$,则 $p$ 是 $q$ 的充分且必要条件,简称充要条件.

**注意:**①当 $p\Leftrightarrow q$ 时,也称 $p$ 与 $q$ 是等价的.

②与充要条件等价的词语有:“当且仅当”“等价于”“有且只有”“必须且只须”“……,反过来也成立”等.

### 3. 充分必要条件的判断方法

(1)从逻辑推理关系上判断(定义法):

①若 $p\Rightarrow q$ 但 $q\nRightarrow p$,则 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件.

②若 $p\nRightarrow q$ 但 $q\Rightarrow p$,则 $p$ 是 $q$ 的必要不充分条件.

③若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$,则 $p$ 是 $q$ 的必要且充分条件(充要条件).

④若 $p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$,则 $p$ 是 $q$ 的既不充分也不必要条件.

(2)从命题所对应的集合与集合之间的关系上判断(集合法):

设命题 $p$ 对应的集合为 $A$,命题 $q$ 对应的集合为 $B$.

①若 $A\subseteq B$,则 $p$ 是 $q$ 的充分条件;若 $A\supseteq B$,则 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件.

②若 $A\supseteq B$,则 $p$ 是 $q$ 的必要条件;若 $A\supseteq B$,则 $p$ 是 $q$ 的必要不充分条件.

③若 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$,即 $A=B$,则 $p$ 是 $q$ 的充要条件.

④若 $AB$ 且 $A\supseteq B$,则 $p$ 是 $q$ 的既不充分也不必要条件.

## 课堂讲与练

**【例 1】** 已知 $p$:$|3x-5|<4$,$q$:$(x-1)(x-2)<0$,则 $p$ 是 $q$ 的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

**【解析】**$p$:$|3x-5|<4\Rightarrow p$:$\frac{1}{3}<x<3$,$q$:$(x-1)(x-2)<0\Rightarrow q$:$1<x<2$. 所以 $p\supsetneqq q$ 但 $q\Rightarrow p$,所以 $p$ 是 $q$ 的必要不充分条件. 选 B.

**【技巧点拨】**判断充分必要条件时,先要分清条件和结论,进而找到条件与结论之间的逻辑推理关系. 常用的判断法:定义法和集合法.

**变式训练 1**

设命题甲为 $0<x<5$,命题乙为 $|x-2|<3$,那么甲是乙的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【例 2】 已知集合 $A=\left\{y \middle| y=x^2-\frac{3}{2}x+1,x\in\left[\frac{3}{4},2\right]\right\}$，$B=\{x|x+m^2\geqslant 1\}$，$p$：$x\in A$，$q$：$x\in B$，并且 $p$ 是 $q$ 的充分条件，求实数 $m$ 的取值范围.

【解析】由题意得 $A=\left[\frac{7}{16},2\right]$，$B=[1-m^2,+\infty)$，由于 $p$ 是 $q$ 的充分条件，所以 $A\subseteq B$，所以 $1-m^2\leqslant\frac{7}{16}$，解得 $m\geqslant\frac{3}{4}$ 或 $m\leqslant-\frac{3}{4}$，即实数 $m$ 的取值范围是 $(-\infty,-\frac{3}{4}]\cup[\frac{3}{4},+\infty)$.

【技巧点拨】本题主要考查集合的运算，以及充要条件的判断，根据不等式之间的关系是解题的关键.

**变式训练 2**

已知 $p$：$x^2-2x-3<0$，$q$：$-a<x-1<a$. 若 $q$ 是 $p$ 的一个必要不充分条件，求实数 $a$ 的取值范围.

## 巩固与提升

### 基础训练

**一、选择题**

1. “$x<-2$”是不等式“$x^2-4>0$”成立的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. “$A\cap B=A$”是“$A\subseteq B$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 设甲是乙的充分不必要条件，乙是丙的充要条件，丁是丙的必要非充分条件，则甲是乙的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. “$|x|\geqslant 1$”是“$x\geqslant 1$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5.“$\alpha=\frac{\pi}{4}$”是“$\tan\alpha=1$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 命题“$x=3$”是命题“$x^2=9$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

## 二、填空题

1.“$x\in\mathbf{N}$”是“$x\in\mathbf{Z}$”的________条件.

2.“$x=0$ 或 $y=0$”是“$xy=0$”的________条件.

3.“$ab=0$”是“$a^2+b^2=0$”的________条件.

4.“$x=\frac{\pi}{4}$”是“$y=\sin 2x$ 取得最大值”的________条件.

## 三、解答题

1. 判断下列问题中，$p$ 是 $q$ 的什么条件？

(1)$p$:$x^2\geqslant y^2$,$q$:$x\geqslant y$.

(2)$p$:$x\in A\cup B$,$q$:$x\in A\cap B$;

(3)$p$:$x>3$,$q$:$x>2$;

(4)$p$:$a$ 是有理数,$q$:$a+2$ 是有理数.

2. 求一个对于一切实数 $x$ 都有 $ax^2-ax+1>0$ 成立的充要条件.

## 提升训练

1. 已知 $p$ 是 $q$ 的充分条件，$s$ 是 $r$ 的必要条件，$p$ 是 $s$ 的充要条件，则 $q$ 是 $r$ 的________条件.

2. 已知 $p$:$-2\leqslant x\leqslant 10$,$q$:$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$，若 $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件，求实数 $m$ 的取值范围.

# 第二章

# 不　等　式

## 考纲再现

(1)理解不等式的基本性质.
(2)掌握一元一次不等式(组)的解法.
(3)掌握一元二次不等式的解法.
(4)掌握绝对值不等式的解法.

## 考情观察室

| 命题规律 | 考点 | 近几年高职考分值统计 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 |
| | 不等式的性质 | — | — | 7 | — | — | 6 |
| | 不等式(组)的解法 | 19 | 19 | 12 | 12 | 12 | 6 |
| 命题趋势 | 不等式是近几年重庆市高职考中的必考内容,主要从两个方面进行考查:一是考查不等式的基本性质与二次函数性质、指数式、对数式的综合应用;二是考查一元一次不等式组、一元二次不等式、一元一次绝对值不等式的解法,会用集合、区间表示不等式的解集,需要重点掌握. | | | | | | |

# 第一节 不等式的基本性质

## 真题回放站

（2017·重庆市对口高职） 设 $a,b,c$ 均为实数，且 $a>b$，则下列不等式一定成立的是（　　）.

A. $ac>bc$　　　　B. $ac<bc$

C. $a+c>b+c$　　　　D. $a+c<b+c$

【专家详解】根据不等式的取特殊值法可知选 C.

## 知识面面观

### 1. 不等式的概念

表示不等关系的式子叫不等式，满足不等式的未知数的取值叫不等式的解集.

### 2. 比较实数大小的方法

（1）数轴上直观比较.

（2）差值比较法.

$a-b>0\Leftrightarrow a>b$.

$a-b=0\Leftrightarrow a=b$.

$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

### 3. 不等式的基本性质

（1）传递性.

如果 $a>b$，且 $b>c$，那么 $a>c$.

（2）加法性质.

如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$.

（3）乘法性质.

如果 $a>b,c>0$，那么 $ac>bc$.

如果 $a>b,c<0$，那么 $ac<bc$.

### 4. 区间

（1）有限区间. 数轴上两点间的一切实数所组成的集合叫做区间，其中，这两个点叫做区间端点.

有限区间表示集合（$a>b$）.

集合 $\{x|a<x<b\}\Rightarrow$ 开区间 $(a,b)$.

集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}\Rightarrow$ 闭区间 $[a,b]$.

集合 $\{x|a\leqslant x<b\}\Rightarrow$ 右半开区间 $[a,b)$.

集合 $\{x|a<x\leqslant b\}\Rightarrow$ 左半开区间 $(a,b]$.

（2）无限区间. 集合 $\{x|x>2\}$ 表示的区间的左端点为 2，不存在右端点，表示右端点任意大，记为

$(2,+\infty)$表示，其中符号“$+\infty$”读作“正无穷大”；类似地，集合$\{x|x<2\}$表示的区间用$(-\infty,2)$表示，其中符号“$-\infty$”读作“负无穷大”.

无限区间表示集合($a<b$).

集合$\{x|x<b\}\Rightarrow$区间$(-\infty,b)$.

集合$\{x|x\leqslant b\}\Rightarrow$区间$(-\infty,b]$.

集合$\{x|x>a\}\Rightarrow$区间$(a,+\infty)$.

集合$\{x|x\geqslant a\}\Rightarrow$区间$[a,+\infty)$.

集合 $\mathbf{R}\Rightarrow$区间$(-\infty,+\infty)$.

## 课堂讲与练

【例 1】 试比较 $2x^2-3x+7$ 与 $x^2+x+2$ 的大小.

【解析】(作差法)$2x^2-3x+7-(x^2+x+2)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$.

因此 $2x^2-3x+7>x^2+x+2$.

【技巧点拨】本题考查比较代数式大小的方法.作差法是判断两个数(或代数式)大小的基本方法之一，在比较代数式大小的时候要注意变量的取值范围.

**变式训练 1**

比较下列各式的大小：

(1)$(a+1)(a+3)$和$(a-1)(a+5)$；

(2)$a^2+10$ 和 $6a$.

【例 2】 下列命题中正确的是(　　).

A. 若 $a>b$，则 $ac>bc$

B. 若 $a>b$，且 $c>d$，则 $a+d>b+c$

C. 若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$

D. 若 $a>b$，且 $c>d$，则 $ac>bd$

【解析】对于本题选项 A，若 $c=0$，则 $ac=bc=0$，A 选项不成立；对于选项 B 和选项 D，可以通过特殊值来判断，令 $a=0$，$b=-1$，$c=-2$，$d=-3$，可排除选项 B 和 D. 本题选项 C 正确.

【技巧点拨】解答此类题目，要注意不等式性质的正确应用，同时也要考虑其他知识. 另外也可用特殊值法来判断.

**变式训练 2**

设 $a>b>c>1$,则下列不等式中不正确的是(　　).

A. $a^c>b^c$　　B. $\log_a b>\log_a c$

C. $c^a>c^b$　　D. $\log_b c<\log_a c$

**【例 3】** 已知 $6<a<10$,$2<b<3$,求 $a+b$,$a-b$,$ab$,$\frac{a}{b}$的取值范围.

**【解析】**对于 $a+b$,$ab$ 的取值范围可直接利用不等式的同向可加性和同向可乘性求得.对 $a-b$ 和 $\frac{a}{b}$的取值范围,应先求出 $-b$ 和$\frac{1}{b}$的取值范围.

根据不等式的同向可加性可知 $8<a+b<13$;根据不等式的同向可乘性可知 $12<ab<30$;

因为 $2<b<3$,所以 $-3<-b<-2$.

又因为 $6<a<10$,所以 $6-3<a-b<10-2$,即 $3<a-b<8$.

又因为$\frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$,所以$\frac{6}{3}<\frac{a}{b}<\frac{10}{2}$,即 $2<\frac{a}{b}<5$.

**【技巧点拨】**利用不等式的性质求取值范围一定要熟练掌握不等式的性质,特别是同向可加性和同向可乘性.

**变式训练 3**

已知 $-1<x+y<4$ 且 $2<x-y<3$,求 $z=2x-3y$ 的取值范围.

## 巩固与提升

### 基础训练

**一、选择题**

1. 如果 $a>b$,$b>c$,$c\geqslant n$,则下列各项中正确的是(　　).

A. $a<n$　　B. $a\leqslant n$　　C. $a>n$　　D. $a\geqslant n$

2. 如果 $a<b$,则下列各项中正确的是(　　).

A. $a-c>b-c$　　B. $ac<bc$　　C. $ac>bc$　　D. $a-c<b-c$

3. 下列命题正确的是(　　).

A. $a>b,c>d\Rightarrow ac>bd$　　B. $ac<bc\Rightarrow a<b$

C. $a>b\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N}^*)$　　D. $a>b>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

4. “$cd>0$”,是“$c>0$ 且 $d>0$”的(　　).

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也非必要条件

5. 设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=(-\infty,3]$,则$\complement_U A=$(　　).

A. $(-\infty,3]$　　B. $(-\infty,3)$

C. $(3,+\infty)$　　D. $[3,+\infty)$

6. 设集合 $M=[-3,2)$集合 $N=(0,5)$,则(　　).

A. $M\cup N=[-3,5)$　　B. $M\cap N=\varnothing$

C. $M\cup N=\mathbf{R}$　　D. $M\cap N=[0,2)$

## 二、填空题

1. 若 $a<-2a$,则 $a$ ______ 0,若 $a>2a$,则 $a$ ______ 0.

2. 若 $a>b,c+1<0$,则 $ac$ ______ $bc$,$ac^2$ ______ $bc^2$.

3. 比较大小:$\frac{7}{9}$ ______ $\frac{7}{11}$,$\frac{5}{8}$ ______ $\frac{8}{11}$,$a^2$ ______ 0.

4. 集合$\{x|1<x\leqslant 3\}$用区间表示为______.

集合$\{x|x\neq\frac{3}{5}\}$用区间表示为______.

## 三、解答题

1. 试比较 $2a^2-3a+6$ 与 $a^2+a+1$ 的大小.

2. 已知 $a>0$ 时,比较$\frac{a}{a+1}$与$\frac{a+1}{a+2}$的大小.

3. 已知 $a>b,c>d$，求证 $a+c>b+d$.

### 提 升 训 练

1. 如果 $m<n,m\neq0,n\neq0$，那么(　　).

A. $\frac{1}{m}<\frac{1}{n}$　　B. $\frac{1}{m}=\frac{1}{n}$　　C. $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$　　D. $\frac{1}{m}$和$\frac{1}{n}$的大小不能确定

2. 已知全集为 $\mathbf{R}$，$A=[-2,5)$，$B=(-\infty,3)$，求：

(1)$\complement_{\mathbf{R}}A$，$\complement_{\mathbf{R}}B$；(2)$\complement_{\mathbf{R}}A\cup\complement_{\mathbf{R}}B$；(3)$\complement_{\mathbf{R}}A\cap\complement_{\mathbf{R}}B$.

3. 某种商品的进价为 800 元，出售时标价为 1 200 元，后来由于该商品积压，商店准备打折出售，但要保持利润不低于 5%，则至多可打几折出售？

# 第二节　一元一次不等式（组）

## 真题回放站

**（2015·重庆市对口高职）** 解不等式组$\begin{cases}|2x-1|\leqslant3\\ \frac{x+1}{2}<x-\frac{1}{3}\end{cases}$.

**【专家详解】**由 $|2x-1|\leqslant3$ 得 $-3\leqslant2x-1\leqslant3$，所以 $-2\leqslant2x\leqslant4$，解得 $-1\leqslant x\leqslant2$.

由$\frac{x+1}{2}<x-\frac{1}{3}$得 $x+1<2x-\frac{2}{3}$，解得 $x>\frac{5}{3}$.

故不等式组$\begin{cases}|2x-1|\leqslant 3\\ \frac{x+1}{2}<x-\frac{1}{3}\end{cases}$的解集为$\left(\frac{5}{3},2\right]$.

## 知识面面观

### 1. 一元一次不等式

经过去分母、去括号、移项、合并同类项等变形后，能化为 $ax<b$ 或 $ax>b$ 或 $ax\leqslant b$ 或 $ax\geqslant b$ 的形式，其中 $x$ 是未知数，$a$，$b$ 是已知数，并且 $a\neq 0$，这样的不等式叫作一元一次不等式.

$ax<b$ 或 $ax>b$ 或 $ax\leqslant b$ 或 $ax\geqslant b(a\neq 0)$叫作一元一次不等式的标准形式.

### 2. 解一元一次不等式

去分母→去括号→移项→合并同类项(化成 $ax<b$ 或 $ax>b$ 的形式)→系数化为 1(化成 $x>\frac{b}{a}$ 或 $x<\frac{b}{a}$ 的形式).

一般地，几个一元一次不等式的解集的公共部分，叫作由它们组成的一元一次不等式组的解集.

解一元一次不等式组的一般步骤如下：

(1)求出这个不等式组中各个不等式的解集.

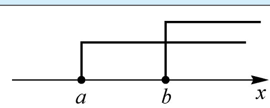
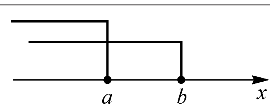
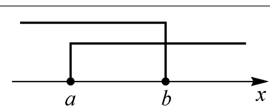
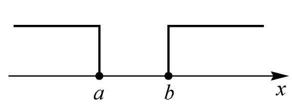
(2)利用数轴求出这些不等式的解集的公共部分，即可求出这个不等式组的解集.

注意：(1)利用数轴表示不等式的解集时，要注意表示数的点的位置上是空心圆圈，还是实心圆点.

(2)若不等式组中各个不等式的解集没有公共部分，则这个不等式组无解.

### 3. 由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集的情况

由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集的情况见下表.

| 不等式组 ($a<b$) | 图　示 | 解　集 | 口　诀 |
|---|---|---|---|
| $\begin{cases}x\geqslant a\\ x\geqslant b\end{cases}$ |  | $x\geqslant b$ | 同大取大 |
| $\begin{cases}x\leqslant a\\ x\leqslant b\end{cases}$ |  | $x\leqslant a$ | 同小取小 |
| $\begin{cases}x\geqslant a\\ x\leqslant b\end{cases}$ |  | $a\leqslant x\leqslant b$ | 大小、小大中间找 |
| $\begin{cases}x\leqslant a\\ x\geqslant b\end{cases}$ |  | 空集 | 小小、大大找不到 |

## 课堂讲与练

【例 1】 一元一次不等式 $3x+9>0$ 的解集是(    ).

A. $\{x|x\geqslant 3\}$

B. $\{x|x\geqslant -3\}$

C. $\{x|x>-3\}$

D. $\{x|x>3\}$

【解析】通过整理为 $x>-3$ 因此选 C.

【技巧点拨】掌握不等式移项,正负号要改变.

**变式训练 1**

一元一次不等式 $8-2x>0$ 的解集是(    ).

A. $\{x|x\leqslant 4\}$

B. $\{x|x\leqslant -4\}$

C. $\{x|x<4\}$

D. $\{x|x<-4\}$

【例 2】 解不等式组$\begin{cases}x+2\leqslant 0\\ x-3<0\end{cases}$.

【解析】考察不等式组的解的情况.经整理得 $x\leqslant -2$.

【技巧点拨】掌握不等式"同小取小".

**变式训练 2**

不等式组$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}\leqslant 3x\\ \dfrac{2x+3}{2}\geqslant 9x\end{cases}$的解集为(    ).

A. $\left\{x\middle|x\leqslant\dfrac{3}{16}\right\}$

B. $\left\{x\middle|x\leqslant -\dfrac{1}{5}\right\}$

C. $\left\{x\middle|\dfrac{1}{5}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{16}\right\}$

D. $\left\{x\middle|-\dfrac{1}{5}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{16}\right\}$

【例 3】 命题"$x\geqslant 3$"是命题"$16-2x\leqslant 0$"的(    ).

A. 充要条件

B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件

D. 即不充分也不必要条件

【解析】本题考查简易逻辑的判断方法.答案选 C.

【技巧点拨】掌握不等式小范围能推出大范围,大范围不能推出小范围.

**变式训练 3**

命题"$2x\geqslant 0$"是命题"$x=1$"的(    ).

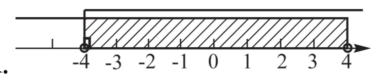
A. 充要条件

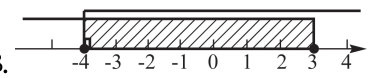
B. 充分而不必要条件

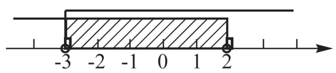
C. 必要而不充分条件

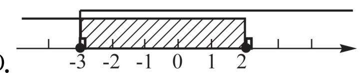
D. 即不充分也不必要条件

【例 4】 不等式组$\begin{cases}x+1>-2\\3-x\geqslant 1\end{cases}$的解在数轴上表示为(　　).

A. 


B. 


C. 


D. 


【解析】根据原不等式可得$-3<x\leqslant 2$. 答案选 D.

【技巧点拨】掌握不等式数形结合思想.

**变式训练 4**

解不等式 $5x+1\geqslant 6-3(x-1)$,并把解集在数轴上表示出来.

## 巩固与提升

### 基础训练

**一、选择题**

1. 不等式 $5-3x>2x$ 的解集为(　　).

A. $\{x|x>1\}$　　B. $\{x|x>-1\}$　　C. $\{x|x<1\}$　　D. $\{x|x<-1\}$

2. 一元一次不等式 $-5x+15<0$ 的解集是(　　).

A. $\{x|x<3\}$　　B. $\{x|x>3\}$

C. $\{x|x<-3\}$　　D. $\{x|x>-3\}$

3. 不等式 $5-2x>1$ 的正整数解集为(　　).

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{0,1\}$　　D. $\{1\}$

4. 不等式组$\begin{cases}x<5\\x-3\leqslant 0\end{cases}$的解集为(　　).

A. $\{x|x<5\}$　　B. $\{x|x\leqslant 5\}$

C. $\{x|x<3\}$　　D. $\{x|x\leqslant 3\}$

5. 不等式组$\begin{cases}x+2>0\\x-3<0\end{cases}$的解集为(　　).

A. $(-2,3)$　　B. $(-3,2)$　　C. $\varnothing$　　D. $\mathbf{R}$

6. “$x>-2$”是“$3x+20>11$”的(　　).

A. 充分条件　　　　B. 必要条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

## 二、填空题

1. 不等式组$\begin{cases}x-1>0\\x+3<0\end{cases}$的解集为________.

2. 不等式$\dfrac{17}{2x-8}>0$的解集为________.

3. 使函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$有意义,则$x$的取值范围是________.

4. 已知关于$x$的不等式组$\begin{cases}x-a>0\\3-x>-1\end{cases}$无解,则$a$的取值范围是________.

## 三、解答题

1. 解不等式组$\begin{cases}x+3>5\\x-4<4\end{cases}$的解集.

2. 解不等式组$\begin{cases}\dfrac{1}{2x-2}>0\\3-x\geqslant 1\end{cases}$的解集.

3. 解不等式组$\begin{cases} x+3>0 \\ x-4>0 \\ x\leqslant 8 \end{cases}$的解集,用区间表示.

## 提升训练

1. 解不等式$\dfrac{7-2x}{3}+3>\dfrac{3x+8}{4}-x$,并把解集在数轴上表示出来.

2. 若不等式组$\begin{cases} x>a \\ x<b \end{cases}$无解,求不等式组$\begin{cases} x>3-a \\ x<3-b \end{cases}$的解集.

3. 某公司决定从厂家购进甲、乙两种不同型号的显示器共 50 台,购进显示器的总金额不超过 77 000元,已知甲、乙型号的显示器价格分别为 1 000 元/台、2 000 元/台.

(1)求该公司至少购买甲型显示器多少台?

(2)若要求甲型显示器的台数不超过乙型显示器的台数,问有哪些购买方案?

# 第三节　一元二次不等式

## 真题回放站

(2015·重庆市对口高职)　不等式 $2x^2-3x-2<0$ 的解集为(　　).

A. $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$

C. $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{2},2\right)$

【专家详解】$2x^2-3x-2<0\Rightarrow(2x+1)(x-2)<0$,解得 $-\frac{1}{2}<x<2$,故选 D.

(2016·重庆市对口高职)　不等式 $\frac{x+2}{x-1}\leqslant 0$ 的解集为(　　).

A. $(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

C. $[-2,1]$　　D. $[-2,1)$

【专家详解】$\frac{x+2}{x-1}\leqslant 0\Rightarrow\begin{cases}(x+2)(x-1)\leqslant 0,\\ x-1\neq 0\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant x<1$,故选 D.

## 知识面面观

### 1. 一元二次不等式的定义

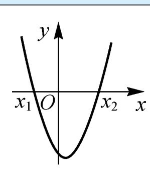
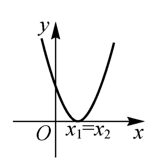
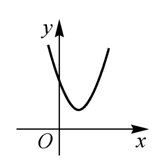
只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是 2 的不等式,称为一元二次不等式. 例如,$x^2-5x<0$.

任意的一元二次不等式,总可以化为一般形式:$ax^2+bx+c>0(a>0)$或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$.

### 2. 一般的一元二次不等式的解法

一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$的解集可以联系二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的图像,图像在 $x$ 轴上方部分对应的横坐标 $x$ 值的集合为不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集,图像在 $x$ 轴下方部分对应的横坐标 $x$ 值的集合为不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集.

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两根为 $x_1,x_2$ 且 $x_1\leqslant x_2$,$\Delta=b^2-4ac$,则相应的不等式的解集的各种情况见下表.

| $\Delta=b^2-4ac$ | $\Delta>0$ | $\Delta=0$ | $\Delta<0$ |
|---|---|---|---|
| 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图像 |  |  |  |

（续表）

| $\Delta=b^2-4ac$ | $\Delta>0$ | $\Delta=0$ | $\Delta<0$ |
|---|---|---|---|
| $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的解集 | 有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ | 有两相等实根 $x_1,x_2=-\dfrac{b}{2a}$ | 无实根 |
| $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集 | $\{x\mid x<x_1$或$x>x_2\}$ | $\left\{x\,\middle\vert\, x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$ | **R** |
| $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集 | $\{x\mid x_1<x<x_2\}$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |

注意：(1)一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根 $x_1,x_2$ 是相应的一元二次不等式的解集的端点取值，是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 $x$ 轴的交点的横坐标.

(2)表中不等式的二次项系数均为正，如果不等式的二次项系数为负，应先利用不等式的性质将其转化为二次项系数为正的形式，然后讨论解决.

### 3. 解一元二次不等式的步骤

(1)看二次项系数是否为正，若为负，则将二次项系数化为正数.

(2)写出相应的方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$，计算判别式 $\Delta$.

①当 $\Delta>0$ 时，求出两根 $x_1,x_2$，且 $x_1<x_2$(注意灵活运用因式分解和配方法).

②当 $\Delta=0$ 时，求根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

③当 $\Delta<0$ 时，方程无解.

(3)根据不等式，写出解集.

## 课堂讲与练

【例 1】 不等式$\dfrac{2x+3}{x+1}\leqslant0$ 的解集为(　　).

A. $\left[-\dfrac{3}{2},-1\right]$

B. $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]\cup(-1,+\infty)$

C. $\left[-\dfrac{3}{2},-1\right)$

D. $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]\cup[-1,+\infty)$

【解析】经整理得 $(2x+3)(x+1)\leqslant0$ 且 $x+1\neq0$，不等式的集为$\left[-\dfrac{3}{2},-1\right)$，因此选 C.

【技巧点拨】掌握不等式的等价变形，注意分母不为零.

**变式训练 1**

一元二次等式 $4x^2+3x-2\leqslant0$ 的解集为(　　).

A. $\left[\dfrac{-3-\sqrt{41}}{8},\dfrac{-3+\sqrt{41}}{8}\right]$

B. $\left(-\infty,\dfrac{-3-\sqrt{41}}{8}\right)\cup\left[\dfrac{-3-\sqrt{41}}{8},+\infty\right)$

C. $\varnothing$

D. $\left[\dfrac{-3-\sqrt{41}}{8},\dfrac{-3+\sqrt{41}}{8}\right)$

【例 2】 一元二次不等式$-x^2-5x+6\geqslant 0$的解集是(　　).

A. $[-6,1]$　　B. $(-6,1)$

C. $(-\infty,-6)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-6]\cup[1,+\infty)$

【解析】采用十字交叉相乘法或求根公式求解,并注二次项系数要为正数$-x^2-5x+6\geqslant 0$,变形得$x^2+5x-6\leqslant 0$. 解得$[-6,1]$,因此选 A.

【技巧点拨】掌握十字交叉相乘法或求根公式求解一元二次不等式,这是二次项系数为正数.

**变式训练 2**

一元二次不等式$2x^2-8x-4>x^2-4x+1$的解集是(　　).

A. $(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$　　B. $(-1,5)$

C. $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$　　D. $[-1,5]$

【例 3】 已知不等式$ax^2+bx+10\leqslant 0$的解集是$[2,5]$,则$a+b$的值等于(　　).

A. $-6$　　B. 6　　C. $-7$　　D. 7

【解析】经整理,$a+b=-6$,因此选 A.

【技巧点拨】掌握韦达定理(根与系数的关系)来求解$a,b$.

**变式训练 3**

已知一元二次不等式$mx^2+7x+2\leqslant 0$的解集为$\left[n,-\frac{1}{2}\right]$,则$m,n$的值为(　　).

A. $m=6,n=\frac{2}{3}$　　B. $m=6,n=-\frac{2}{3}$

C. $m=-6,n=\frac{2}{3}$　　D. $m=-6,n=-\frac{2}{3}$

## 巩固与提升

### 基础训练

**一、选择题**

1. 一元二次不等式$x^2+4x+3\leqslant 0$的解集为(　　).

A. $(-3,-1)$　　B. $(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$

C. $[-3,-1]$　　D. $(-\infty,-3)\cup[-1,+\infty)$

2. 不等式$\frac{x-1}{x+4}\geqslant 0$的解集为(　　).

A. $(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$　　B. $[-4,-1)$

C. $(-\infty,-4)\cup[1,+\infty)$　　D. $[-4,-1]$

3. 一元二次不等式$2x^2+15x+7\leqslant 0$的解集为(　　).

A. $(-\infty,-7)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $(-\infty,-7)\cup\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $\left[-7,-\frac{1}{2}\right]$　　D. $\left(-7,-\frac{1}{2}\right)$

4. 若不等式 $ax^2+bx-4>0$ 的解集为 $\left\{x\mid -2<x<-\frac{1}{4}\right\}$. 则 $a,b$ 的值分别为(　　).

A. $a=-8,b=-18$　　B. $a=-8,b=18$

C. $a=\frac{16}{9},b=-\frac{8}{9}$　　D. $a=\frac{18}{9},b=\frac{8}{9}$

5. 一元二次不等式 $(x-1)(3-x)<5-2x$ 的解集是(　　).

A. $(-\infty,2]\cup[4,+\infty)$　　B. $(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$

C. $[2,4]$　　D. $(2,4)$

6. 已知一元二次不等式 $mx^2+nx+8\leqslant 0$ 的解集是 $[3,4]$,则 $m+n$ 的值等于(　　).

A. $-4$　　B. $\frac{16}{3}$

C. 4　　D. $-\frac{16}{3}$

## 二、填空题

1. 已知一元二次不等式 $mx^2+2x+3\leqslant 0$ 的解集为 $\varnothing$,则实数 $m$ 的取值范围是________.

2. 已知一元二次不等式 $ax^2+8x+3\geqslant 0$ 的解集为 $\left[-\frac{1}{3},b\right]$. 则 $a,b$ 的值为________.

3. 若 $0<a<1$,则不等式 $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1<0$ 的解是________.

4. 一元二次不等式 $(x-a)(x-b)>0$ 的解集为 $\{x\mid x<2$ 或 $x>4\}$,则 $a\cdot b$ 的取值为________.

## 三、解答题

1. 求函数 $y=\sqrt{2x^2+2x-12}$ 的定义域.

2. 已知一元二次不等式组 $\begin{cases}x^2-7x+6<0\\x^2-8x+12\geqslant 0\end{cases}$,求该不等式组的解集.

3. 设一元二次不等式 $ax^2+bx+3>0(a\neq 0)$ 的解集为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]$. 求 $a,b$ 的值.

## 提 升 训 练

1. 若关于 $x$ 的不等式 $x^2+(m-2)x+\frac{1}{2}m-1\leqslant 0$ 的解集为空集,求 $m$ 的取值范围.

2. 如果以 $x,y$ 为未知数的方程组 $\begin{cases}x^2-2y^2=25\\x+y=k\end{cases}$ 有实数解,求 $k$ 的取值范围.

3. 用一根长 120 m 的绳子能围成一个面积不小于 800 $\mathrm{m}^2$ 的矩形吗?

# 第四节 含绝对值的不等式

## 真题回放站

(2018·重庆市对口高职) 不等式$|1-2x|\leqslant 3$的解集为( ).

A. $[-2,1]$　　B. $[-1,2]$

C. $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

【专家详解】根据题意得$-3\leqslant 1-2x\leqslant 3$,解得$-1\leqslant x\leqslant 2$. 故选 B.

(2019·重庆市对口高职) 不等式$|x-2|<2$的解集为( ).

A. $(0,4)$　　B. $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$

C. $(-2,2)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

【专家详解】根据题意得$-2<x-2<2$,即$0<x<4$. 故选 A.

## 知识面面观

1. 绝对值的概念

(1)代数定义.

对任意实数$x$,有$|x|=\begin{cases}x,x>0\\0,x=0\\-x,x<0\end{cases}$.

(2)几何意义. 数轴上表示实数$x$的点到原点的距离.

注意:一个数的绝对值是非负的.

2. 含绝对值的不等式的解集($0<a<b,m\in\mathbf{R},n\in\mathbf{R}$)

(1)$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$从而$|mx+n|<a\Leftrightarrow -a<mx+n<a$.

(2)$|x|>a\Leftrightarrow x<-a$或$x>a$从而$|mx+n|>a\Leftrightarrow mx+n<-a$或$mx+n>a$.

(3)$a<|mx+n|<b\Leftrightarrow\begin{cases}|mx+n|>a\\|mx+n|<b\end{cases}$.

## 课堂讲与练

【例 1】 求下列含绝对值不等式的解集:

(1)$|2x-1|\leqslant 5$;　　(2)$3|1-x|>12$;　　(3)$|x|+3<0$.

【解析】(1)由$|2x-1|\leqslant 5\Leftrightarrow -5\leqslant 2x-1\leqslant 5$即$-2\leqslant x\leqslant 3$,所以原不等式解集为$[-2,3]$;

(2)由$3|1-x|>12\Leftrightarrow|1-x|>4\Leftrightarrow 1-x<-4$或$1-x>4$即$x<-3$或$x>5$,所以原不等式解集为$(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$

(3)由$|x|+3<0$得$|x|<-3$与绝对值为非负矛盾,所以原不等式解集为$\varnothing$.

**【技巧点拨】**首先判断是否为标准形式的绝对值不等式,再将绝对值不等式进行等价转化为一元一次不等式(组).从而求解.

**变式训练 1**

求下列含绝对值不等式的解集.

(1)$2|x|<6$;　　(2)$|5-3x|>7$;　　(3)$2|x+1|-3\leqslant 5$.

**【例 2】** 解不等式组$\begin{cases}|2x+3|\leqslant 5\\ x^2-3>2x\end{cases}$.

**【解析】**由不等式$|2x+3|\leqslant 5\Leftrightarrow -5\leqslant 2x+3\leqslant 5$即$-4\leqslant x\leqslant 1$,又由不等式

$x^2-3>2x\Leftrightarrow x^2-2x-3>0\Leftrightarrow (x+1)(x-3)>0$即$x<-1$或$x>3$,

又求交集$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 1\\ x<-1\text{ 或 }x>3\end{cases}$得原不等式组解集为$[-4,-1)$.

**【技巧点拨】**首先分别求绝对值不等式和一元二次不等式的解集,再求两个不等式解集的交集.

**变式训练 2**

解不等式(组)$\begin{cases}|3x-2|\leqslant 4\\ \dfrac{x+1}{3}>1-\dfrac{x}{6}\end{cases}$.

## 巩固与提升

### 基础训练

**一、选择题**

1. 不等式$|x+2|<3$的解集是(　　).

A. $\{x|x<-5$ 或 $x>1\}$
B. $\{x|x>1\}$
C. $\{x|x<-5\}$
D. $\{x|-5<x<1\}$

2. 不等式$|3x-1|\geqslant5$的解集为(　　).

A. $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right]$
B. $[2,+\infty)$
C. $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right]\cup[2,+\infty)$
D. $\left[-\frac{4}{3},2\right]$

3. 不等式$3|x-2|\leqslant9$的解集为(　　).

A. $(-\infty,1]\cup[5,+\infty)$
B. $[-1,5]$
C. $[5,+\infty)$
D. $(-\infty,1]$

4. 不等式$|x+1|+2>0$的解集是(　　).

A. $\mathbf{R}$
B. $\varnothing$
C. $(-1,+\infty)$
D. $(-1,0)$

5. 在数轴上与原点距离不大于3的点的坐标的集合是(　　).

A. $\{x|x\leqslant-3$ 或 $x\geqslant3\}$
B. $\{x|-3\leqslant x\leqslant3\}$
C. $\{x|x\leqslant-3\}$
D. $\{x|x\geqslant3\}$

6. 不等式$|2x-3|\leqslant1$的整数解的个数是(　　).

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

**二、填空题**

1. 不等式$|1-3x|<2$的解集为________.

2. 不等式$|2x+3|-7>0$的解集是________.

3. 已知集合$A=\{x||x-1|<3\}$,$B=\{x||x+2|\geqslant5\}$,求$A\cap B=$________.

4. 设不等式$|x-b|<a(a>0)$的解集为$(-1,2)$,求$a+b$的值为________.

**三、解答题**

1. 求不等式$|1-4x|\leqslant7$的解集.

2. 解不等式组$\begin{cases}|x+2|\leqslant 5\\ x^2-4x-5<0\end{cases}$.

3. 求不等式 $1<|2x-1|\leqslant 3$ 的解集.

## 提升训练

1. 关于 $x$ 的不等式 $|x+a|<1$ 的解集是 $\{x|1<x<3\}$,求实数 $a$ 的值.

2. 已知集合 $A=\{x||x-1|<2\}$,$B=\{x|x-a>0\}$,且 $A\subseteq B$,求实数 $a$ 的取值范围.