

绪 论

学习目标

- ◎ 了解工程力学的研究对象。
- ◎ 掌握工程力学的任务和内容。

0.1 工程力学的研究对象

工程力学是工程类专业的一门重要基础课,其研究对象是运动速度远小于光速的宏观物体。工程专业则以工程中的结构和构件为研究对象,研究它们的受力平衡运动、变形等方面的基本规律,并掌握相关计算方法,为后续专业课程的学习奠定基础。

建筑物中能承受或传递荷载并起骨架作用的物体及体系叫作结构,结构的各个组成部分称为构件。图 0-1 所示为一单层厂房结构,其由柱、屋架、基础等构件组成。

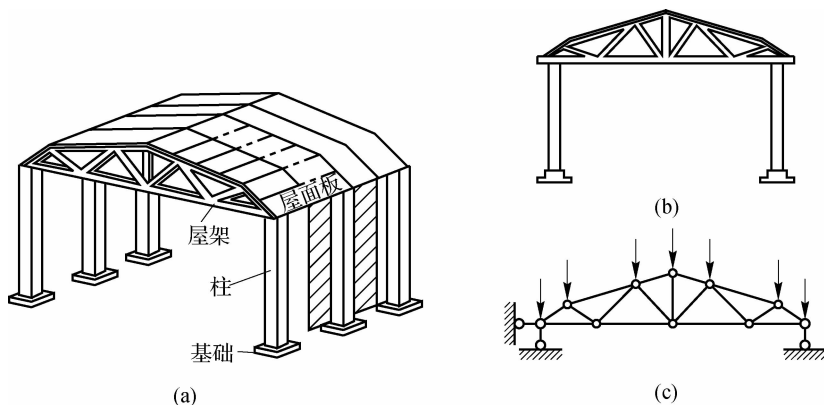


图 0-1

根据几何形状可将结构分为以下几类。

(1) 杆系结构。杆系结构由杆件组成。组成结构的杆件其几何特征是横截面尺寸比长度小得多(见图 0-2),如梁、柱、拱、桁架等。

(2) 薄壁结构。薄壁结构也称板壳结构,它是由厚度远比长度和宽度小得多的薄板或薄壳组成的结构(见图 0-3),如屋面板、楼面板等。

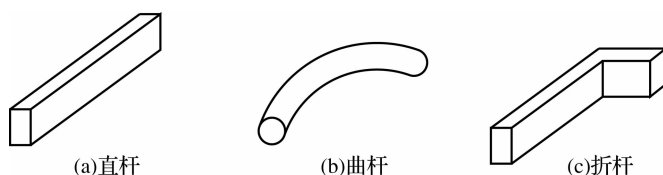


图 0-2

(3) 实体结构。实体结构是长、宽、高三个方向尺寸相近的结构(见图 0-4), 如拱壳、块体(挡土墙、坝体)等。

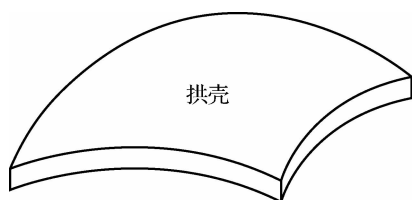


图 0-3

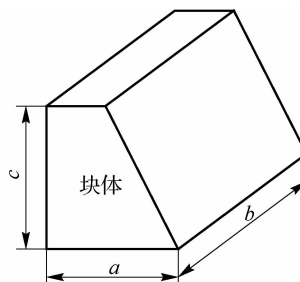


图 0-4

除了上述三类结构外, 在工程中还会遇到悬索结构、充气结构等其他类型的结构。在土木工程中, 杆系结构是应用最为广泛的结构形式, 本书即以单个杆件或杆件体系为研究对象。

0.2 工程力学的主要任务和内容

0.2.1 工程力学的主要任务

工程力学的任务是对结构进行受力分析, 分析结构的几何组成规律, 解决在荷载作用下结构的强度、刚度和稳定性问题, 即解决结构和构件所受荷载与其自身的承载能力这一对基本矛盾。研究平面杆系结构的计算原理和方法, 为结构设计合理的形式, 其目的是保证结构按设计要求正常工作, 并充分发挥材料的性能, 使设计的结构既安全可靠又经济合理。

进行结构设计时, 首先须知作用在结构和构件上的各种荷载。结构设计要求各构件必须按一定规律组合, 以确保在荷载作用下结构的几何形状不发生改变, 即进行结构的几何组成分析。

结构正常工作必须满足强度、刚度和稳定性的要求, 即进行其承载能力计算。

强度是指结构和构件抵抗破坏的能力。满足强度要求即要使结构或构件正常工作时不发生破坏。

刚度是指结构和构件抵抗变形的能力。满足刚度要求即要使结构或构件正常工作时产生的变形不超过允许范围。

稳定性是指结构或构件保持原有平衡状态的能力。满足稳定性要求即使结构或构件在正常工作时不突然改变原有平衡状态,以使因变形过大而发生破坏。

结构在安全正常工作的同时还应考虑经济条件,应充分发挥材料的性能,不至于产生过大的浪费,即设计结构的合理形式。

0.2.2 工程力学的主要内容

工程力学的内容主要包含以下几个部分。

(1)工程静力学。这是工程力学中重要的基础理论,主要包括物体的受力分析、力系的简化与平衡、结构的组成规律、静定结构的内力分析等。

(2)杆件的承载能力计算。杆件的承载能力计算是结构承载能力计算的实质,主要包括基本变形杆件的内力分析和强度、刚度计算,压杆稳定和组合变形杆件的强度、刚度计算。

(3)结构的内力分析。由此可按杆件承载力计算方法进行超静定结构的强度和刚度等计算,主要包括研究静定结构的位移计算和求解超静定结构内力的基本方法(力法、位移法、力矩分配法和矩阵位移法等)。

第1章 静力学基础

学习目标

- 掌握力、刚体、平衡和约束的概念。
- 掌握静力学公理。
- 掌握约束的基本特征及约束反力的画法。
- 掌握单个物体与物体系统的受力分析及受力图。

1.1 力的概念及性质

1.1.1 力的概念

力的概念产生于人类从事的生产劳动当中。当人们用手握、拉、掷及举起物体时,由于肌肉紧张而感受到力的作用,这种作用广泛存在于人与物及物与物之间。例如,奔腾的水流能推动水轮机旋转,锤子的敲打会使烧红的铁块变形等。

1. 力的定义

力是物体相互间的一种机械作用,它能使物体的运动状态或形状发生改变。物体相互间的机械作用形式多种多样,可归纳为两类:一类是物体相互间的直接接触作用,如弹力、摩擦力等;另一类是通过场的相互作用,如万有引力。力不能脱离物体而单独存在,有力必定存在两个物体,即施力体和受力体。

物体在受力后产生的效应可以分为以下两种。

- (1) 外效应,也称为运动效应,可以使物体的运动状态发生改变。
- (2) 内效应,也称为变形效应,可以使物体的形状发生改变。

2. 力的三要素

力对物体的作用效应取决于三个要素:力的大小、方向、作用点。

- (1) 力的大小表示物体相互间机械作用的强弱程度。
- (2) 力的方向表示物体间的相互机械作用具有方向性,它包括力作用线在空间的方位和力沿其作用线的指向。

(3)力的作用点是指力在物体上的作用位置。实际上,两个物体之间相互作用时,其接触的部位总是占有一定的面积,力总是按照各种不同的方式分布于物体接触面的各点上。当接触面面积很小时,则可以将微小面积抽象为一个点,这个点称为力的作用点,该作用力称为集中力;反之,如果接触面积较大而不能忽略时,则力在整个接触面上分布作用,此时的作用力称为分布力。分布力的大小用单位面积上力的大小来度量,称为荷载集度,用 $q(\text{N}/\text{mm}^2)$ 来表示。

3. 力的单位

在国际单位制中,力以牛顿(N)或千牛顿(kN)为单位。

1.1.2 力的性质

力的三要素表明力是矢量,记作 \mathbf{F} (见图 1-1),用一条带有箭头的线段(AB)来表示:线段(AB)的长度是按一定的比例尺表示力的大小;线段的方位和箭头的指向表示力的方向;线段的起点A或终点B表示力的作用点。线段所在的直线称为力的作用线。

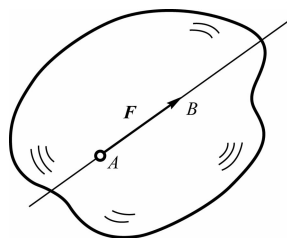


图 1-1

1.2 静力学基本公理

静力学公理是人类在长期的生产和生活实践中,经过反复的观察和实验总结出来的客观规律,是不能被更简单的原理再证明的真理。静力学的全部理论,即关于力系的简化和平衡条件的理论,都是以下面介绍的基本公理为依据得出的。

1.2.1 二力平衡公理

二力作用在同一刚体上,使刚体处于平衡状态的充要条件是:这两个力的大小相等、方向相反,且作用线沿同一直线。

二力平衡是一切平衡力系的基础。建筑结构中受二力平衡的杆件很多,钢筋受拉平衡,柱子受轴向压力平衡都属于这一类。力学中将受到二力而平衡的杆件称为二力杆,图 1-2 所示两种情况均为二力杆。对于只在两点上受力而平衡的杆件,应用二力平衡公理可以确定其未知力的方位。

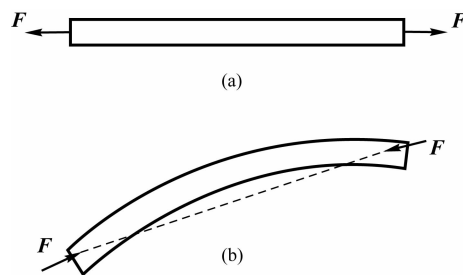


图 1-2

1.2.2 力的平行四边形公理

作用在物体上同一点的两个力,可以合成为一个合力。合力的作用点也在该点,合力的

大小和方向,由这两个力为边构成的平行四边形的对角线确定。该法则指出,两个力合成不能简单地求算术和,而要用平行四边形法则求几何和,即矢量和,它是力系简化的基础。

如图 1-3(a)所示,设在物体的 A 点作用有力 F_1 和 F_2 ,若以 F_R 表示它们的合力,则可写成矢量表达式,即

$$F_R = F_1 + F_2 \quad (1-1)$$

式中“+”号表示按矢量相加,即按平行四边形法则相加(合成)。

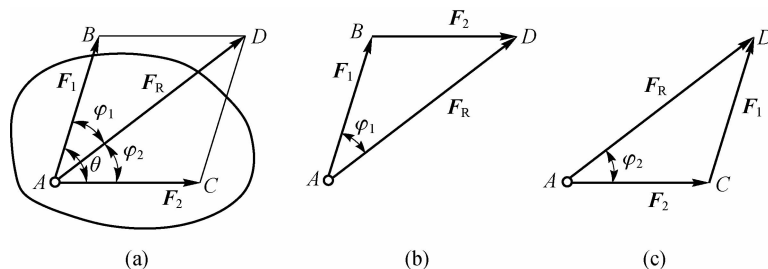


图 1-3

求合力的大小及方向也可不必作出整个平行四边形,见图 1-3(b),在点 A 画出 F_1 后再以力矢 F_1 的末端 B 作为力矢 F_2 的始端画出 F_2 ,则矢量 AD 就是合力矢 F_R 。分力矢和合力矢所构成的三角形 ABD 称为力三角形,这种求合力的方法称为力的三角形法则。如果先画 F_2 ,后画 F_1 ,见图 1-3(c),同样可得合力矢 F_R 。这说明合力矢与两分力矢的作图先后次序无关。

反过来也可以根据这个公理将一力分解为作用于同一点的两个分力。由于用同一对角线可以作出无穷多个不同的平行四边形,所以如不附加其他条件,一个力分解为相交的两个分力可以有无穷多组解。在实际问题中,通常遇到的是把一个力分解为方向已知的两个分力,特别是分解为方向相互垂直的两个力,这种分解称为正交分解,所得的两个分力称为正交分力。

1.2.3 加减平衡力系公理

在作用于同一刚体的某力系上增加或除去任意平衡力系,并不改变原力系对该刚体的作用。这一公理表明,加减平衡力系后,新力系与原力系等效。

根据这个公理可以导出两个推论。

1. 力的可传性

图 1-4(b)比 1-4(a)增加了一对平衡力,且有 $F_1 = -F_2 = F$ (即三力的大小相同),作用线沿同一直线,根据加减平衡力系公理,显然图 1-4(a)与图 1-4(b)二力系为等效力系。由于图 1-4(b)中 F_2 与 F 又可视为一平衡力系,将此平衡力系减去即成为图 1-4(c)所示力系。同理,图 1-4(b)与图 1-4(c)力系等效。最终,图 1-4(a)与图 1-4(c)力系等效。但此时力已由刚体的 A 点沿作用线移到了 B 点,而未改变原力系对它的作用效果。

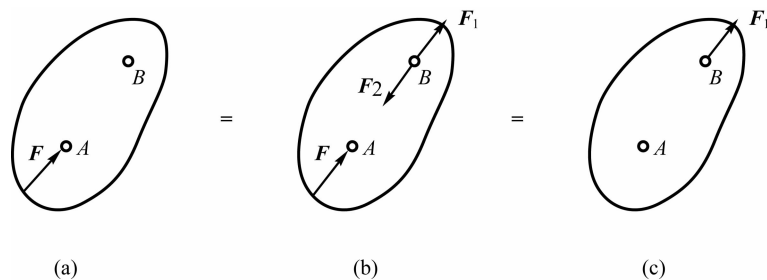


图 1-4

根据力的可传性,力的三要素中的作用点可改为作用线,因此,力矢量是滑移矢量。

力的可传性仍然是建立在刚体这个概念基础之上的,只有当所研究的对象可以视为一个刚体时,力的可传性才是正确的。刚体是个理想模型,即在任何力的作用下,体积和形状都不发生改变的物体。

2. 三力平衡汇交定理

不平行的三个力若平衡,该三力必汇交于一点且在同一平面内。此定理证明如下:若图 1-5 所示刚体上不平行的三个力 F_1 , F_2 与 F_3 处于平衡状态,根据力的平行四边形公理,考虑到力的可传性,显然 F_2 与 F_3 可合成为一个过交点 D 的力 F_R ,此时三力平衡已变成为 F_1 与 F_R 的二力平衡。根据二力平衡的条件,显然 F_1 也必须通过 F_2 与 F_3 的交点 D ,因此三力若平衡必须交于一点。由于 F_R 与 F_2 和 F_3 在同一平面,且 F_1 与 F_R 在同一直线上,所以 F_1 , F_2 和 F_3 也必在同一平面内。不过需要注意的是,汇交于一点这个条件仅是三力平衡的必要条件,而不是充分条件。或者说已经汇交于一点上的三个力并不一定都处于平衡状态。

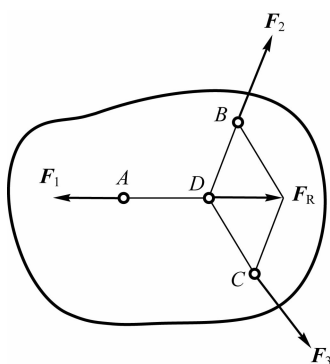


图 1-5

1.2.4 作用与反作用公理

作用与反作用公理为:两物体间相互作用的力总是大小相等,方向相反,沿同一直线,并分别作用在这两个物体上。

这一公理是研究结构受力分析特别是绘制隔离体受力图的基础。该公理中需强调的

是,作用力与反作用力一定是分别作用于两个物体,且有作用力必定有反作用力;没有反作用力必定没有作用力,两者总是同时存在,又同时消失。

1.3 力矩和力偶

力对物体的外效应除平动效应外还有转动效应。平动效应可由力矢来度量,而转动效应则取决于力矩。在日常生产、生活中,常会看到物体同时受到大小相等,方向相反,作用线平行的两个力的作用。如汽车司机转动方向盘时加在方向盘上的两个力(见图 1-6);拧水龙头时加在开关上的两个力等。这样的两个力显然不是前面所讲的一对平衡力,它们作用在物体上将使物体产生转动效应。

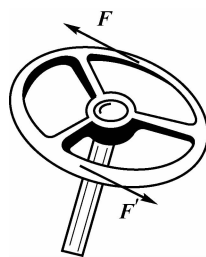


图 1-6

1.3.1 力矩

1. 力对点之矩

以扳手拧紧螺丝为例来分析力对物体的转动效应。如图 1-7 所示,作用于扳手一端的力 F 使扳手绕 O 点转动。

O 点称为力矩中心,简称矩心。扳手绕矩心的转动效应不仅与力 F 的大小有关,还与矩心 O 到力的作用线的距离 d 有关。从矩心 O 到力 F 作用线的距离 d 称为力臂。由力的作用线和矩心 O 所决定的平面称为力矩作用面。在力学中用 F 的大小与 d 的乘积来度量力使物体绕矩心的转动效应,称为力 F 对 O 点之矩,以符号 $M_O(F)$ 表示。即

$$M_O(F) = \pm Fd \quad (1-2)$$

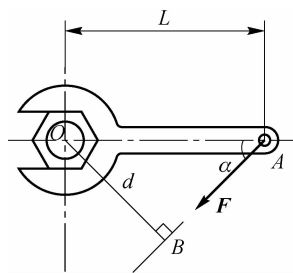


图 1-7

乘积 Fd 的大小只表示物体绕矩心转动的强弱,而力的方向不同,物体绕矩心的转向也不同。因此,要完整地将力对物体的转动效应表示出来,还须考虑物体的转向。在平面问题中,将力矩规定为代数量:力使物体绕矩心逆时针转动时,力矩取正值;反之则为负。力矩的单位是力的单位和长度单位的乘积,常用单位为牛顿·米($N \cdot m$)、牛顿·毫米($N \cdot mm$)等。

力矩的性质如下。

- (1) 力矩的大小和转向与矩心的位置有关,同一力对不同的矩心的力矩不同。
- (2) 力的大小等于零或力的作用线过矩心时,力矩为零。
- (3) 力的作用点沿其作用线移动时,力对点之矩不变。
- (4) 互相平衡的两个力对同一点之矩的代数和为零。

2. 力对轴之矩

如图 1-8 所示,在力的作用下,物体绕矩心 O 转动也可以看成是物体绕过 O 点与力矩平面垂直的轴线的转动,所以,平面内力对 O 点之矩可以看成是空间力对 z 轴之矩。力 F 对 z 轴之矩用符号 $M_z(F)$ 表示。

当力的作用线与转轴平行或相交,即力的作用线与轴线共面时,力对转轴之矩为零。当

力的作用线不在与轴线垂直的平面上,如图 1-9 所示的正六面体,求其所受力 F 对 z 轴的力矩时,可将其分解成两个分力 F_1 和 F_2 。令 F_1 与转轴 z 平行、 F_2 在与转轴 z 垂直的平面内,则 F_1 对 z 轴不产生力矩作用,而 F_2 对 z 轴之矩实际上就是 F_2 对 O 点的力矩,即

$$M_z(\mathbf{F}) = M_O(\mathbf{F}_2) = \pm F_2 d \quad (1-3)$$

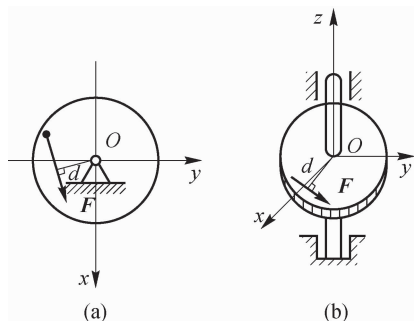


图 1-8

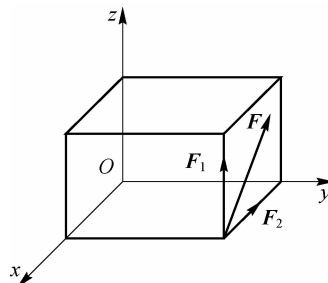


图 1-9

式(1-3)表明,力 F 对轴之矩等于该力在垂直于此轴的平面上的分力(投影)对该轴与此平面的交点的力矩。通常情况下,力对轴之矩是代数量,其正负用右手法则来确定,即用右手握住转轴,弯曲的四指指向力矩的转向,拇指所指的方向如果与转轴的正向相同,对应的力矩为正,反之为负。也可以从轴的正向看,当力矩绕轴逆时针转动时为正,反之为负(见图 1-10)。

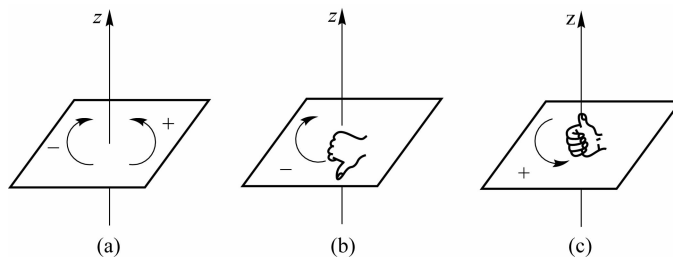


图 1-10

3. 合力矩定理

合力的投影与分力的投影间满足合力投影定理,合力对某点或某轴的力矩与分力对同一点或同一轴之矩也有类似的关系。

合力矩定理:合力对平面内任意一点(轴)的力矩等于各分力对同一点(轴)的力矩的代数和。即

$$M_O(\mathbf{R}) = \sum M_O(\mathbf{F}) \text{ 或 } M_z(\mathbf{R}) = \sum M_z(\mathbf{F}) \quad (1-4)$$

对合力矩定理要根据实际问题灵活运用。利用合力矩定理,不仅可以由分力的力矩求出合力的力矩,当直接求某个力的力矩困难时,也可以将该力正交分解成容易求力矩的分力,先求出各分力的力矩,再求出此力的力矩。



1.3.2 力偶

在力学中把大小相等、方向相反、作用线平行的两个力所组成的力系称为力偶。记为 (F, F') ，如图 1-11(a) 所示。力偶中两力作用线间的距离 d 称为力偶臂，力偶所在的平面称为力偶作用面，力偶中的一个力的大小与力偶臂的乘积称为力偶矩，用符号 M 表示。在平面问题中

$$M = \pm Fd \quad (1-5)$$

式中，正负号表示力偶的转向。通常规定：使物体产生逆时针转动效应的力偶矩为正，反之为负。

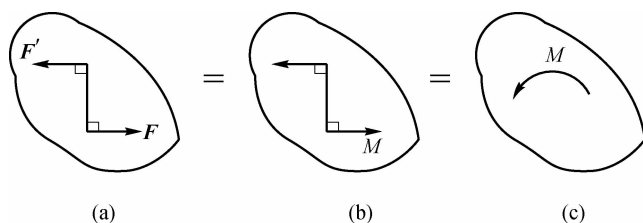


图 1-11

力偶矩的单位同力矩的单位，常用单位有牛顿·米 ($N \cdot m$)、牛顿·毫米 ($N \cdot mm$) 等。在画图表示力偶时常用图 1-11 中 (b)、(c) 的符号来表示。

1. 力偶的性质

(1) 组成力偶的两个力向任意轴的投影的代数和为零，因此力偶无合力，力偶作用在物体上不产生移动效应，只产生转动效应，力偶不能与一个力等效。

(2) 力偶的两个力对其作用面内的任意一点的力矩的代数和恒等于其力偶矩，而与矩心的位置无关，因此，力偶的转动效应只取决于力偶矩的大小和转向。

(3) 力偶只能与力偶等效，当两个力偶的力偶矩大小相等、转向相同、力偶作用面共面或平行时，两力偶互为等效力偶。

(4) 在不改变力偶矩的大小和转向时，可同时改变力和力偶臂的大小，而不会改变其对物体的转动效应。

(5) 力偶可在其作用面内任意搬移、旋转，也可以从一个平面平行移到另一平面，而不会改变其对刚体的作用效果。

由力偶的性质可知，力偶对物体的作用效果取决于力偶矩的大小、转向、力偶作用面，称为力偶三要素。

2. 力偶系的合成与平衡

作用在同一物体上的多个力偶组成的体系称为力偶系。在力偶系的作用下，物体同样只产生转动效应。即力偶系的合成结果仍为一力偶，合力偶的力偶矩等于各力偶的力偶矩的代数和：

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M_i \quad (1-6)$$

当力偶系的合力偶的力偶矩等于零时，即 $M=0$ 时，原力偶系对物体不产生转动效应，

物体处于平衡状态。在力偶系作用下物体处于平衡状态的条件为

$$M = \sum M_i = 0 \quad (1-7)$$

1.4 约束和约束反力

工程中的机器或者结构总是由许多零部件组成的,这些零部件是按照一定的形式相互连接。因此,它们的运动必然互相牵连和限制。如果从中取出一个物体作为研究对象,则它的运动当然也会受到与它连接或接触的周围其他物体的限制。也就是说,它是一个运动受到限制或约束的物体,称为被约束体。

那些限制物体某些运动的条件,称为约束。这些限制条件总是由被约束体周围的其他物体构成的。为方便起见,构成约束的物体常称为约束。约束限制了物体本来可能产生的某种运动,故约束有力作用于被约束体,这种力称为约束反力。约束反力总是作用在被约束体与约束体的接触处,其方向也总是与该约束所能限制的运动或运动趋势的方向相反,据此可确定约束反力的位置及方向。

1.4.1 柔性约束

由绳索、胶带、链条等形成的约束称为柔性约束。这类约束只能限制物体沿柔索伸长方向的运动,只能受拉而不能受压,即只能限制物体沿绳索伸长方向的运动(限制离开约束),因此它对物体只有沿柔索方向的拉力,如图 1-12、图 1-13 所示,常用符号为 F_T 。当柔索绕过轮子时,常假想在柔索的直线部分处截开柔索,将与轮接触的柔索和轮子一起作为考察对象。这样处理,就可不考虑柔索与轮子间的内力,这时作用于轮子的柔索拉力即沿轮缘的切线方向,如图 1-13(b)所示。

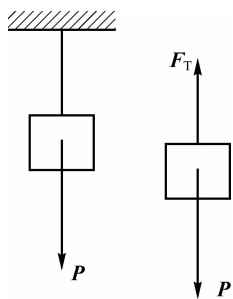


图 1-12

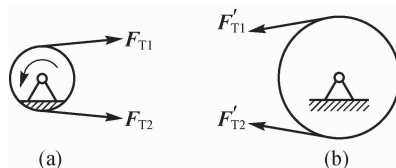


图 1-13

1.4.2 光滑面约束

当两物体直接接触,并可忽略接触处的摩擦时,约束只能限制物体在接触点沿接触面的公法线方向约束物体的运动,不能限制物体沿接触面切线方向的运动,故约束反力必过接触



点沿接触面法向并指向被约束体,简称法向压力,通常用 F_N 表示。图 1-14 中(a)和(b)所示分别为光滑曲面对刚体球的约束和齿轮传动机构中齿轮轮齿的约束。

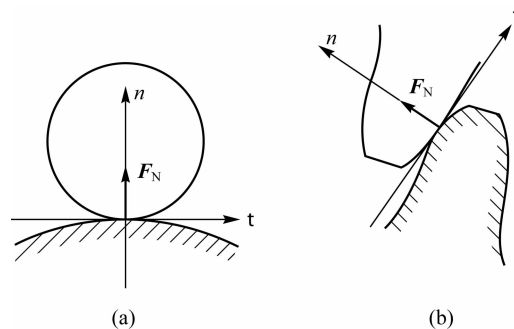


图 1-14

图 1-15 为直杆与方槽在 A、B、C 三点接触,三处的约束反力沿二者接触点的公法线方向作用。

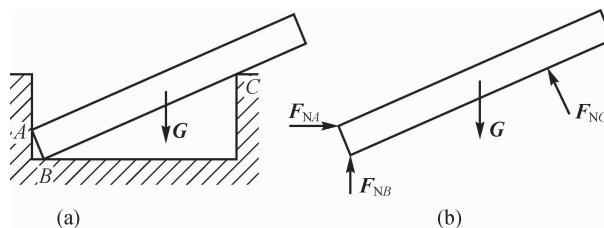


图 1-15

1.4.3 光滑铰链约束

铰链是工程上常见的一种约束。它是在两个钻有圆孔的构件之间采用圆柱定位销所形成的连接,如图 1-16 所示。门的活页、铡刀与刀架、起重机的动臂与机座的连接等,都是常见的铰链连接。

铰链连接限制杆件在平面内的任何移动,但不限制杆件绕铰链中心转动。一般认为销钉与构件光滑接触,所以这也是一种光滑表面约束,约束反力应通过接触点 K 沿公法线方向(通过销钉中心)指向构件,如图 1-17(a)所示。但实际上很难确定 K 的位置,因此反力 F_N 的方向无法确定。所以,这种约束反力通常是用两个通过铰链中心的大小和方向未知的正交分力 F_x 、 F_y 来表示,两分力的指向可以任意设定,如图 1-17(b)所示。

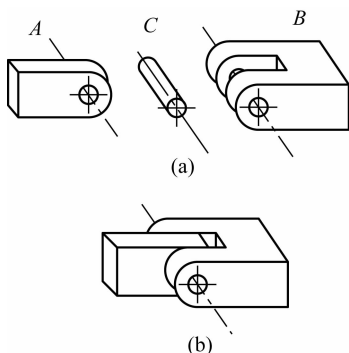


图 1-16

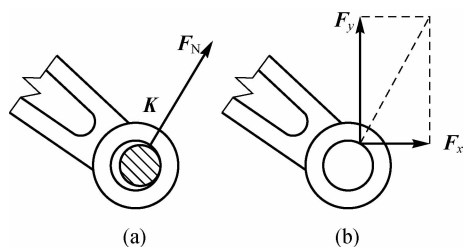


图 1-17

1.4.4 链杆约束

两端用光滑铰链与其他构件分别联结且中间不受力的直杆称为链杆,如图 1-18(a)所示的 AB 杆。链杆约束的计算简图如图 1-18(b)所示。由于链杆限制了构件与支座间沿杆轴线方向的相对移动,因此约束反力 F_A 的作用线沿链杆轴线,指向待定,如图 1-18(c)所示。

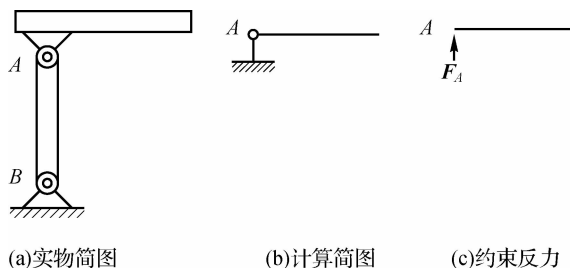


图 1-18

1.4.5 支座及其反力

把结构与基础联系起来的装置称为支座。支座的作用是传递荷载、固定结构的位置。平面问题中常用的支座有三种,即固定铰支座、可动铰支座和固定端支座。

1. 固定铰支座

圆柱铰链连接的两个构件中,如果其中一个构件固定不动就构成了固定铰支座,如图 1-19(a)所示,其约束反力在垂直于铰链轴线的平面内,过销钉中心,方向不定,通常也用两个正交分力 F_x 与 F_y 表示,如图 1-19(b)所示。其计算简图有四种画法,如图 1-19(c)所示。

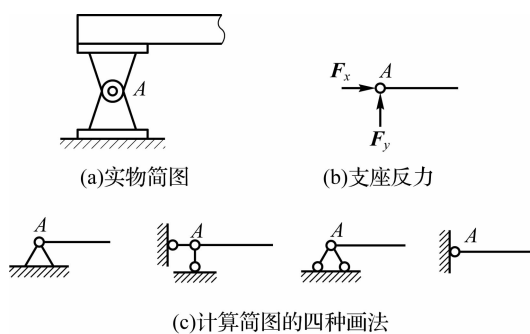


图 1-19

2. 可动铰支座

在固定铰支座的底座与支撑面之间装上滚轴所形成的装置,称为可动铰支座,如图 1-20(a)所示。其计算简图如图 1-20(b)所示。可动铰支座反力只有一个 F_{Ay} ,作用线垂直于支撑面,通过圆柱形销钉中心,通常为压力,如图 1-20(c)所示。

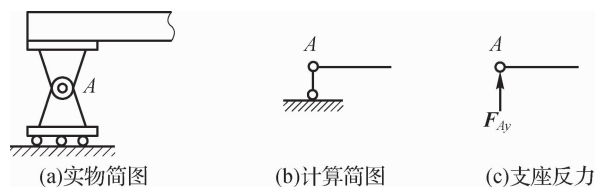


图 1-20

3. 固定端支座

使被约束物体在约束端完全固定,既不能转动又不能移动的支座称为固定端支座。其约束反力一般用三个反力分量来表示,即两个相互垂直的分力 F_x 、 F_y 和一个反力偶 M ,如图 1-21 所示。

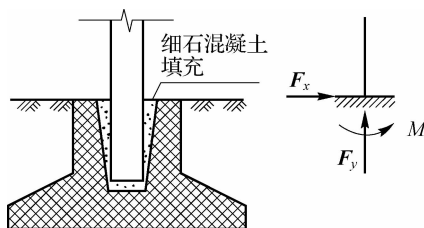


图 1-21

4. 定向支座

定向支座又称滑动支座,其特点是只允许沿某一指定方向移动,因此其可以产生一个与移动方向垂直的反力和一个反力偶,方向待定,用字母 R 、 M 表示。

如图 1-22(a)为定向支座的示意图,像平板闸门的门槽、龙门架的滑道等均可视为定向支座。其计算简图和支座反力如图 1-22(b)所示。

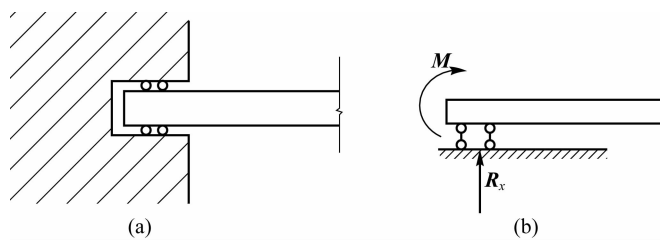


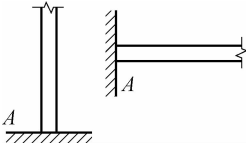
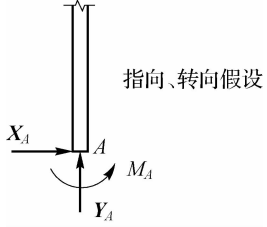
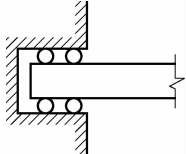
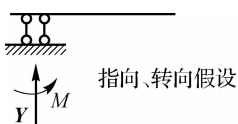
图 1-22

为了便于对照学习,现将常见的约束和约束反力的表现形式归纳成表 1-1。

表 1-1 工程中常见约束和约束反力

序号	约束类型	计算简图	约束反力	约束反力数目
1	柔性约束			1
2	光滑面约束			1
3	光滑铰链约束			2
4	固定铰支座约束			2
5	可动铰支座约束			1
6	链杆约束			1

续表

序号	约束类型	计算简图	约束反力	约束反力数目
7	固定端支座约束		 指向、转向假设	3
8	滑动支座约束		 指向、转向假设	2

1.5 物体的受力分析与受力图

实际物体所受的力既有主动力又有约束反力,主动力往往都是已知的,约束反力却是未知的。工程实际中常需对某一结构或构件进行力学计算,根据已知的主动力求出未知的约束反力,这就要求首先确定物体受到哪些力的作用,即对物体进行受力分析,画出其受力图。

在受力分析时,首先应明确哪些物体是需要研究的,这些需研究的构件或结构被称为研究对象。再将研究对象从结构系统中分离出来,单独画出该物体的简图,这一被单独分离出的研究对象称为隔离体。隔离体上已解除全部约束,它与周围物体的联系通过周围物体对隔离体的约束反力的作用来代替。将隔离体上所受的全部主动力和约束反力无一遗漏地画在隔离体上,得到的图形称为物体的受力图。恰当地选取研究对象,正确地画出构件的受力图是解决力学问题的关键。

画受力图的具体步骤如下。

- (1)明确研究对象,画出分离体;
- (2)在分离体上画出全部主动力;
- (3)在分离体上画出全部约束反力。

【例 1-1】重力为 P 的圆球放在板 AC 与墙壁 AB 之间,如图 1-23(a)所示。设板 AC 重力不计,试作出板与球的受力图。

【解】先取球为研究对象,作出简图。球上主动力 P ,约束反力有 F_{ND} 和 F_{NE} ,均属光滑面约束的法向反力。受力图如图 1-23(b)所示。

再取板作研究对象。由于板的自重不计,故只有 A 、 C 、 E 处的约束反力。其中 A 处为固定铰支座,其反力可用一对正交分力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 表示; C 处为柔索约束,其反力为拉力 F_T ; E 处的反力为法向反力 F'_{NE} ,要注意该反力与球在处所受反力 F_{NE} 为作用与反作用的关系。受力图如图 1-23(c)所示。

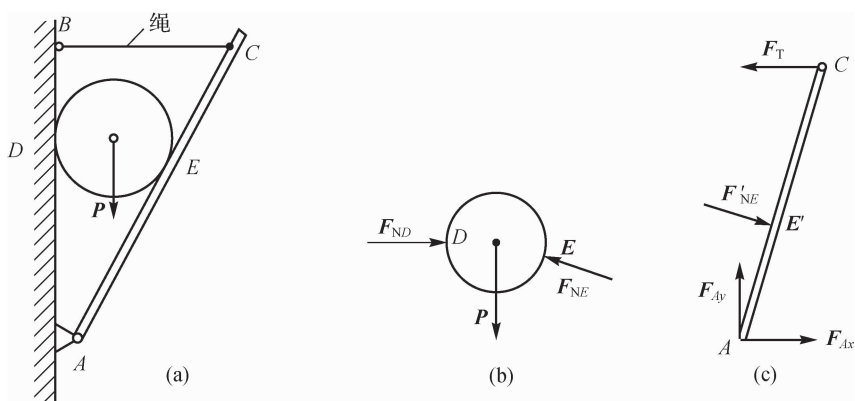


图 1-23

【例 1-2】 图 1-24(a) 所示为一起重机支架, 已知支架重量 W 、吊重 G 。试画出重物、吊钩、滑车与支架以及物系整体的受力图。

【解】 重物上作用有重量 G 和吊钩沿绳索的拉力 F_{T1} 、 F_{T2} , 见图 1-24(d)。

吊钩受绳索约束, 沿各绳上画拉力 F'_{T1} 、 F'_{T2} 、 F_{T3} , 见图 1-24(c)。滑车上有钢梁的约束反力 F_{R1} 、 F_{R2} 及吊钩绳索的拉力 F'_{T3} , 见图 1-24(f)。

支架上有 A 点的约束反力 F_{NAx} 、 F_{NAy} , B 点水平的约束反力 F_{NB} 及滑车滚轮的约束反力 F'_{R1} 、 F'_{R2} , 支架自重 W , 见图 1-24(e)。

整个物系作用有 G 、 W 、 F_{NB} 、 F_{NAx} 、 F_{NAy} , 见图 1-24(b)。

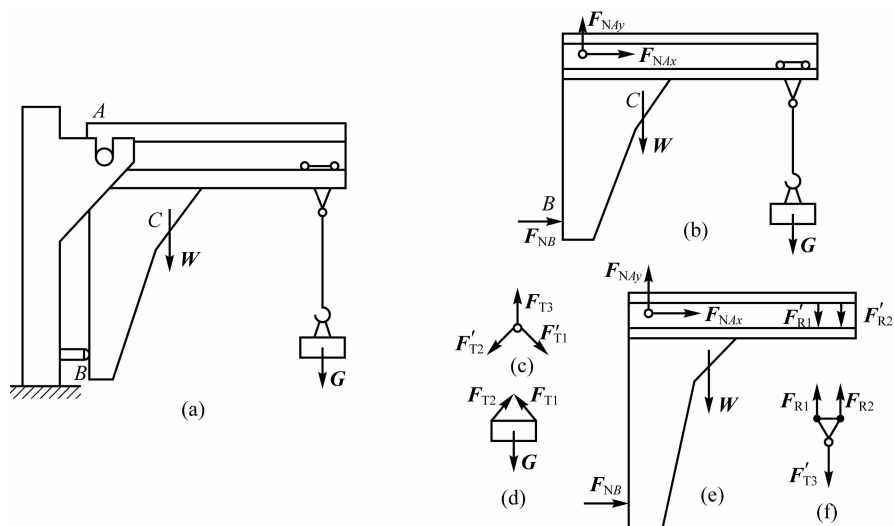


图 1-24

思考与练习

一、分析解答题

1. 作用力与反作用力是一对平衡力吗?
2. 图 1-25(a) 中所示三铰拱架上的作用力 F , 可否依据力的可传性原理把它移到 D 点? 为什么?

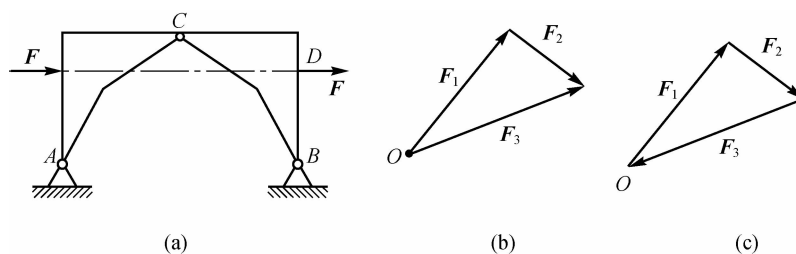


图 1-25

3. 二力平衡条件、加减平衡力系原理能否用于变形体？为什么？
4. 只受两个力作用的构件称为二力构件，这种说法对吗？
5. 确定约束反力方向的基本原则是什么？
6. 等式 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ 与 $F = F_1 + F_2$ 有什么区别？
7. 图 1-25(b)、(c)中所画出的两个力三角形各表示什么意思？二者有什么区别？

二、作图题

1. 画出图 1-26 指定物体的受力图。

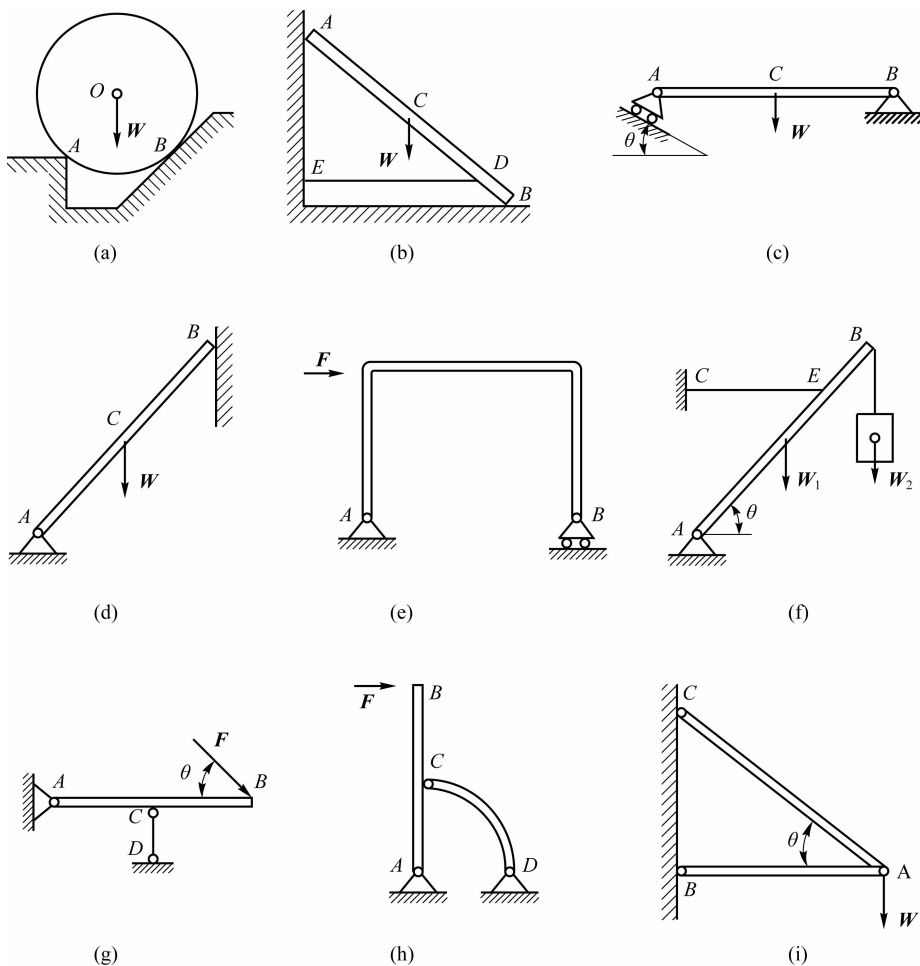


图 1-26

2. 绘制图 1-27 所示物体的受力图, 必须标明约束反力的方位(均不计自重)。

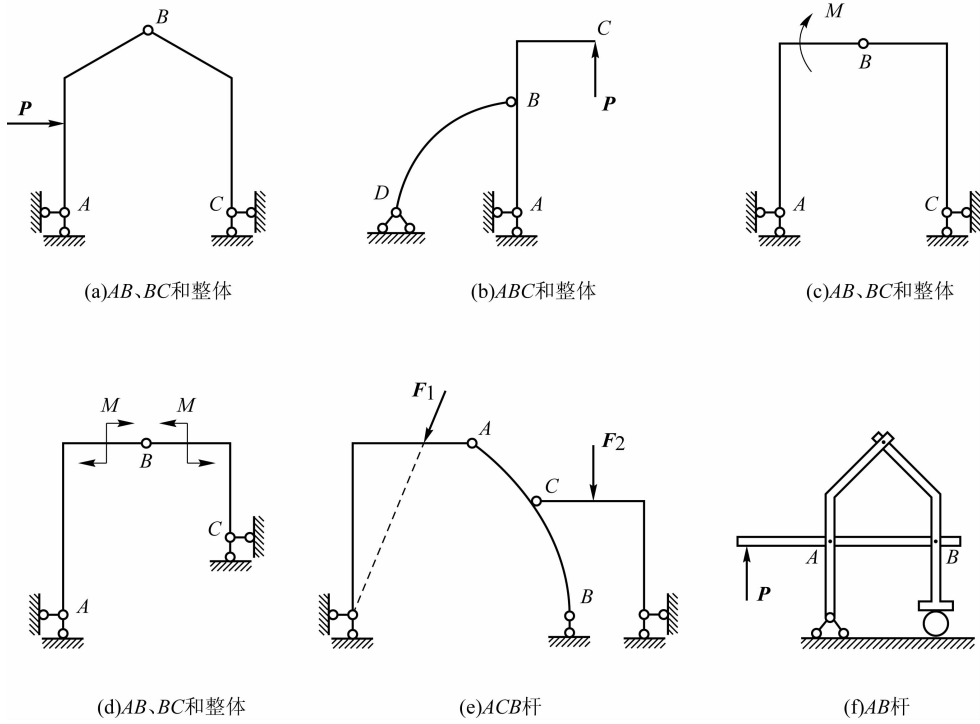


图 1-27

3. 画出图 1-28 所示的球、杆的受力图。
4. 画出图 1-29 所示的轮 B、杆 AB 的受力图。
5. 画出图 1-30 所示的杆 AC、杆 BC、绳索 EF、整体的受力图。

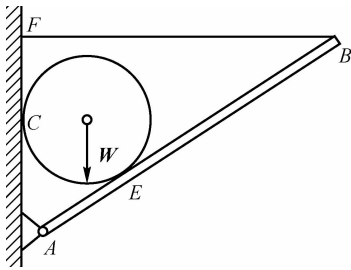


图 1-28

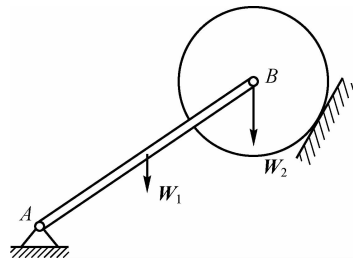


图 1-29

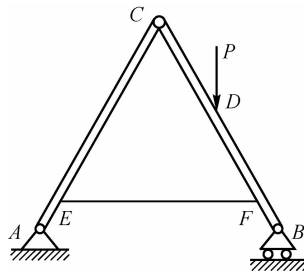


图 1-30



三、分析计算题

1. 试计算图 1-31 中力 F 对 O 点的力矩。

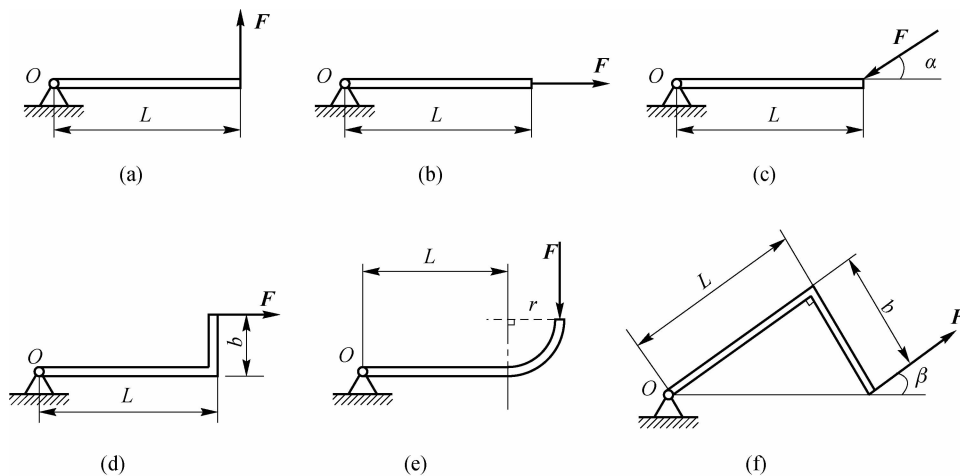


图 1-31

2. 如图 1-32 所示,一铁塔用钢索固定,已知钢索的拉力为 $T=5 \text{ kN}$,求其对三个坐标轴的力矩。

3. 四连杆机构如图 1-33,已知 $OA=60 \text{ cm}$, $BO_1=40 \text{ cm}$, $M_1=100 \text{ N} \cdot \text{m}$,机构平衡,求 M_2 。

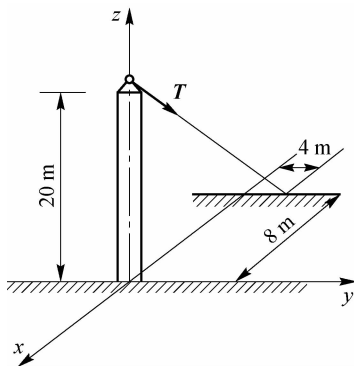


图 1-32

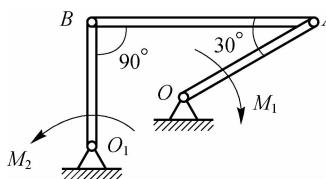


图 1-33

第2章 力系的简化

学习目标

- ◎ 理解并掌握力的平移定理。
- ◎ 掌握平面力系简化的方法及简化结果。
- ◎ 掌握空间力系的简化方法。
- ◎ 理解重心和形心的概念。

2.1 力系分类与力的平移定理

2.1.1 力系的分类

根据力作用线的分布情况,力系可分为平面力系与空间力系。力系中各力的作用线都作用在同一平面上,该力系称为平面力系。力系中各力的作用线呈空间分布,该力系称为空间力系。

平面力系又可分为平面汇交力系、平面平行力系和平面任意力系。

(1)平面汇交力系:力系中各力的作用线在同平面内且相交于同一点。其中,共点力是汇交力系的一种特殊情况。

(2)平面平行力系:力系中各力的作用线在同平面内且互相平行。

(3)平面任意力系:力系中各力的作用线共面,但既不完全平行、也不完全相交。平面任意力系也可称为平面一般力系。

空间力系同样也可分为空间汇交力系、空间平行力系、空间任意力系。

2.1.2 力的平移定理

研究任何问题,最好的方法就是由简单到复杂,同时又要将复杂问题化繁为简。研究平面任意力系,则希望将其用简单力系等效替换。而力的平移定理,则是平面任意力系简化的基本方法。

力的平移定理:作用在刚体上 A 点的力 F 可以平行移动到刚体内任意一点 B ,同时附加



一个力偶,此附加力偶的矩等于原来的力 F 对点 B 的矩。

证明:如图 2-1(a)所示,在刚体上 A 点作用有力 F ,由加减平衡力系公理,在刚体的任意一点 B 加上平衡力系 $F' = -F''$,并令 $F = F' = -F''$,如图 2-1(b)所示,则 F 和 F'' 构成一个力偶,其矩为

$$M = \pm Fd = M_B(F) \quad (2-1)$$

则力 F 平行移动到点 B ,同时附加一力偶 M 。如图 2-1(c)所示,证毕。

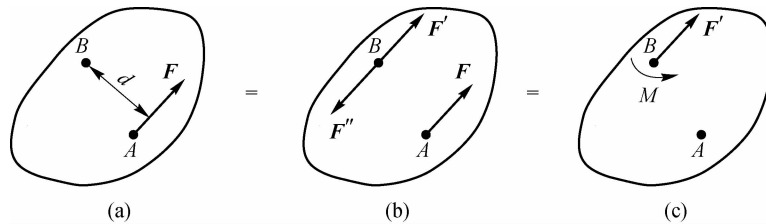


图 2-1

力的平移定理是力系简化的重要依据,在生产实践中有着大量的实际应用:例如,攻丝时,必须两手握扳手均匀用力,如图 2-2(a)所示。如果工人单手用力,如图 2-2(b)所示,则会将丝锥折断。这是因为,作用在 B 点的力 F 向 C 点平移后,得到一个与之大小相等、方向相同的力 F' 和一个力偶 M ,如图 2-2(c)所示,力偶使丝锥转动,而力 F' 则是丝锥折断的原因。再比如,在双人皮划艇比赛中,同组队员必须相互配合、协调用力,这样,两船桨所得到的水流推进力节奏一致、大小相同,如图 2-3(a)所示。二力向船的轴心平移后,得到大小为 $2F$ 的推力;而两附加力偶大小相等,转向相反,互相抵消。若同组队员配合不协调,两船桨所得到的水流推进力大小不同,如图 2-3(b)所示。二力向船的轴心平移后,不仅得到一个推进力 $F_2 + F_1$,同时,还有一个附加力偶 $M = F_2d - F_1d$ (设 F_2 大于 F_1),如图 2-3(c)所示,该力偶使皮划艇偏转,从而影响比赛速度。

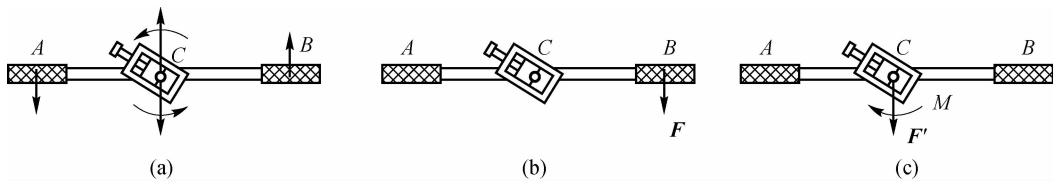


图 2-2

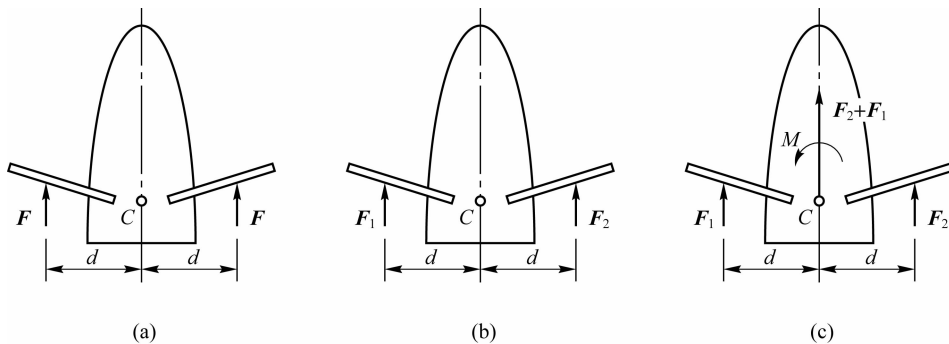


图 2-3

力的平移定理的逆过程为:设作用在刚体上的力系为任一点 B 的一个力 F' 和一个力偶 M ,该力系可以等效为另一点 A 的一个力 F ,此力 F 为原力系的合力。等效条件是力矢量 F 与 F' 大小相等,方向相同,力 F 对点 B 的矩等于力偶的矩 M ,力 F 与力 F' 作用线间的距离为

$$d = \frac{|M|}{F'} \quad (2-2)$$

2.2 平面汇交力系的简化

力系的简化也叫力系的合成,是在等效作用的前提下,用最简单的结果来代替原力系的作用。若力系中各力作用线汇交于同一点,且各力作用线在同一平面内,则称为平面汇交力系。研究平面汇交力系的基础是力的三角形法则。

2.2.1 几何法

如图 2-4(a)所示,在刚体上作用一汇交力系,汇交点为刚体上的 O 点。根据力的可传性原理,将各力沿作用线移至汇交点,成为共点力系,然后根据平行四边形法则,依次将各力两两合成,求出作用在 O 点的合力 R 。实际上,也可以连续应用力的三角形法则,逐步将力系的各力合成,求出合力 R ,如图 2-4(b)所示。

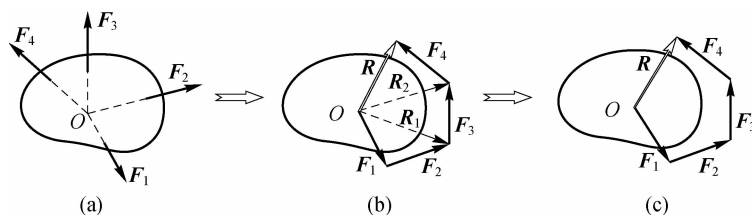


图 2-4

由图 2-4(b)可知,为求力系的合力 R ,中间求了 R_1 、 R_2 、 \dots ,不难看出,如果不求 R_1 、 R_2 、 \dots ,直接将力系中的各力首尾相连成一个多边形,也可以求出力系的合力,该多边形的封闭边就是要求的力系的合力,如图 2-4(c)所示。这种求合力的方法叫力的多边形法则,画出的多边形叫力的多边形。值得注意的是,利用这种方法求合力时,对各分力的先后次序没有要求,只过分力的次序不同时,得到的力的多边形形状不同,但只要方法正确,求出的合力的大小和方向是一样的。

2.2.2 解析法

根据上面的分析可知,几何法尽管避免了计算的麻烦,但准确性较差,而且对分力较多或空间力系来讲,其难度较大。因此,在解决实际问题时,通常采用解析法。

解析法就是利用合力投影定理,由分力的投影求出合力的投影,再求合力的大小和方向的方法。



如图 2-5 所示,设一平面汇交力系由 F_1, F_2, \dots, F_n 组成,在力系的作用平面内建立平面直角坐标系 xOy ,依次求出各力在两坐标轴上的投影: $F_{1x}, F_{2x}, \dots, F_{nx}$ 与 $F_{1y}, F_{2y}, \dots, F_{ny}$ 。

设合力在两个坐标轴上的投影分别为 R_x, R_y ,根据合力投影定理,它们与各分力在两个坐标轴上的投影满足下面的等式

$$\left. \begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum F_{ix} \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum F_{iy} \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

由合力的投影可以求出合力的大小和方向

$$R \text{ 的大小: } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2} \quad (2-4)$$

$$R \text{ 的方向: } \tan \alpha = \left| \frac{R_y}{R_x} \right| \quad (2-5)$$

式中, α 是合力 R 与坐标轴 x 所夹的锐角, $\sum F_{ix}, \sum F_{iy}$ 分别是原力系中各力在 x 轴和 y 轴上投影的代数和。

总之,平面汇交力系的简化结果为一合力,合力的作用线通过力系的汇交点,合力的大小和方向等于各分力的矢量和,即

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F_i \quad (2-6)$$

【例 2-1】如图 2-6 所示平面汇交力系,已知 $F_1=200 \text{ N}, F_2=300 \text{ N}, F_3=100 \text{ N}, F_4=250 \text{ N}$,求此力系的合力。

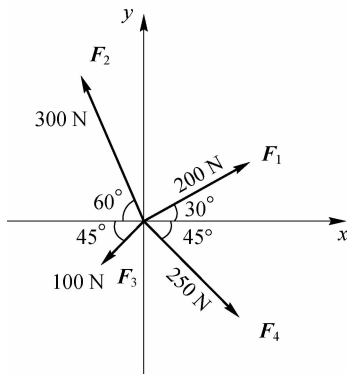


图 2-6

$$\begin{aligned} \text{【解】 } F_{Rx} &= \sum F_x \\ &= F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ - F_3 \cos 45^\circ + F_4 \cos 45^\circ = 129.3 \text{ N} \\ F_{Ry} &= \sum F_y \\ &= F_1 \sin 30^\circ + F_2 \sin 60^\circ - F_3 \sin 45^\circ - F_4 \sin 45^\circ = 112.3 \text{ N} \\ F_R &= \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 171.3 \text{ N}, \cos \theta = \frac{F_{Rx}}{F_R} = 0.7548, \theta = 40.99^\circ \end{aligned} \quad (2-7)$$

由于 $F_{Rx} > 0, F_{Ry} > 0$,故 θ 在第一象限,而合力 F_R 作用线通过汇交点 O 。

2.3 平面力偶系的简化

设在刚体的同一平面内作用有任意两个力偶 (F_1, F'_1) 与 (F_2, F'_2) ,如图 2-7(a)所示,其中力偶矩 $M(F_1, F'_1) = M_1 = F_1 \times d_1$; $M(F_2, F'_2) = M_2 = F_2 \times d_2$;为了将两个力偶合成,可根据力偶的性质将 (F_1, F'_1) 力偶等效变为图 2-7(b)中所示的 (P_1, P'_1) 力偶,为了保证力偶矩不变,此时 $P_1 = \frac{M_1}{d}$;力偶 (F_2, F'_2) 等效变为 (P_2, P'_2) 力偶,而 $P_2 = \frac{M_2}{d}$ 。由图 2-7(b)可看出,两力偶合成后仍为一力偶,且合成后的力偶其力偶矩若以 M 表示,则

$$M = (P_1 + P_2) \times d = P_1 d + P_2 d = M_1 + M_2 \quad (2-8)$$

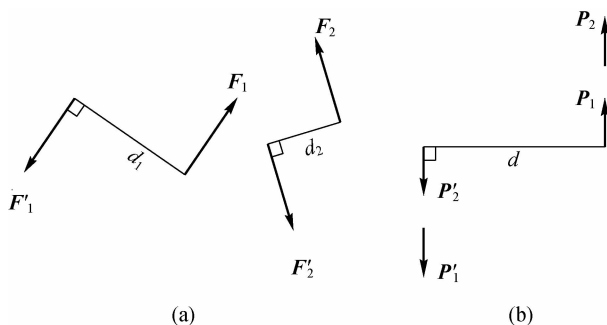


图 2-7

此式表明,任意两个力偶之和还是力偶,且合力偶的力偶矩等于两个分力偶力偶矩的代数和。将此结论推广到平面内 n 个任意力偶的情形,可得出结论:平面力偶系可以合成为一个合力偶,合力偶的力偶矩等于力偶系中各分力偶矩的代数和。即

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum_{i=1}^n M_i \quad (2-9)$$

式中, M_1, M_2, \cdots, M_n 为各分力偶的力偶矩; M 为合力偶的力偶矩。

2.4 平面一般力系的简化

2.4.1 平面任意力系向作用面内任意一点简化:主矢与主矩

设刚体上作用有 n 个力 F_1, F_2, \cdots, F_n 组成平面任意力系,如图 2-8(a)所示。在力系所在平面内任取一点 O 作为简化中心,根据力的平移定理,将力系中各力向 O 点平移,如图 2-8(b)所示。得到一个作用于 O 点的平面汇交力系 F'_1, F'_2, \cdots, F'_n ,和一个附加平面力偶系,其矩分别为 M_1, M_2, \cdots, M_n 。显然,力 F'_i 和 F_i 大小相等,方向相同,力偶 M_i 的矩等于力 F_i 对简化中心 O 点的矩为



$$\mathbf{F}'_1 = \mathbf{F}_1, \mathbf{F}'_2 = \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}'_n = \mathbf{F}_n \quad (2-10a)$$

$$M_1 = M_O(\mathbf{F}_1), M_2 = M_O(\mathbf{F}_2), \dots, M_n = M_O(\mathbf{F}_n) \quad (2-10b)$$

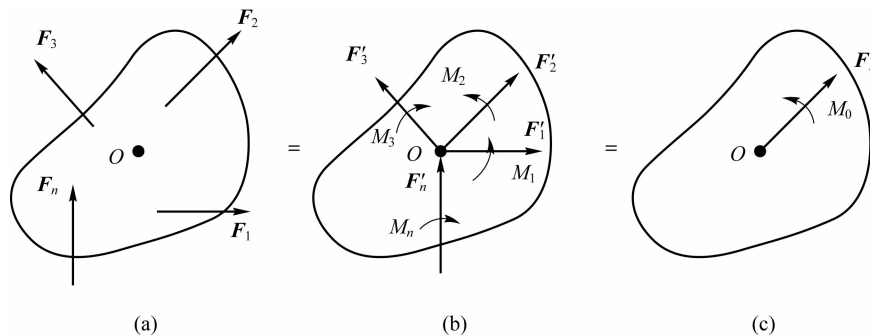


图 2-8

平面汇交力系 $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \dots, \mathbf{F}'_n$ 可以合成为一个力 \mathbf{F}'_R , \mathbf{F}'_R 的作用线通过简化中心 O 点, 此力称为主矢。根据公式(2-10a), 可知

$$\mathbf{F}'_R = \mathbf{F}'_1 + \mathbf{F}'_2 + \dots + \mathbf{F}'_n = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (2-11a)$$

平面力偶系 M_1, M_2, \dots, M_n 可以合成一个力偶, 其矩为 M_O , 此力偶称为主矩。代入公式(2-10b), 得

$$M_O = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{i=1}^n M_O(\mathbf{F}_i) \quad (2-11b)$$

结论: 平面任意力系向力系所在平面内任意一点简化, 得到主矢和主矩, 如图 2-8(c) 所示, 主矢的大小和方向只与原力系中各力的大小和方向有关, 与简化中心的位置无关, 其作用线经过简化中心; 而主矩的大小和转向不仅与原力系中各力的大小和方向有关, 一般还和简化中心的位置有关。

其中, 主矢的大小和方向余弦可按下式求解:

$$\begin{aligned} F'_R &= \sqrt{F'_{Rx^2} + F'_{Ry^2}} = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \\ \cos(F'_R, x) &= \frac{F'_{Rx}}{F'_R} = \frac{\sum F_x}{F'_R}, \cos(F'_R, y) = \frac{F'_{Ry}}{F'_R} = \frac{\sum F_y}{F'_R} \end{aligned} \quad (2-12)$$

2.4.2 平面任意力系简化结果的讨论

(1) 当 $F'_R = 0, M_O \neq 0$ 时, 简化为一个力偶。显见: 作用在简化中心 O 点的平面汇交力系 $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \dots, \mathbf{F}'_n$ 是一个平衡力系, 可以减去。原力系等效为平面力偶系 M_1, M_2, \dots, M_n , 此时的合力偶矩与简化中心的位置无关, 主矩 M_O 为原力系的合力偶。

(2) 当 $F'_R \neq 0, M_O = 0$ 时, 简化为一个力。显见: 平面力偶系 M_1, M_2, \dots, M_n 是一个平衡力系, 可以减去。原力系等效为作用在简化中心 O 点的平面汇交力系 $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \dots, \mathbf{F}'_n$, 此时的主矢即为原力系的合力, 合力的作用线通过简化中心。

(3) 当 $F'_R \neq 0, M_O \neq 0$ 时, 此简化结果可根据公式(2-10a)进一步简化, 首先, 将主矩 M_O

表示成一对反向平行力(F_R, F'_R),且使 $F_R = F'_R = -F''_R$,显然, F'_R 与 F''_R 是一对平衡力,可以减去。即原力系可最终简化为合力 F_R ,合力 F_R 与主矢 F'_R 大小相等,方向相同,合力的作用线到 O 点的距离 d 为

$$d = \frac{|M_O|}{F'_R} \quad (2-13)$$

如图 2-9(b)所示,合力对 O 点的矩为

$$M_O(F_R) = F_R d = M_O = \sum M_O(F_i) \quad (2-14)$$

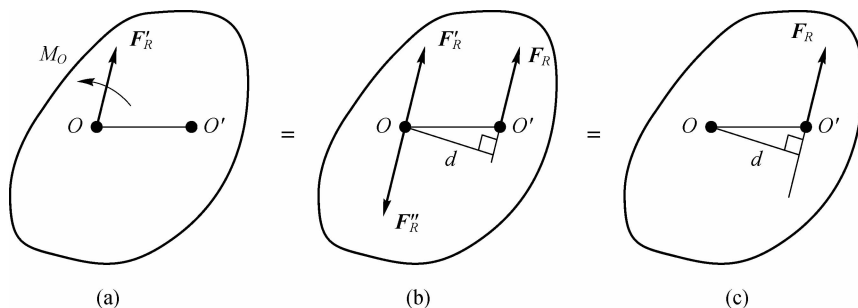


图 2-9

于是得合力矩定理:平面任意力系的合力对力系所在平面内任意点的矩等于力系中各分力对同一点的矩的代数和。根据平面任意力系与其合力的等效关系,平面任意力系的合力矩定理很容易理解。

(4)当 $F'_R=0, M_O=0$ 时,平面任意力系为平衡力系。

由上面(2)、(3)可以看出,不论主矩是否为零,只要主矢不等于零,力系最终简化为一个合力,且合力的大小、方向与主矢相同,合力的作用线与主矢间的距离 d 为

$$d = \frac{M_O}{F'_R} \quad (2-15)$$

【例 2-2】重力水坝受力情况及几何尺寸如图 2-10(a)所示。已知 $P_1 = 300 \text{ kN}, P_2 = 100 \text{ kN}, q_0 = 100 \text{ kN/m}, h = 10 \text{ m}$,试求力系向 O 简化的结果以及合力作用线的位置。

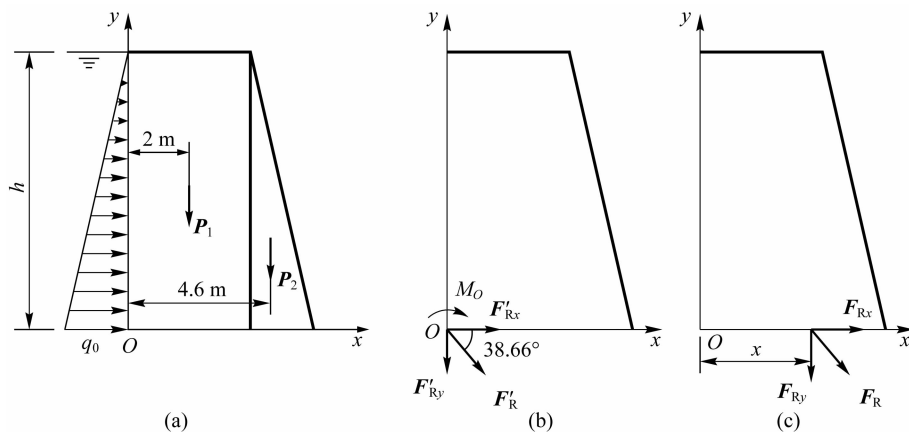


图 2-10



【解】 (1) 将力系向 O 简化, 求得主矢量 \mathbf{F}'_R 和主矩 M_O 。即

主矢 \mathbf{F}'_R 在 x, y 轴上的投影为

$$F'_{Rx} = \sum F_x = \frac{1}{2} q_0 h = \frac{1}{2} \times 100 \times 10 \text{ kN} = 500 \text{ kN}$$

$$F'_{Ry} = \sum F_y = -P_1 - P_2 = (-300 - 100) \text{ kN} = -400 \text{ kN}$$

主矢 \mathbf{F}'_R 的大小为

$$F'_R = \sqrt{F'^2_{Rx} + F'^2_{Ry}} = \sqrt{(500)^2 + (-400)^2} \text{ kN} = 640.3 \text{ kN}$$

主矢 \mathbf{F}'_R 的方向余弦为

$$\cos(F'_R, x) = \frac{F'_{Rx}}{F'_R} = \frac{\sum F_x}{F'_R} = \frac{500}{640.3} = 0.7809$$

$$\cos(F'_R, y) = \frac{F'_{Ry}}{F'_R} = \frac{\sum F_y}{F'_R} = \frac{-400}{640.3} = -0.6247$$

则方向角为

$$\angle(\mathbf{F}'_R \cdot \mathbf{x}) = \pm 38.66^\circ \quad \angle(\mathbf{F}'_R \cdot \mathbf{y}) = 180^\circ \pm 51.34^\circ$$

显然, 主矢 \mathbf{F}'_R 在第 IV 象限内, 与 x 轴正向的夹角为 38.66° 。

力系对简化中心 O 点的主矩 M_O 为

$$\begin{aligned} M_O(\mathbf{F}'_R) &= \sum M_O(\mathbf{F}_i) = -\frac{1}{2} q_0 h \times \frac{1}{3} h - 2P_1 - 4.6P_2 \\ &= \left(-\frac{1}{2} \times 100 \times 10 \times \frac{1}{3} \times 10 - 2 \times 300 - 4.6 \times 100\right) \text{ kN} \cdot \text{m} \\ &= -2726.7 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

主矢 \mathbf{F}'_R 和主矩 M_O 方向如图 2-10(b) 所示。

(2) 求合力 \mathbf{F}_R 作用线的位置。由于合力 \mathbf{F}_R 与主矢 \mathbf{F}'_R 大小相等方向相同, 且合力 \mathbf{F}_R 作用线与 x 轴的交点坐标为 x , 可根据合力矩定理求得, 如图 2-10(c) 所示, 即

$$M_O = M_O(\mathbf{F}_R) = M_O(\mathbf{F}_{Rx}) + M_O(\mathbf{F}_{Ry}) = F_{Ry} \cdot x \quad (2-16)$$

解得

$$x = \frac{M_O}{F_{Ry}} = \frac{-2726.7}{-400} \text{ m} = 6.8 \text{ m}$$

合力 \mathbf{F}_R 作用线的位置如图 2-10(c) 所示。

2.5 重心和形心

2.5.1 平行力系的中心

平行力系是工程实际中较常见的一种力系, 如风对建筑物的压力, 物体受到的地球引力, 水对堤坝的压力等。在研究这类问题时需要确定力系的合力及其作用点的位置。

在力学中, 平行力系合力的作用点称为平行力系的中心。可以证明, 平行力系的中心的

位置只与力系中各力的大小和作用点的位置有关,与各力的方向无关,因此,当保持各力的大小和作用点不变时,各力绕其作用点往相同的方向转过相同的角度,力系的中心位置不变。

2.5.2 重心

确定物体的重心位置,在工程实际中有很重要的意义。例如,古代的宝塔和近代的高层建筑,越往下面积越大,这可增加建筑物的稳定性和合理性;塔吊的重心位置若超出某一范围会产生翻倒。物体所受的重力实际上就是一个平行力系,物体的重心就是这一平行力系的中心,求物体重心就是确定平行力系中心的问题。

如图 2-11 所示,设某物体总重为 G ,将其分成若干个小微元体,第 i 个微元体的重力为 ΔG_i ,在直角坐标系中其重心位置坐标为 $C_i(x_i, y_i, z_i)$,而该物体的重心坐标为 $C(x_c, y_c, z_c)$,分别将物体的总重 G 及微元体的重力 ΔG_i 对坐标轴取矩,根据合力矩定理,导出重心坐标公式为

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum \Delta G_i x_i}{G} \\ y_c &= \frac{\sum \Delta G_i y_i}{G} \\ z_c &= \frac{\sum \Delta G_i z_i}{G} \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

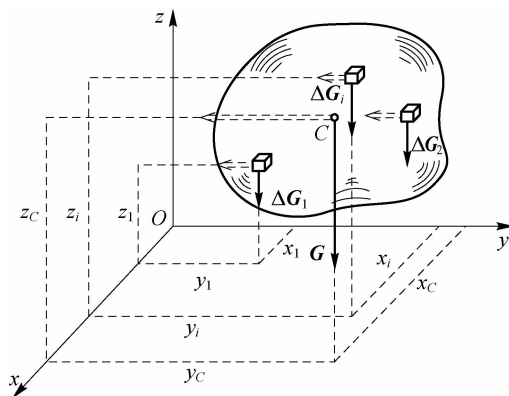


图 2-11

2.5.3 形心

在工程实际中,许多物体被视为均质的,令均质物体的比重为 γ ,体积为 V ,微元体的体积为 ΔV_i ,则重心位置坐标公式转化为



$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum \Delta V_i x_i}{V} \\ y_c &= \frac{\sum \Delta V_i y_i}{V} \\ z_c &= \frac{\sum \Delta V_i z_i}{V} \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

由上面的公式可看出,均质物体的重心与物体的自重无关,只取决于物体的几何形状和尺寸。故均质物体的重心又称为物体的形心,即几何中心。

设均质薄板的厚度为 d , 面积为 A , 微元体的面积为 ΔA_i , 其形心公式为

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum \Delta A_i x_i}{A} \\ y_c &= \frac{\sum \Delta A_i y_i}{A} \\ z_c &= \frac{\sum \Delta A_i z_i}{A} \end{aligned} \right\} \quad (2-19)$$

同理,均质细杆的形心位置坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum \Delta l_i x_i}{l} \\ y_c &= \frac{\sum \Delta l_i y_i}{l} \\ z_c &= \frac{\sum \Delta l_i z_i}{l} \end{aligned} \right\} \quad (2-20)$$

式中, l 为杆的总长, Δl_i 为微元体的长度。

2.5.4 确定重心的几种方法

1. 对称法

具有对称性的均质物体,其重心有以下几个特点。

- (1) 若物体具有对称中心,其中心即为重心。
- (2) 若物体具有对称轴,其重心必在对称轴上。
- (3) 若物体具有对称平面,其重心必在对称平面上。
- (4) 若物体具有两条对称轴,其重心必在两对称轴的交点上。
- (5) 若物体具有两个对称平面,其重心必在两对称平面的交线上。

2. 组合法(分割法)

当均质物体是由几个简单规则形状的物体组合而成的,而且这几个简单形状的物体的重心已知或容易确定,就可将物体看成是由这几个规则形状的物体构成,直接应用 2.5.2 和 2.5.3 中的公式求出物体的重心或形心。

3. 实验法

在实际问题中,有许多物体的形状不规则或是非均质的,用上述方法求重心非常麻烦或无法确定,就只有采用实验的方法来确定其重心。

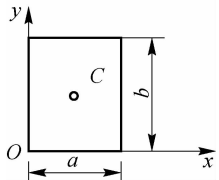
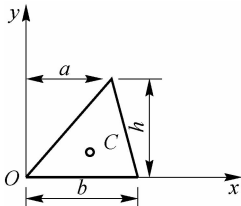
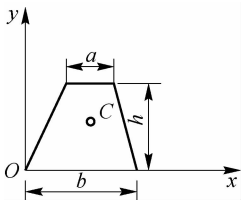
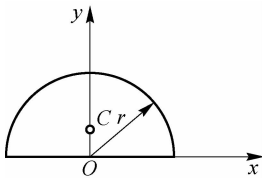
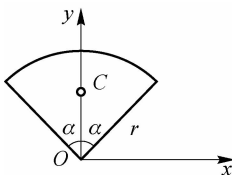
(1)悬挂法。对于较轻薄的物体,可采用悬挂法。在物体上的不同两点分别将物体悬挂起来,根据二力平衡条件,则重心必在过此两点的铅垂线的交点上。

(2)称重法。对于形状复杂,体积庞大的物体,需采用称重法。这种方法是根据合力矩定理来进行实验和推导的。

4. 查表法

简单几何图形物体的面(或体)积及其重心位置的确定见表 2-1。

表 2-1 简单几何图形物体的面(或体)积及其重心位置表

名 称	图 形	面(或体)积	重 心
长方形		$A=ab$	$x_c = \frac{1}{2}a$ $y_c = \frac{1}{2}b$
三角形		$A = \frac{1}{2}bh$	$x_c = \frac{1}{3}(a+b)$ $y_c = \frac{1}{3}h$
梯形		$A = \frac{h}{2}(a+b)$	$y_c = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$
半圆形		$A = \frac{1}{2}\pi r^2$	$x_c = 0$ $y_c = \frac{4r}{3\pi}$
扇形		$A = \alpha r^2$	$x_c = 0$ $y_c = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$



续表

名称	图形	面(或体)积	重心
圆弧		弧长 $S=2aR$	$x_C=0$ $y_C=R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
长方体		$V=abc$	$x_C=\frac{1}{2}a$ $y_C=\frac{1}{2}b$ $z_C=\frac{1}{2}c$
正圆柱体		$V=\pi r^2 h$	$x_C=0$ $y_C=0$ $z_C=\frac{1}{2}h$

【例 2-4】求图 2-12 所示的平面图形阴影部分的形心位置,其中 $R=50 \text{ mm}$, $r=17 \text{ mm}$, $d=13 \text{ mm}$ 。

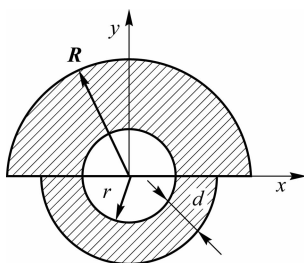


图 2-12

【解】 图 2-12 中的阴影部分是一个比较复杂的图形,为了计算的方便,可将其看成是由两个半圆形图形组合后再从中挖掉一个圆。建立图示的坐标系,利用组合法求出形心。

(1) 分别确定三部分的形心在对应坐标系中的坐标及图形的面积。

$$x_1=0, y_1=\frac{4R}{3\pi}=21.22 \text{ mm}, \quad A_1=\frac{1}{2}\pi R^2=3\,926.99 \text{ mm}^2$$

$$x_2=0, y_2=-\frac{4(r+d)}{3\pi}=-12.74 \text{ mm}, \quad A_2=\frac{\pi}{2}(r+d)^2=1\,413.72 \text{ mm}^2$$

$$x_3=0, y_3=0 \text{ mm}, \quad A_3=-\pi r^2=-907.92 \text{ mm}^2$$

(2) 求出截面形心位置坐标。

$$x_C = 0 \text{ mm}$$

$$y_C = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{3\,926.99 \times 21.22 + 1\,413.72 \times (-12.74) + 0}{3\,926.99 + 1\,413.72 + (-907.92)} \text{ mm} = 14.74 \text{ mm}$$

此图形的形心位置坐标为(0, 14.74)。

思考与练习

一、分析简答题

1. 力偶可在作用面内任意移转,那又为什么说主矩一般与简化中心的位置有关?
2. 平面任意力系的简化结果与简化中心的位置是否有关?
3. 用解析法求平面汇交力系的合力时,当坐标系不同时,对合成结果有无影响?
4. 物体的重心是否一定在物体上?
5. 计算截面的重心时,如果选取的坐标轴不同,重心的坐标是否改变? 重心的位置是否变化?

二、分析计算题

1. 如图 2-13 所示, $F_1 = 10 \text{ kN}$, 如令 F_1 、 F_2 的合力沿 x 轴的方向, 求 F_2 的大小。
2. 如图 2-14 所示, 在工件上的三点同时作用三个力, 其中, $F_1 = 10 \text{ kN}$, $F_2 = 5 \text{ kN}$, $F_3 = 2 \text{ kN}$, 尺寸单位为 m , 求此力系向点 O 的简化的结果。

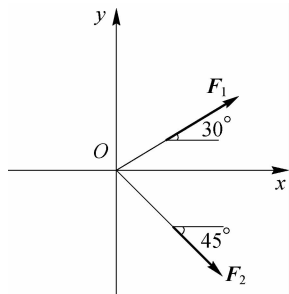


图 2-13

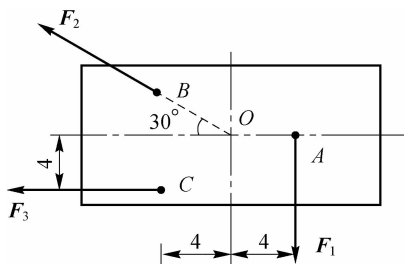


图 2-14

3. 如图 2-15 所示, 一半径为 R 的绞盘有三个等长的柄, 长度为 l , 其间夹角均为 120° , 每个柄上各作用一垂直于柄的力 F 。试求该力系: (1) 向中心 O 的简化结果; (2) 向 BC 连线中点 D 简化的结果。

4. 如图 2-16 所示, 等边三角形 ABC 的边长为 l , 在其边缘作用大小均为 F 的三个力, 方向如图 2-16(a) 所示, 试求三个力的合成结果。如将三个力的方向改成图 2-16(b) 的方向, 合成结果将如何?

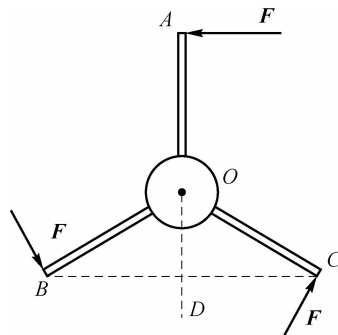


图 2-15



5. 求图 2-17 所示双曲拱桥的主拱圈截面的重心位置(单位:cm)。

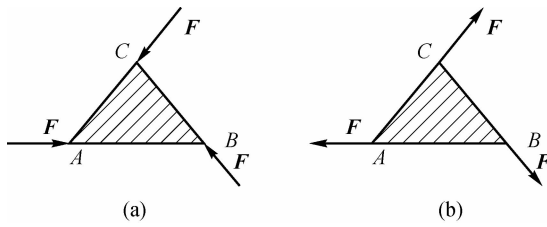


图 2-16

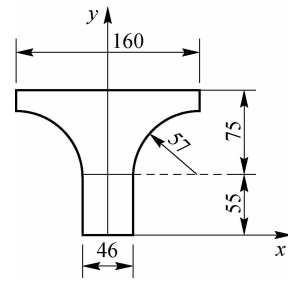


图 2-17

第3章 力系的平衡

学习目标

- ◎ 掌握平面力系的平衡方程及应用。
- ◎ 掌握空间力系的平衡方程及应用。
- ◎ 掌握摩擦的概念和应用。
- ◎ 理解摩擦角和自锁的概念。

3.1 平面汇交力系的平衡方程及应用

平衡力系是工程实际中较为常见的一种力系。许多结构和构件都处于平衡状态,例如,建筑物、桥梁、机器构架等处于静力平衡状态;以一定速度运转的转轴则处于动平衡。本章只研究在力系作用下的平衡方程及其应用。

3.1.1 平面汇交力系平衡的几何条件

由第2章的讨论可知,平面汇交力系的简化结果是一个合力。当这一合力等于零时,刚体处于平衡状态,所以平面汇交力系平衡的充分必要条件是该力系的合力等于零,即

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = 0 \quad (3-1)$$

求平面汇交力系的合力时,可以画力的多边形,对应的多边形的封闭边就是力系的合力。平面汇交力系平衡时,合力为零,因此对应的力的多边形的封闭边矢量等于零,力的多边形的起点和终点重合,力的多边形自行封闭。所以平面汇交力系平衡的几何条件是力的多边形自行封闭。

3.1.2 平面汇交力系平衡的平衡方程及应用

根据平面汇交力系的平衡条件及合力投影定理,可以得到平面汇交力系的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$



式(3-2)说明,平面汇交力系的平衡方程是力系中的各力在两个坐标轴上的投影的代数和分别等于零。平面汇交力系的平衡方程组有两个独立的方程,最多只能解两个未知量。其中的未知量包括未知力的大小和方向。另外,两个坐标轴可任取,只要不平行或共线即可。

【例 3-1】一物体重为 30 kN,用不可伸长的柔索 AB 和 BC 悬挂于如图 3-1(a)所示的平衡位置,设柔索的重量不计,AB 与铅垂线的夹角 $\alpha=30^\circ$,BC 水平。求柔索 AB 和 BC 的拉力。

【解】 (1)受力分析。

取重物为研究对象,画受力图如图 3-1(b)所示。根据约束特点,绳索必受拉力。

(2)先用几何法求解。

作力多边形,求解未知力。选取比例尺 1 cm 代表 15 kN,任取一点 A,作力多边形(点 A 即为汇交点),如图 3-1(c)所示,令 $|AC|=W=40$ kN,过 C 点作 T_{BC} 的平行线,过 A 点作 T_{AB} 的平行线,两线相交于 B 点,得到封闭的力三角形 ABC。显然, $\vec{CB}=T_{BC}$, $\vec{BA}=T_{AB}$,即

$$T_{AB} = \frac{W}{\cos 30^\circ} = 46.2 \text{ kN}, T_{BC} = W \cdot \tan 30^\circ = 23.1 \text{ kN}$$

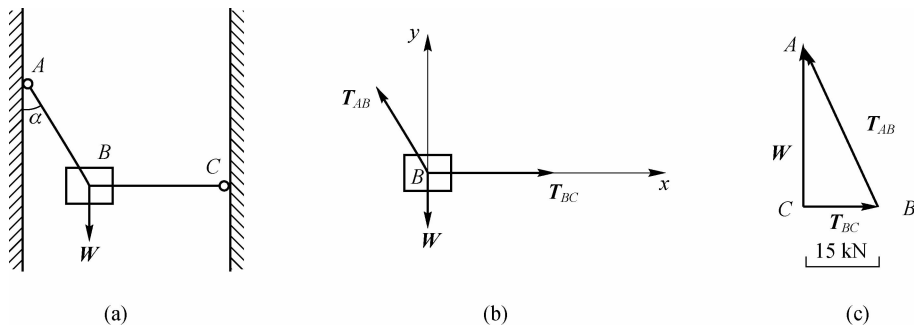


图 3-1

(3)用解析法求解。

建立直角坐标系 Bxy ,如图 3-1(b)所示,根据平衡方程求解。

$$\sum F_y = 0, T_{AB} \cos 30^\circ - W = 0, T_{AB} = 46.2 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0, T_{BC} - T_{AB} \sin 30^\circ = 0, T_{BC} = 23.1 \text{ kN}$$

【例 3-2】如图 3-2(a)所示,重物 $P = 20$ kN,用钢丝绳挂在支架的滑轮 B 上,钢丝绳的另一端缠绕在绞车 D 上。杆 AB 与 BC 铰接,并以铰链 A、C 与墙连接。如两杆和滑轮的自重不计,并忽略摩擦和滑轮的大小,试求平衡时杆 AB 和 BC 所受的力。

【解】 (1)由于 AB、BC 两杆都是二力杆,假设杆 AB 受拉力,杆 BC 受压力,如图 3-2(b)所示。为了求出这两个未知力,可通过求两杆对滑轮的约束力来解决。因此选取滑轮 B 为研究对象。

(2)画受力图。滑轮受到钢丝绳的拉力 F_1 和 F_2 (已知 $F_1 = F_2 = P$),杆 AB 和 BC 对滑轮的约束力为 F_{BA} 和 F_{BC} 。由于滑轮的大小可忽略不计,故这些力可看作是汇交力系,如图 3-2(c)所示。

(3)列平衡方程。选取坐标轴如图 3-2(c)所示。为使每个未知力只在一个轴上有投影,在另一轴上的投影为零,坐标轴应尽量取在与未知力作用线相垂直的方向。这样在一个平

衡方程中只有一个未知数,不必解联立方程,即

$$\sum F_x = 0, -F_{BA} + F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 30^\circ = 0 \quad (\text{a})$$

$$\sum F_y = 0, F_{BC} - F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ = 0 \quad (\text{b})$$

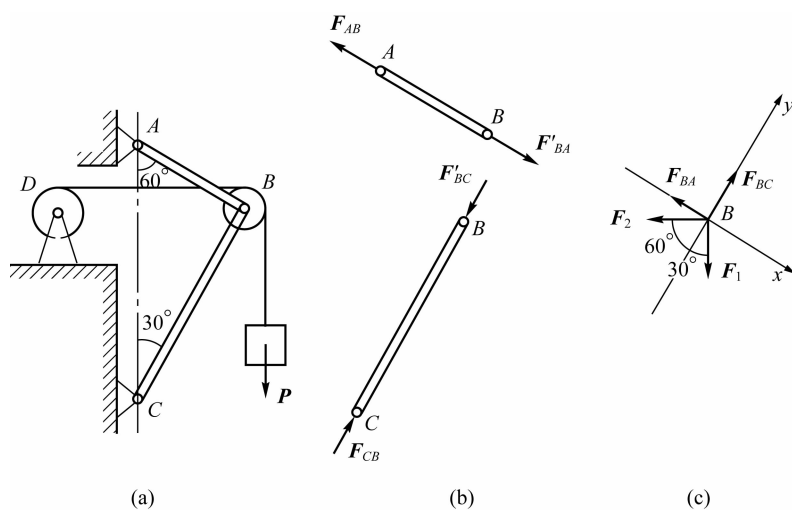


图 3-2

(4)求解方程。

由公式(a)得

$$F_{BA} = -0.366P = -7.321 \text{ kN}$$

由公式(b)得

$$F_{BC} = 1.366P = 27.32 \text{ kN}$$

所求结果, F_{BC} 为正值,表示该力的假设方向与实际方向相同,即杆 BC 受压。 F_{BA} 为负值,表示该力的假设方向与实际方向相反,即杆 AB 也受压力。

3.2 平面任意力系的平衡方程及应用

3.2.1 平面任意力系的平衡方程及应用

1. 一般情况下的平衡方程

平面任意力系向一点简化可得到一个主矢 \mathbf{R} 和一个主矩 M ,当主矢和主矩同时为零时,力系平衡。所以平面任意力系平衡的充分必要条件是 $\mathbf{R}=0, M=0$,于是,力系的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 \\ \sum M_O(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

式(3-3)说明:平面任意力系平衡时,力系中各力在两个坐标轴投影的代数和均为零,力系中的各力对其作用面内任一点的力矩代数和也为零。由于方程中含有一个力矩式子,因此这一方程组称为一矩式。

平面任意力系的平衡方程还有另外两种表达形式:二矩式与三矩式。

二矩式平衡方程:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 \\ \sum M_A(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-4)$$

式(3-4)有两个力矩式子和一个投影式子,该方程组的适用条件为 x 轴与 A 、 B 两点的连线不能垂直。

三矩式平衡方程:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_C(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

式(3-5)有三个力矩式子,该方程组的适用条件为 A 、 B 、 C 三点不共线。

上述三个平衡方程组在解决实际问题时是等效的,可根据问题的条件选择适当的方程组解题。

平面任意力系的平衡方程组由三个独立的方程构成,最多能求解三个未知量。求解时,两个坐标轴可任意取,只要二者不平行就行,矩心的位置也是任意的。但为了计算的简单,在解决工程实际问题时,常把矩心选在两个未知力的汇交点上,而投影轴应尽可能与力系中多数力的作用线垂直或平行,从而使计算简单。另外,平衡方程组中各方程没有因果关系,没有先后次序,也未必都用,可根据需要任意选取其中的方程。

2. 平行力系的平衡方程

对于平面平行力系,若投影轴垂直于各力作用线,无论力系是否平衡,力系中的各力向该轴的投影恒为零,因此,平衡方程组中不应含有向该轴的投影式子,如图 3-3 所示。

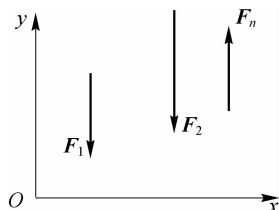


图 3-3

平面平行力系的平衡方程组为

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{iy} = 0 \\ \sum M_O(\mathbf{F}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

使用式(3-6)解题时,投影轴 y 与力系中的各力的作用线不能垂直。平面平行力系有两个独立的平衡方程,因此最多能求解两个未知量。

平面平行力系的平衡方程组还有一种表达式:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

式(3-7)的适用条件为 A, B 两点连线与力的作用线不平行。

【例 3-3】绞车通过钢丝牵引小车沿斜面轨道匀速上升,如图 3-4(a)所示。已知小车重 $P = 10 \text{ kN}$,绳与斜面平行, $\alpha = 30^\circ$, $a = 0.75 \text{ m}$, $b = 0.3 \text{ m}$,不计摩擦。求钢丝绳的拉力及轨道对车轮的约束反力。

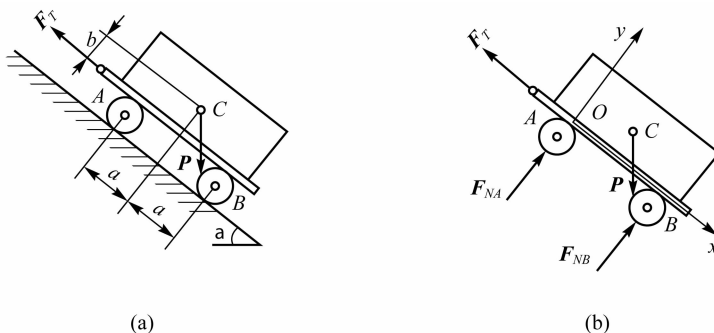


图 3-4

【解】 (1)取小车为研究对象,画受力图[图 3-4(b)].小车上作用有重力 P ,钢丝绳的拉力 F_T ,轨道在 A, B 处的约束反力 F_{NA} 和 F_{NB} 。

(2)取图示坐标系,列平衡方程。

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, -F_T + P \sin \alpha &= 0 \\ \sum F_y = 0, F_{NA} + F_{NB} - P \cos \alpha &= 0 \\ \sum M_O(\mathbf{F}) = 0, F_{NB}(2a) - Pb \sin \alpha - Pa \cos \alpha &= 0 \end{aligned}$$

解得 $F_T = 5 \text{ kN}, F_{NB} = 5.33 \text{ kN}, F_{NA} = 3.33 \text{ kN}$

【例 3-4】悬臂梁如图 3-5 所示,梁上作用有均布荷载 q ,在 B 端作用有集中力 $F = ql$ 和力偶为 $M = ql^2$,梁长度为 $2l$,已知 q 和 ql (力的单位为 N ,长度单位为 m)。求固定端的约束反力。

【解】 (1)取 AB 梁为研究对象,画受力图[图 3-5(b)],均布荷载 q 可简化为作用于梁中点的一个集中力 $F_Q = 2ql$ 。

(2)列平衡方程。

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, F_{Ax} &= 0 \\ \sum M_A(\mathbf{F}) = 0, M - M_A + F(2l) - F_Q l &= 0 \end{aligned}$$

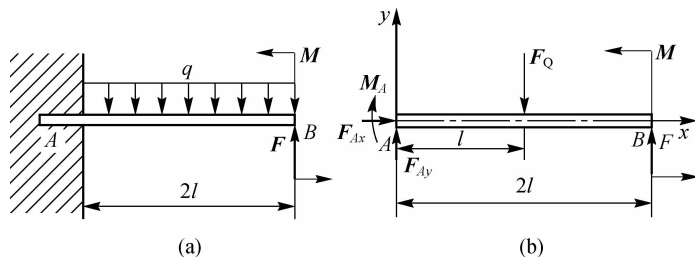


图 3-5

故
$$M_A = M + 2Fl - FQl = ql^2 + 2ql^2 - 2ql^2 = ql^2$$

故
$$\sum F_y = 0, F_{Ay} + F - F_Q = 0$$

故
$$F_{Ay} = F_Q - F = 2ql - ql = ql$$

3.2.2 物系的平衡问题

在工程实际中,许多机构和结构是由若干构件以一定的约束结合而成的系统,这称为物体系,简称为物系。物系的平衡问题是比较常见的问题。

当物系平衡时,系统内的每一部分都处于平衡状态。求解物系的平衡问题,思路、方法和选择的方程与单个物体的平衡完全相同,关键在于研究对象的确。由于物系的平衡问题中往往不仅有外部的约反力,而且还有系统内各物体间的相互作用力,因此只选择一个研究对象还不能求出全部的未知力,需选择两个或更多的研究对象。在解决实际问题时,可以先以整体为研究对象,解出一部分未知力,再以单个物体或小系统为研究对象,求出剩下的未知力;也可以分别以系统中的单个物体为研究对象,求解问题。选择研究对象时,以选择已知力和未知力共同作用的物体为好,还要尽量使计算过程简单,尽可能避免解联立方程组。另外还应注意一点,在以整体为研究对象时,系统内各物体间的相互作用力是内力,相互抵消,不体现出来;而若以单个物体为研究对象时,内力则转化成外力,必须考虑。

下面通过例题来说明如何求解物体系统的平衡问题。

【例 3-5】求图 3-6(a)所示多跨静定梁的支座反力。

分析:根据支座约束的特点,该梁应有如图 3-6(a)所示的 4 个支座反力,即 F_{Ax}, F_{Ay}, F_B 与 F_D ,但取整个多跨静定梁为隔离体时,静力平衡方程只有三个,不可能将 4 个反力完全求出,这是否意味着该结构属于超静定问题呢? 回答是否定的,因为该结构是由两个构件组成的,将 AC 段与 CD 段分别取隔离体并绘出如图 3-6(b)和 3-6(c)所示的受力图,不难发现真正的未知约束反力总计为 6 个(因 $F_{Cx} = F'_{Cx}, F_{Cy} = F'_{Cy}$),而两个隔离体也恰好能提供 6 个平衡方程,因此完全可求出这 6 个约束反力,故此结构为静定结构,又由于它属于多跨梁,因此称为多跨静定梁。在进行约束反力的具体求解过程中,为避免用 6 个方程联立解 6 个未知量,应仔细考察各个隔离体约束反力的情况,例如,图 3-6(b)所示隔离体中含有 5 个未知量,用 3 个平衡方程不可能全部求出 5 个未知量,然而,图 3-6(c)所示隔离体中只有 3 个未知量,因此可以由此开始求解。尚须指出的是集中力 P_2 ,它位于铰链 C 上,可在求解时先暂时假设此力作用于铰 C 的左侧,见图 3-6(b)。

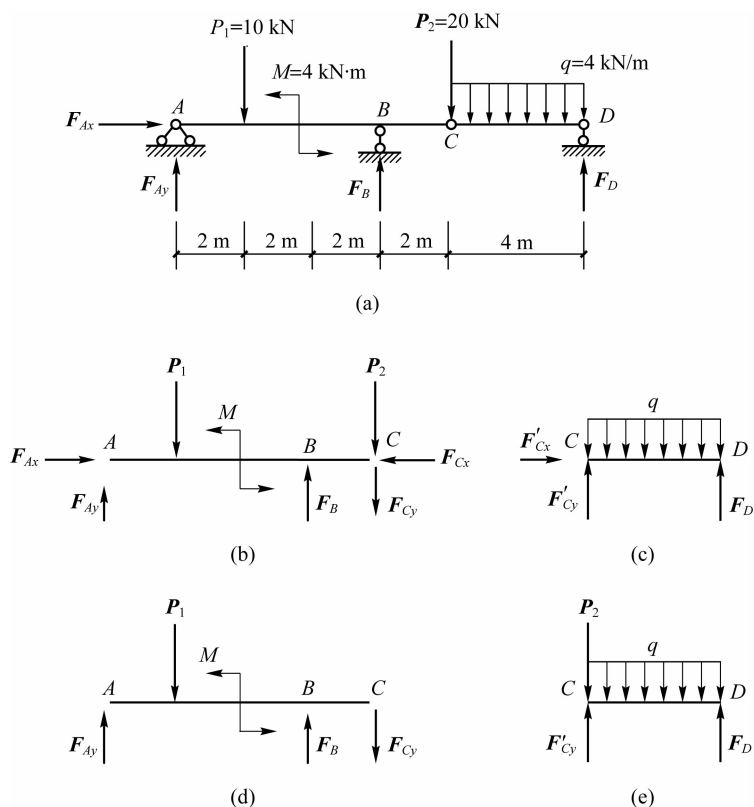


图 3-6

【解】 对于图 3-6(c)取 $\sum F_x=0$, 得 $F'_{Cx}=0$; 取 $\sum M_C(\mathbf{F})=0$, 有 $F_D \times 4 - 4 \times 4 \times 2 = 0$, 得 $F_D=8 \text{ kN}$; 取 $\sum F_y=0$, 有 $F'_{Cy} + F_D - 4 \times 4 = 0$, 得 $F'_{Cy}=16 - F_D=8 \text{ kN}$ 。

由于 F_{Cx} 与 F'_{Cx} , F_{Cy} 与 F'_{Cy} 均是作用力与反作用力的关系, 故应有

$$F_{Cx} = F'_{Cx} = 0, \quad F_{Cy} = F'_{Cy} = 8 \text{ kN}$$

此时图 3-6(b)所示隔离体只剩下 3 个未知量, 对此受力图建立平衡方程, 取 $\sum F_x=0$, 有 $F_{Ax} - F_{Cx}=0$, 得到 $F_{Ax}=0$; 取 $\sum M_A(\mathbf{F})=0$, 有

$$F_B \times 6 - P_1 \times 2 + M - P_2 \times 8 - F_{Cy} \times 8 = 0$$

$$\text{解得} \quad F_B = (10 \times 2 - 4 + 20 \times 8 + 8 \times 8) / 6 = 40 \text{ kN}$$

取 $\sum F_y=0$, 有

$$F_{Ay} + F_B - P_1 - P_2 - F_{Cy} = 0$$

$$\text{解得} \quad F_{Ay} = -40 + 10 + 20 + 8 = -2 \text{ kN} (\downarrow)$$

研究上述求解过程的结果, 可以发现 $F'_{Cx}=F_{Cx}=F_{Ax}=0$, 这表明梁中所有水平约束反力均为零, 这一结论对只承受横向荷载与力偶荷载作用的多跨静定梁而言是具有普遍意义的, 因为我们所研究的力系实质上是平面平行力系。

此题若将 P_2 置于铰 C 的右端, 如图 3-6(e)所示, 此时 F_D 将不发生变化, 但 F'_{Cy} 将等于 $(8+20) \text{ kN}=28 \text{ kN}$, 因此有 $F_{Cy}=F'_{Cy}=28 \text{ kN}$ 。对图 3-6(d)列平衡方程, 取 $\sum M_A(\mathbf{F})=0$, 有



$$F_B \times 6 - P_1 \times 2 + 4 - F_{Cy} \times 8 = 0$$

得到

$$F_B = \frac{10 \times 2 - 4 + 28 \times 8}{6} \text{ kN} = 40 \text{ kN}$$

取 $\sum F_y = 0$, 得到 $F_{Ay} = -2 \text{ kN} (\downarrow)$ 。

与前面对照不难发现, 铰上的集中力在求解时既可视在铰的左侧也可视为在铰的右侧, 这并不影响除铰 C 以外的支座反力的量值。

通过对上述例题的分析, 可将物体系统平衡问题的解题步骤和注意事项简述如下。

(1) 根据题意选取研究对象。这是很关键的一步, 选得恰当, 解题就能简洁顺利。选取研究对象, 一般从受已知力作用的物体开始, 先求出接触处的未知力, 而后再逐个选取, 直至求出全部未知力; 或者先取整体系统为研究对象, 求出部分未知力后, 再取系统中某一部分或某个物体为研究对象, 逐个求出其余未知力。

(2) 对确定的研究对象进行受力分析, 正确地画出受力图。受力图上只画外力, 要注意作用力与反作用力的关系。

(3) 按照受力图所反映的力系特点和需要求解的未知力的数目, 列出相应的独立平衡方程。为使解题简洁, 应尽可能地使每个方程只包含一个未知量。为此, 矩心可取在未知力的交点上, 坐标轴尽可能与较多的未知力垂直。

(4) 求解平衡方程。若求得的约束力为负值, 则说明力的实际方向与受力图中假设的方向相反。但若用它代入另一方程求解其他未知量时, 应连同负号一并代入。

3.3 空间力系的平衡方程及应用

空间任意力系向一点简化也得到一个主矢 \mathbf{R} 和一个主矩 \mathbf{M} , 但主矩 \mathbf{M} 是矢量。其平衡的充要条件与平面任意力系的平衡条件完全相同, 即 $\mathbf{R} = 0, \mathbf{M} = 0$ 。

3.3.1 空间任意力系的平衡方程

由空间任意力系的平衡条件, 可以得到空间任意力系的平衡的解析表达式为

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} = 0, \sum M_x(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum F_{iy} = 0, \sum M_y(\mathbf{F}) = 0 \\ \sum F_{iz} = 0, \sum M_z(\mathbf{F}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

式(3-8)说明空间任意力系平衡时, 力系中的各力在直角坐标系中的各轴上的投影代数和为零, 对各轴之矩的代数和也为零。

空间任意力系的平衡方程组由六个方程组成, 对于受空间任意力系作用而处于平衡的物体, 运用方程组最多求出六个未知量。

根据空间任意力系的平衡方程, 可以推出空间汇交力系和空间平行力系的平衡方程。

1. 空间汇交力系的平衡方程

由于空间汇交力系的简化结果只有一个合力 \mathbf{R} , 因此, 力系平衡的平衡条件是力系的合

力 \mathbf{R} 为零,对应的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 \\ \sum F_{iz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

空间汇交力系的平衡方程组由三个方程组成,利用方程组最多只能求出三个未知量。

2. 空间平行力系的平衡方程

当空间平行力系中的各力的作用线与三维直角坐标系的 z 轴平行时,无论力系是否平衡,力系中各力在 x, y 轴上的投影都是零,且各力对 z 轴的力矩也是零,因此,空间平行力系的平衡方程组为

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{iz} &= 0 \\ \sum M_x(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_y(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

可见,空间平行力系的平衡方程组也是由三个方程组成,最多只能求出三个未知量。

3.3.2 空间力系平衡方程的应用

求解空间力系作用下的平衡问题,其步骤与求解平面力系的平衡问题一样:首先选取研究对象,进行受力分析,画受力图;其次建立合适的坐标系,根据力系的特点选择对应的方程组,列方程,求出未知量。需要指出的是,要根据力系的特点建立坐标系,尽可能地使方程中的未知量最少,以方便计算,另外根据实际问题的需要,方程组中的方程可以不必都列出,只要求出所有未知量即可。

【例 3-6】 在图 3-7 所示的悬臂刚架中,若已知荷载 $F_1=20 \text{ kN}$, $F_2=100 \text{ kN}$, $q=10 \text{ kN/m}$, 尺寸 $H=2 \text{ m}$, $h=1.5 \text{ m}$, $l=3 \text{ m}$ 。不考虑刚架的自重,求刚架所受的约束反力。

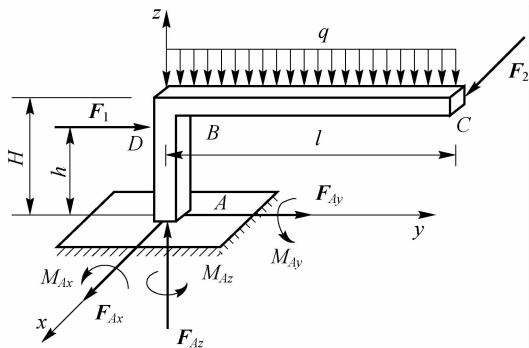


图 3-7

【解】 以刚架为研究对象画受力图。

因 A 端为固定端,阻碍被约束构件向任意方向移动和绕任意轴转动,故其约束反力为三个相互垂直的分力和三个作用面相互垂直的分力偶,如图 3-7 所示,刚架所受力系为空间任



意力系。

建立坐标系,列平衡方程为

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0 \quad F_{Ax} + F_2 = 0 & \quad \text{得 } F_{Ax} = -100 \text{ kN} \\ \sum F_{iy} = 0 \quad F_{Ay} + F_1 = 0 & \quad \text{得 } F_{Ay} = -20 \text{ kN} \\ \sum F_{iz} = 0 \quad F_{Az} - ql = 0 & \quad \text{得 } F_{Az} = 30 \text{ kN} \\ \sum M_x(\mathbf{F}) = 0 \quad M_{Ax} - F_1 h - ql \times \frac{l}{2} = 0 & \quad \text{得 } M_{Ax} = 85 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ \sum M_y(\mathbf{F}) = 0 \quad M_{Ay} + F_2 H = 0 & \quad \text{得 } M_{Ay} = -200 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ \sum M_z(\mathbf{F}) = 0 \quad M_{Az} - F_2 l = 0 & \quad \text{得 } M_{Az} = 300 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

3.4 摩 擦

摩擦是机械运动中的普遍现象,在某些问题中,因其不起主要作用,在初步计算中忽略它的影响而使问题大为简化。但在大多数工程技术问题中,它是不可忽略的重要因素。摩擦通常表现为有利的和有害的两个方面。人靠摩擦行走,车靠摩擦制动,螺钉无摩擦将自动松开,带轮无摩擦将无法传动,这些都是摩擦有利的一面。但是,摩擦还会引起机械发热、零件磨损、降低机械效率和减少使用寿命等,这些是摩擦有害的一面。研究摩擦的目的在于掌握摩擦规律,从而达到兴利除弊的目的。

3.4.1 滑动摩擦

摩擦可分为滑动摩擦和滚动摩擦。本节主要介绍静滑动摩擦及考虑摩擦时物体的平衡问题。

两物体接触表面间产生相对滑动或具有相对滑动趋势时所具有的摩擦,称为滑动摩擦。

两物体表面间只具有滑动趋势而无相对滑动时的摩擦,称为静滑动摩擦(静摩擦)。

两物体接触表面间产生相对滑动时的摩擦,称为动滑动摩擦(动摩擦)。

如图 3-8 所示,当 F_T 很小时, B 盘没有滑动而只具有滑动趋势,此时物系将保持平衡。摩擦力 F_f 与主动力 F_T 等值。

F_T 逐渐增大, F_f 也随之增加。 F_f 具有约束反力的性质,随主动力的变化而变化。

F_f 增加到某一临界值 $F_{f\max}$ 时,就不会再增大,如果继续增大 F_f , B 盘将开始滑动。因此,静摩擦力随主动力的不同而变化,其大小由平衡方程决定,但介于零与最大值之间,即

$$0 \leq F_f \leq F_{f\max}$$

静摩擦定律:实验证明,最大静摩擦力的方向与物体相对滑动趋势方向相反,大小与接触面法向反力 F_N 的大小成正比,即

$$F_{f\max} = f_s F_N \quad (3-11)$$

式中,比例常数 f_s 称为静摩擦系数, f_s 的大小与两物体接触面的材料及表面情况(粗糙度、干湿度、温度等)有关,而与接触面积的大小无关。一般材料的静摩擦系数可在工程手册上查到。

动摩擦定律:当水平力 F_T 超过 $F_{f\max}$ 时, B 盘开始加速滑动,此时 B 盘所受到的摩擦阻力已由静摩擦力转化为动摩擦力。实验证明,动滑动摩擦力的大小与接触表面间的正压力 F_N 成正比,即

$$F_f' = fF_N \quad (3-12)$$

式中, f 称为动摩擦系数(也称比例常数),它主要取决于接触面材料的表面情况。在一般情况下 f 略小于 f_s ,可近似认为 $f = f_s$ 。

滑动摩擦定律提供了利用摩擦和减小摩擦的途径。若要增大摩擦力,可以通过加大正压力和增大摩擦系数来实现。例如,在带传动中,要增加胶带和胶带轮之间的摩擦,可用张紧轮,也可采用 V 型胶带代替平胶带的方法。又如,汽车在下雪后行驶时,要在公路上撒细沙,以增大摩擦系数,避免打滑等。另外,要减小摩擦时可以设法减小摩擦系数,在机器中常用降低接触表面的粗糙度或加润滑剂等方法,以减小摩擦和损耗。

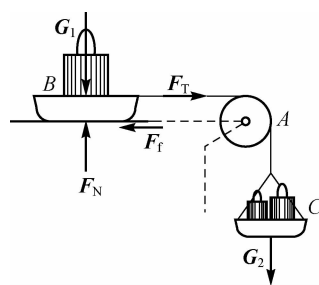


图 3-8

3.4.2 摩擦角和自锁

如图 3-9(a)所示,物体受力 F_P 作用仍静止时,把它所受的法向反力 F_N 和切向摩擦力 F 合成为一个反力 F_R ,称为全约束反力,或全反力。它与接触面法线间的夹角为 φ ,由此得

$$\tan \varphi = F/F_N$$

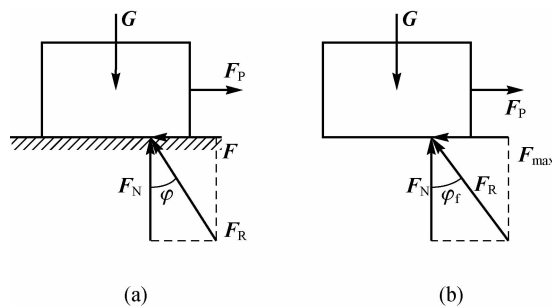


图 3-9

φ 将随主动力的变化而变化,当物体处于平衡的临界状态时,静摩擦力达到最大静摩擦力 F_{\max} , φ 也将达到相应的最大值 φ_f ,称为临界摩擦角,简称摩擦角。如图 3-9(b)所示,此时有

$$\tan \varphi_f = F_{\max}/F_N = (f_s F_N)/F_N = f_s \quad (3-13)$$

上式表明,静摩擦系数等于摩擦角的正切值。

由于静摩擦力不能超过其最大值 F_{\max} ,因此 φ 总是小于等于 φ_f : $0 \leq \varphi \leq \varphi_f$,即全反力的作用线不可能超出摩擦角的范围。由此可知:

(1)当主动力的合力 F_Q 的作用线在摩擦角 φ_f 以内时,由二力平衡公理可知,全反力 F_R 与之平衡(见图 3-10)。因此,只要主动力合力的作用线与接触面法线间的夹角 α 不超过 φ_f ,即

$$\alpha \leq \varphi_f \quad (3-14)$$



则不论该合力的大小如何,物体总处于平衡状态,这种现象称为摩擦自锁。式(3-14)称为自锁条件。利用自锁原理可设计某些机构或夹具,如千斤顶、压榨机、圆锥销等,使之始终保持在平衡状态下工作。

(2)当主动力合力的作用线与接触面法线间的夹角 $\alpha > \varphi_f$ 时,全反力不可能与之平衡,因此不论这个力多么小,物体一定会滑动。工程上,例如对于传动机构,利用这个道理可避免自锁使机构不致卡死。

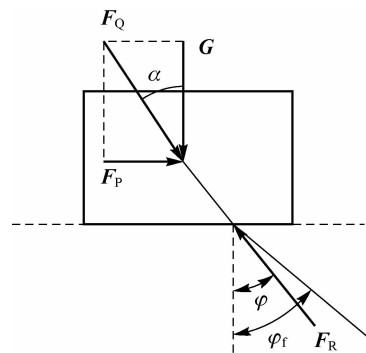


图 3-10

3.4.3 考虑滑动摩擦时的平衡问题

考虑摩擦时的平衡问题与前面没有摩擦时的平衡问题分析方法基本相同,其中不同的内容如下。

(1)分析物体受力时,除了一般约束反力外,还必须考虑摩擦力,其方向与滑动的趋势相反。

(2)需分清物体是处于一般平衡状态还是临界状态。在一般平衡状态下,静摩擦力的大小由平衡条件确定,并满足 $F \leq F_{\max}$ 关系式;在临界状态下,静摩擦力为一确定值,满足 $F = F_{\max} = f_s F_N$ 关系式。

(3)由于静摩擦力可在零与 F_{\max} 之间变化,所以物体平衡时的解也有一个变化范围。为了避免解不等式,一般先假设物体处于临界状态,求得结果后再讨论解的范围。

【例 3-7】图 3-11(a)所示一重为 200 N 的梯子 AB 一端靠在铅垂的墙壁上,另一端搁置在水平地面上, $\theta = \arctan \frac{4}{3}$ 。假设梯子与墙壁间为光滑约束,而与地面之间存在摩擦,静摩擦因数 $f_s = 0.5$ 。请问梯子处于静止还是会滑倒? 此时摩擦力的大小为多少?

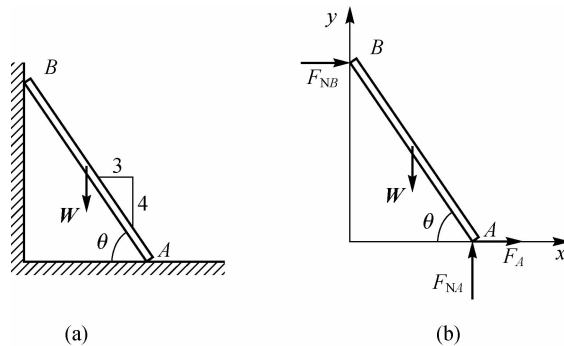


图 3-11

【解】解这类问题时,可先假定物体静止,求出此时物体所受的约束反力与静摩擦力 F ,把所求得的 F 与可能达到的最大静摩擦力 F_{\max} 进行比较,就可确定物体的真实情况。取梯子为研究对象,其受力图及所取坐标轴如图 3-11(b)所示。此时,设梯子 A 端有向左滑动的趋势。由平衡方程

$$\sum F_x = 0, F_A + F_{NB} = 0$$

$$\sum F_y = 0, F_{NA} - W = 0$$

$$\sum M_A(F) = 0, W \frac{l}{2} \cos \theta - F_{NB} l \sin \theta = 0$$

解得

$$F_{NA} = W = 200 \text{ N}$$

$$F_A = -F_{NB} = -\frac{1}{2}W \cdot \cot \theta = -75 \text{ N}$$

根据静摩擦定律,可能达到的最大静摩擦力

$$F_{A\max} = f_s F_{NA} = 0.5 \times 200 \text{ N} = 100 \text{ N}$$

求得的静摩擦力为负值,说明它真实的指向与假设方向相反,即梯子应具有向右的趋势,又因为 $|F_A| < F_{A\max}$,说明梯子处于静止状态。

对这种类型的摩擦平衡问题,即已知作用在物体上的主动力,需判断物体是否处于平衡状态,可将摩擦力作为一般约束反力来处理。然后用平衡方程求出所受的摩擦力,并通过与最大静摩擦力做比较,判断物体所处的状态。

【例 3-8】某变速机构中双联滑移齿轮如图 3-12 所示。已知齿轮轴孔与轴间的摩擦系数为 f_s ,轮与轴接触面的长度为 b 。问拨叉(图中未画出)作用在齿轮上的力 F 到轴线的距离 a 为多大,才能保证齿轮不被卡住。设齿轮重量忽略不计。

【解】 齿轮轴孔与轴间总有一定的间隙,齿轮在拨叉的推动下有倾倒趋势,此时齿轮与轴就在 A、B 两点处接触。取齿轮为研究对象,画出受力图,列出平衡方程,考虑平衡的临界情况,由静摩擦定律有

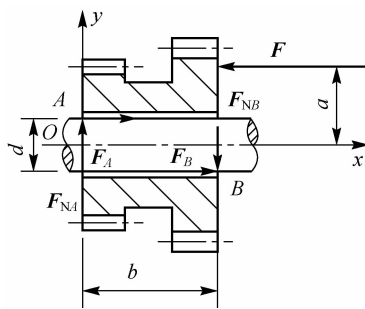


图 3-12

$$\sum F_x = 0, F_A + F_B - F = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_y = 0, F_{NA} - F_{NB} = 0 \quad (b)$$

$$\sum M_O(F) = 0, Fa - F_{NB}b - F_A \frac{d}{2} + F_B \frac{d}{2} = 0 \quad (c)$$

$$F_A = f_s F_{NA}, F_B = f_s F_{NB} \quad (d)$$

联立以上各式可解得

$$a = \frac{b}{2f_s}$$

这是临界情况所要求的条件。

要保证齿轮不发生自锁现象(即不被卡住),其条件是

$$F > F_A + F_B = f_s (F_{NA} + F_{NB}) = 2 f_s F_{NB}$$

将(c)式所得力矩方程 $Fa = F_{NB}b$ 代入上式,得最终不被卡住的条件为 $a < \frac{b}{2f_s}$ 。

思考与练习

一、分析简答题

1. 如果平面汇交力系的各力在任意两个互不平行的坐标轴上投影的代数和等于零,该



力系是否平衡?

2. 力系的合力与主矢有何区别?

3. 力系平衡时合力为零,非平衡力系是否一定有合力?

4. 力系的主矩与力偶矩有何不同?

5. 某平面力系向 A 、 B 两点简化的主矩皆为零,此力系简化的最终结果可能是一个力吗? 可能是一个力偶吗? 可能平衡吗?

6. 用解析法求平面汇交力系的合力时,若选取不同的直角坐标系,计算出的合力的大小有无变化? 计算出的合力与坐标轴的夹角有无变化?

7. 从图 3-13 所示的平面汇交力系的力多边形中,判断哪个力系是平衡的,哪个力系有合力,并指出合力。

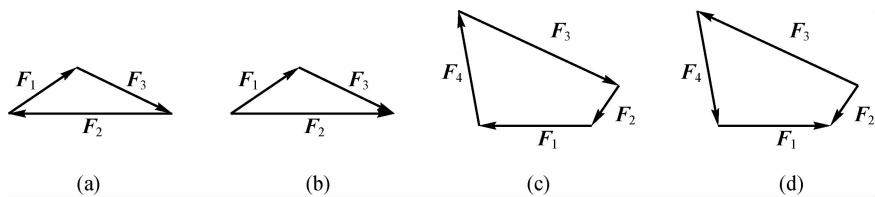


图 3-13

二、分析计算题

1. 如图 3-14 所示,重为 $P=10\text{ kN}$ 的物体放在水平梁的中央,梁的 A 端用铰链固定于墙上,另一端用 BC 杆支撑,若梁和撑杆的自重不计,求 BC 杆受力及 A 处的约束反力。

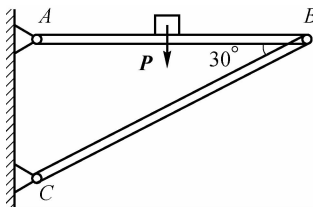


图 3-14

2. 图 3-15 所示大船由三条拖轮牵引,每根拖缆拉力为 5 kN 。求:(1)作用于大船的合力;(2)欲使合力沿大船轴线方向,应如何调整 A 船与大船轴线的夹角 α ?

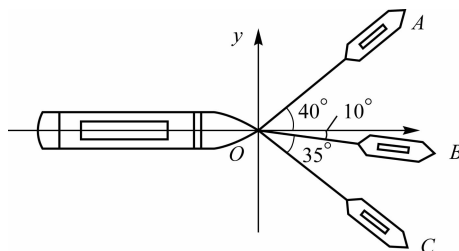


图 3-15

3. 如图 3-16 所示简易起重机用钢丝绳吊起重 $W=2\ 000\text{ N}$ 的重物,各杆自重不计, A 、 B 、 C 三处简化为铰链连接,求杆 AB 和 AC 受到的力。(滑轮尺寸和摩擦不计)

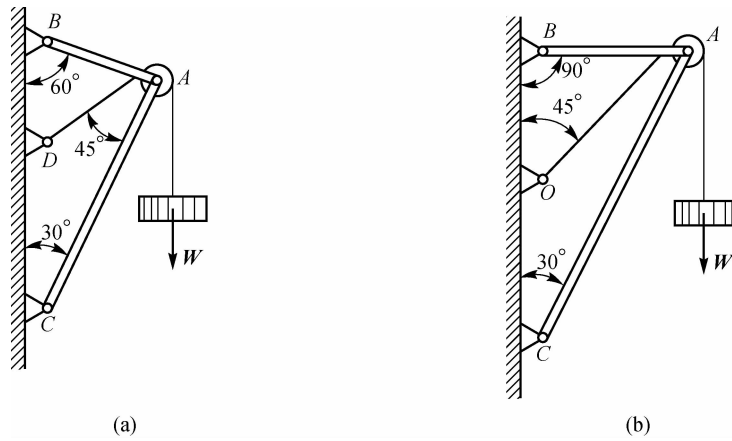


图 3-16

4. 一个 450 N 的力作用在 A 点, 方向如图 3-17 所示。求: (1) 此力对 D 点的矩; (2) 要得到与 (1) 相同的力矩, 应在 C 点所加水平力的大小与指向; (3) 要得到与 (1) 相同的力矩, 在 C 点应加的最小力。

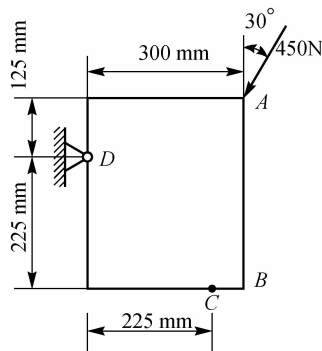


图 3-17

5. 求图 3-18 示齿轮和皮带上各力对点 O 之矩。已知: $F=1\text{ kN}$, $\alpha=20^\circ$, $D=160\text{ mm}$, $F_{T1}=200\text{ N}$, $F_{T2}=100\text{ N}$ 。

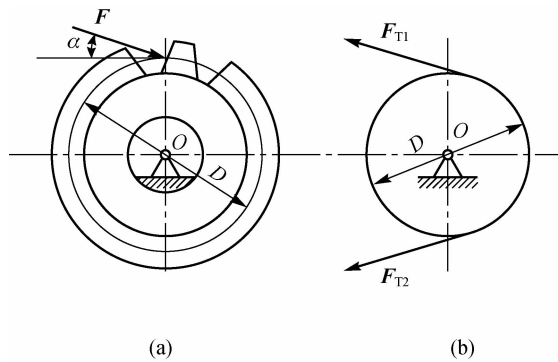


图 3-18



6. 构件的荷载及支撑情况如图 3-19 所示, $l=4\text{ m}$, 求支座 A、B 的约束反力。

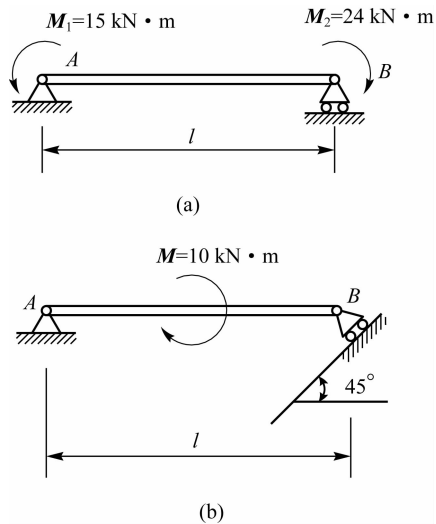


图 3-19

7. 锻锤工作时, 若锻件给锻锤的反作用力有偏心, 已知打击力 $F=1\ 000\text{ kN}$, 偏心距 $e=20\text{ mm}$, 锤体高 $h=200\text{ mm}$, 如图 3-20 所示, 求锤头给两侧导轨的压力。

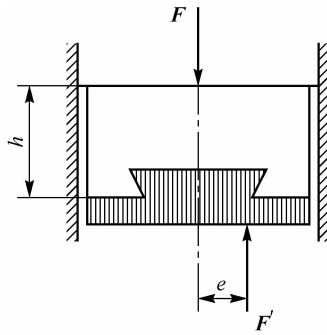


图 3-20

8. 一根均质杆重 1 kN , 将其竖起, 如图 3-21 所示。在图示位置平衡时, 求绳子的拉力和 A 处的支座反力。

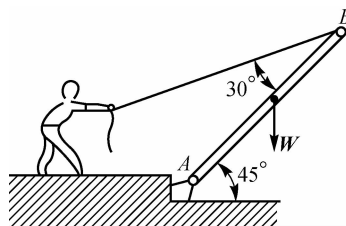


图 3-21

9. 如图 3-22 所示, 已知 q, a , 且 $F=qa, M=qa^2$ 。求图中各梁的支座反力。

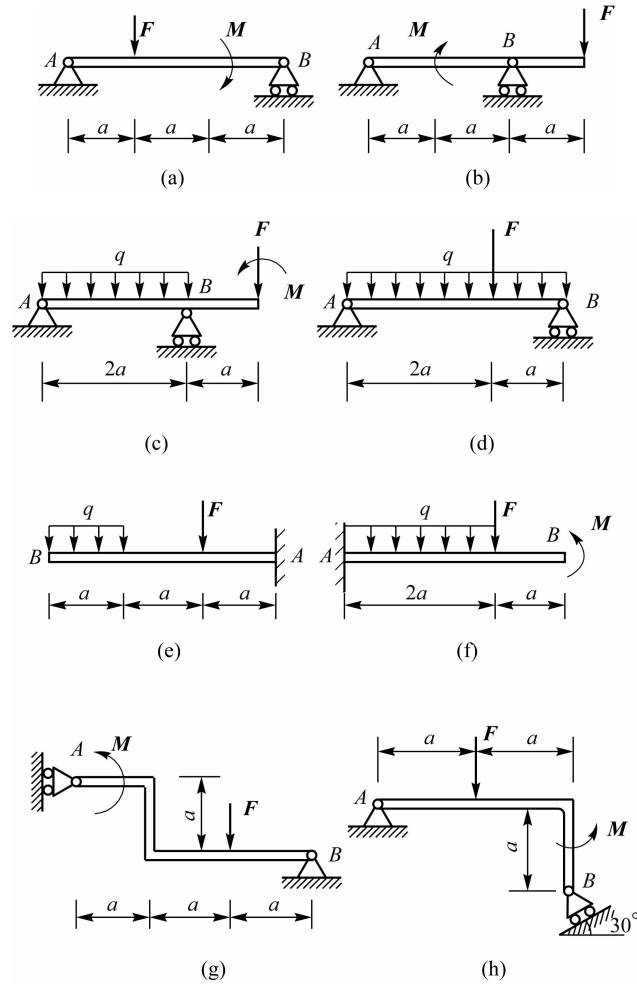


图 3-22

第4章 材料力学基础

学习目标

- 理解变形固体及其基本假设。
- 了解杆件变形的形式。
- 掌握内力与应力。
- 了解变形与应变。

4.1 变形固体及其基本假设

4.1.1 变形固体

自然界中的任何固体在外力作用下都会发生变形。当研究构件的强度、刚度和稳定性问题时,由于这些问题与构件的变形密切相关,因此在这类问题中,虽然构件的变形很小,但却是主要影响因素,所以必须把构件看作变形固体。

4.1.2 变形固体的基本假设

工程中使用的固体材料是多种多样的,而且其微观结构和力学性能也各不相同。为了使问题得到简化,通常对变形固体做如下基本假设。

1. 连续性假设

连续性假设认为在固体材料的整个体积内毫无空隙地充满了物质。

事实上,固体材料是由无数的微粒或晶粒组成的,各微粒或晶粒之间是有空隙的,是不可能完全紧密的,但这种空隙与构件的尺寸比起来极为微小,可以忽略不计。根据这个假设,在进行理论分析时,与构件性质相关的物理量可以用连续函数来表示。

2. 均匀性假设

均匀性假设认为构件内各点处的力学性能是完全相同的。

事实上,组成构件材料的各个微粒或晶粒,彼此的性质不尽相同。但是构件的尺寸远远

大于微粒或晶粒的尺寸,构件所包含的微粒或晶粒的数目又极多,所以,固体材料的力学性能并不反映其微粒的性能,而是反映所有微粒力学性能统计平均量。因而,可以认为固体的力学性能是均匀的。按照这个假设,在进行分析时,可以从构件内任何位置取出一小部分来研究材料的性质,其结果均可代表整个构件。

3. 各向同性假设

各向同性假设认为构件内的一点在各个方向上的力学性能是相同的。

事实上,组成构件材料的各个晶粒是各向异性的。但由于构件内所含晶粒的数目极多,在构件内的排列又是极不规则的,在宏观的研究中固体的性质并不显示方向的差别,因此可以认为某些材料是各向同性的,如金属材料、塑料以及浇注得很好的混凝土。根据这个假设,当获得了材料在任何一个方向的力学性能后,就可将其结果用于其他方向。但是此假设并不适用于所有材料,如木材、竹材和纤维增强材料等,其力学性能是各向异性的。

4. 线弹性假设

变形固体在外力作用下发生的变形可分为弹性变形和塑性变形两类。在外力撤去后能消失的变形称为弹性变形;不能消失的变形,称为塑性变形。当所受外力不超过一定限度时,绝大多数工程材料在外力撤去后,其变形可完全消失,具有这种变形性质的变形固体称为完全弹性体。本课程只研究完全弹性体,并且外力与变形之间符合线性关系,即线弹性假设。

5. 小变形假设

小变形假设认为变形量是很微小的。

工程中大多数构件的变形都很小,远小于构件的几何尺寸。这样,在研究构件的平衡和运动规律时仍可以直接利用构件的原始尺寸来计算。在研究和计算变形时,变形的高次幂项也可忽略,从而使计算得到简化。

以上是有关变形固体的几个基本假设。实践表明,在这些假设的基础上建立起来的理论都是符合工程实际要求的。

4.2 杆件变形的基本形式

在工程力学中,把长度方向的尺寸远大于横截面尺寸的一类构件称为杆件,杆件中各横截面形心的连线称为轴线,轴线为直线的杆称为直杆;其中,各横截面尺寸和形状相同的直杆,称为等直杆;轴线为曲线的杆件称为曲杆。杆件是结构系统中最基本的构件,它在工程实际中大量存在,很多其他形式的构件,也可以简化为一根杆件或杆件的组合结构来处理。例如,桥梁,机器连杆,建筑物中的横梁、立柱等,都可以简化为杆件来进行受力分析。

杆件在各种荷载作用下将产生各式各样的变形,但可以把杆件的变形归纳为下列四种基本变形形式中的一种,或者是某几种基本变形的组合变形。

4.2.1 拉伸或压缩变形

当杆在两端受到大小相等、方向相反、合力作用线与轴线重合的一对作用力时,杆就产

生轴向拉伸或压缩变形,即变形特点为杆件沿轴线方向伸长或缩短。如图 4-1 所示的结构,在 B 点受到力作用后, AB 杆产生轴向拉伸变形,而 BC 杆则产生轴向压缩变形。

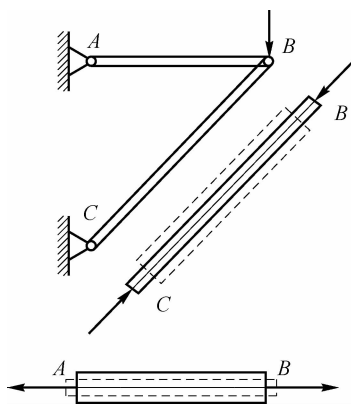


图 4-1

4.2.2 剪切变形

如图 4-2 所示的直杆发生的变形就是剪切变形,其受力特点是作用在构件两侧面上的横向外力的合力大小相等、方向相反、作用线相距很近;其变形特点是两力间的横截面发生相对错动。

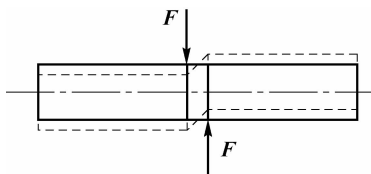


图 4-2

4.2.3 扭转变形

如图 4-3 所示,为齿轮轴传动装置,其圆轴上发生的主要为扭转变形。这种变形是由大小相等、转向相反、作用面垂直于轴线的两个力偶作用产生的。扭转变形的特点是杆轴上任意两个横截面绕轴线作相对转动,产生相对扭转角。在工程上,承受扭转变形的构件很多,如汽车的转向轴、机械传动轴等。

4.2.4 弯曲变形

如图 4-4 所示,当杆受到与之轴线垂直的横向力作用后,就会产生弯曲变形。其变形特点是杆轴线由直线变成一光滑连续曲线。建筑物中的横梁、刚架等,主要就是产生弯曲变形。

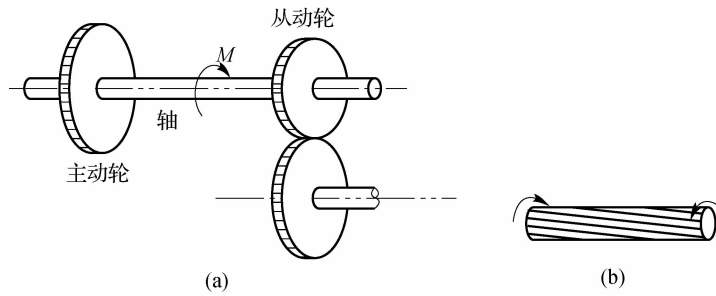


图 4-3

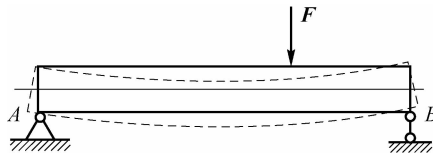


图 4-4

杆件的复杂变形则是上述基本变形的组合形式。例如,机械齿轮轴,常常受到扭转与弯曲的联合作用,两种变形同时发生。又如,房屋结构中的框架柱主要是产生压弯组合变形等。

4.3 内力和应力

4.3.1 内力的概念

构件因受到外力的作用而变形,其内部各部分之间的相互作用力也发生改变。这种由于外力作用而引起的构件内部各部分之间的相互作用力的改变量,称为“附加内力”,简称内力。内力总是与构件的变形同时产生的,随外力的增加而增大,当达到某一限度时就会引起构件破坏,故构件的强度、刚度等问题均与内力密切相关。下面研究内力的计算。

4.3.2 截面法

求构件内力的基本方法是截面法。用截面法求内力的步骤如下。

- (1) 截开。在求内力的截面处,假想地用一平面将构件截为两部分。
- (2) 取出。任取其中的一部分(一般取受力情况较简单的部分)作为研究对象,弃去另一部分。
- (3) 代替。将弃去部分对留下部分的作用用内力代替。按照连续性假设,内力应连续分布于整个切开的截面上。将该分布内力系向截面上一点(通常为截面形心)简化后得到内力系的主矢和主矩,以后就称它们为该截面上的内力。



(4)平衡。考虑留下部分的平衡,列出平衡方程,求出内力。

【例 4-1】求图 4-5(a)所示构件 $m-m$ 截面上的内力。

【解】假想地用一平面沿 $m-m$ 截面把构件截开,取构件的下半部分为研究对象。在构件 A 端有外力 F_1 和 F_2 作用。欲使这部分构件平衡, $m-m$ 截面上必有内力作用。显然,内力是水平方向的力 F_S 、铅垂方向的力 F_N 和力偶 M [见图 4-5(b)]。

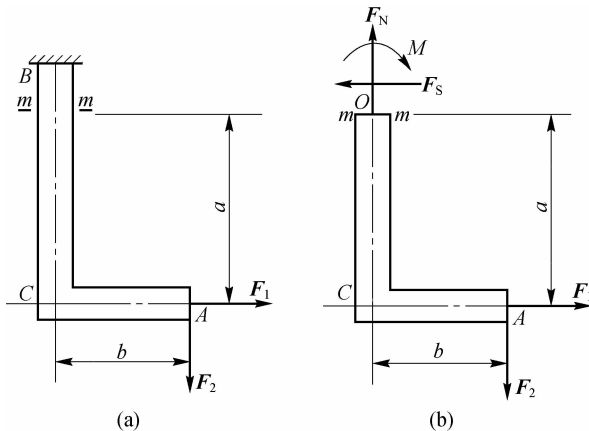


图 4-5

列出平衡方程

$$\sum X = 0, F_1 - F_S = 0$$

得

$$F_S = F_1$$

$$\sum Y = 0, F_N - F_2 = 0$$

得

$$F_N = F_2$$

$$\sum M_0 = 0, F_1 a - F_2 b - M = 0$$

得

$$M = F_1 a - F_2 b$$

需要指出,在用截面法之前,不能随意采用力或力偶沿其作用线或作用面的移动,以及力系的合成等静力等效替换的做法。因为这样做虽然对构件的平衡没有影响,但会改变构件的变形性质,并使内力也随之改变。例如,在图 4-6(a)中,若把力 F_1 移动到 C 点,则 CA 段的变形显然与前面不同。再如 4-6(a)中外力 F_1 若用图 4-6(b)所示等效力系代替时,杆件变形之不同则是十分明显的。但在截开后建立留下部分的平衡方程时,这些静

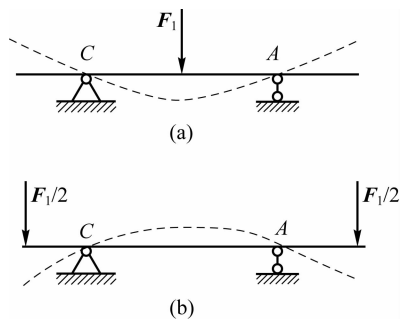


图 4-6

力等效替换的做法是可以使用的。

4.3.3 应力

由上可知,内力是截面上的分布内力系的主矢和主矩,它只表示截面上总的受力情况,还不足以确切地反映构件的危险程度。例如,用同一种材料制作的粗细不同两根杆件,在相同的拉力作用下,二杆横截面上的内力相同,但二杆的危险程度却不同,显然细杆比粗杆危险。因此,研究构件的强度问题只知道截面上的内力是不够的,还需要知道内力在截面上各点处的密集程度(简称集度),为此引进应力的概念。

如图 4-7(a)所示为一受力构件,现在来研究其 $m-m$ 截面上 M 点处的应力。在受力构件的 $m-m$ 截面上围绕 M 点取一微面积 ΔA ,设微面积 ΔA 上分布内力的合力为 ΔF ,则在 ΔA 范围内的单位面积上内力的平均集度为

$$p_m = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

称为 ΔA 上的平均应力。

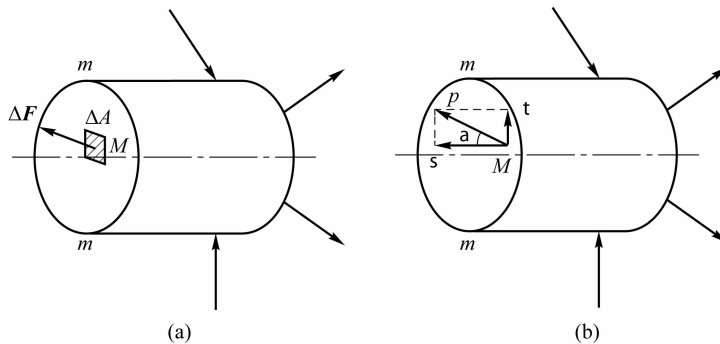


图 4-7

为了确切反映 M 点处内力的集度,可令微面积 Δ 趋近于零,此时平均应力 p_m 的极限值称为 $m-m$ 截面上 M 点处的应力,用 p 表示,即

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} p_m = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (4-1)$$

应力 p 是一个矢量,一般既不与截面垂直,也不与截面相切。通常把应力 p 分解为垂直于截面的法向分量 σ 和与截面相切的切向分量 τ [见图 4-7(b)],法向分量 σ 称为正应力,切向分量 τ 称为切应力。由图 4-7(b)知

$$\sigma = p \cos \alpha, \tau = p \sin \alpha \quad (4-2)$$

应力常用的单位为 Pa(帕), $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ 。工程实际中常采用帕的倍数单位,如 kPa(千帕)、MPa(兆帕)和 GPa(吉帕),其关系为

$$1 \text{ kPa} = 1 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ MPa} = 1 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ GPa} = 1 \times 10^9 \text{ Pa}$$

4.4 变形与应变

构件在外力作用下,其几何形状和尺寸的改变,统称为变形。一般来说,构件内各点处的变形是不均匀的。因此,为了研究构件的变形以及截面上的应力分布规律,就必须研究构件内部点处的变形。

围绕受力构件内 M 点取一微小的正六面体,见图 4-8(a),设其沿 x 轴方向的棱边长为 Δx ,变形后为 $\Delta x + \Delta u$, Δu 称为 x 方向的线变形。 Δu 与 Δx 的比值

$$\epsilon_m = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

称为线段 Δx 的平均线应变。当 Δx 趋近于零时,平均线应变的极限即为 M 点处沿 x 方向的线应变,用 ϵ_x 来表示,即

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (4-3)$$

同样,可定义 M 点处沿 y, z 方向的线应变 ϵ_y 和 ϵ_z 。

当构件受力后,上述正六面体除棱边的长度改变外,原来互相垂直的平面,例如, Oxz 和 Oyz 平面间的夹角也可能发生改变,见图 4-8(b),直角的改变量 γ 称为切应变。

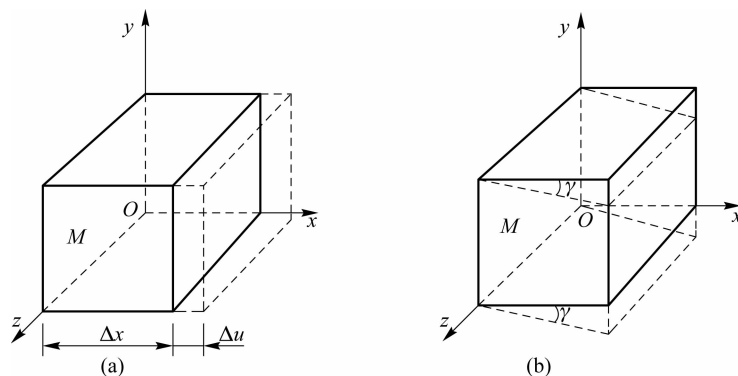


图 4-8

线应变 ϵ 和切应变 γ 是度量构件内一点处变形程度的两个基本量。 γ 的单位是 rad(弧度)。

实验表明:当正应力 σ 未超过某一极限值时,正应力 σ 与其相应的线应变 ϵ 成正比。引入比例常数 E ,则可得到

$$\sigma = E\epsilon \quad (4-4)$$

式(4-4)称为胡克定律。式中的比例常数 E 称为材料的弹性模量。它与材料的力学性能有关,是衡量材料抵抗弹性变形能力的一个指标。对同一材料,弹性模量 E 为常数。 E 的数值随材料而异,可由试验测定。 E 的单位与应力的单位相同。

实验还表明:当切应力 τ 未超过某一极限值时,切应力 τ 与其相应的切应变 γ 成正比。引入比例常数 G ,则可得到

$$\tau = G\gamma \quad (4-5)$$

式(4-5)称为剪切胡克定律。式中的比例常数 G 称为材料的切变模量。它也与材料的力学性能有关。对同一材料,切变模量 G 为常数,可由试验测定。 G 的单位与应力的单位相同。

思考与练习

一、分析简答题

1. 变形体和刚体主要有什么区别?
2. 材料力学对变形固体所作的基本假设有哪些?
3. 什么是内力? 进行内力分析的基本方法是什么?
4. 杆件变形的基本形式有哪些? 分别列举一例说明。
5. 什么是正应力? 什么是切应力?

二、分析计算题

1. 求图 4-9 所示杆件各指定截面上的内力,图 4-9(b)中各指定截面与相应截面无限接近。

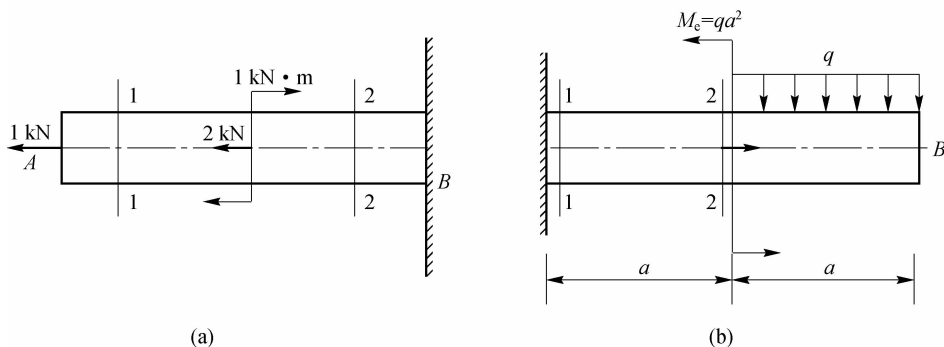


图 4-9

2. 轴向拉伸试件 A、B 两点间的距离 l 称为标距,如图 4-10 所示。受拉力作用后用变形仪量出两点间距离的增量为 $\Delta l = 5 \times 10^{-2}$ mm。若标距 $l = 100$ mm,求试件的平均线应变 ϵ_m 。

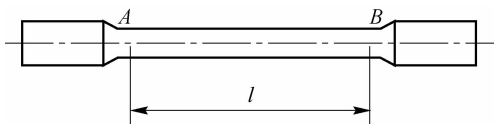


图 4-10

3. 已知钢和混凝土的弹性模量分别为 $E_g = 200$ GPa, $E_h = 28$ GPa。试比较在正应力相同的情况下哪种材料的线应变大。两种材料的线应变有什么关系? 在线应变相同的情况下,哪种材料的正应力大? 两种材料的正应力有什么关系? 当两杆的线应变 $\epsilon_g = \epsilon_h = -0.001$ 时,两杆的正应力各为多少?