

## 单元一

# 静力学的基本概念与受力分析



### 单元导读

静力学主要研究物体在力的作用下处于平衡的规律,以及如何建立各种力系的平衡条件。本单元首先介绍静力学的基本概念和基本公理,然后进行物体的受力分析,最后介绍构件的受力图画法。可以说受力分析是画受力图的基础,因此受力分析是本单元的重点。



### 相关知识

## 第一节 静力学的基本概念

### 一、刚体的概念

刚体是指在力的作用下,大小和形状都不变的物体。这是一个抽象化的力学模型,和刚体相对的为变形体,事实上物体在力的作用下都会产生不同程度的变形。但在一般情况下,我们认为工程上的结构构件和机械零件的变形都是微小的,而这种微小的变形可以忽略不计,所以可以把结构构件和机械零件抽象为刚体。如钢筋混凝土结构中的梁,一般情况下可以将其视为刚体来进行研究。在静力学中我们可以将受力的物体假设为刚体,研究刚体的平衡问题,这样可以减少工作量,使问题简单明了。但是,如果我们考虑问题时认为微小的变形不能忽略,那么必须把物体视为变形体进行分析,当然研究变形体的平衡问题也是以刚体静力学为基础的。

在静力学中所研究的物体只限于刚体,因此,静力学又称刚体静力学。由若干个刚体组成的系统称为物体系统,简称物系。

### 二、平衡的概念

平衡是指物体相对于惯性参考系处于静止或匀速直线运动状态。在实际工程中,我们一般选惯性参考系为固连于地球的参考系。这样一来,工程中的一般平衡问题就转化为物体相对地球处于静止或匀速直线运动状态的问题。

静力学研究的对象包括以下问题:

(1)力系的等效替换或简化。即用一个简单的力系等效替换原力系对刚体的作用,此二者互为等效力系。若已知力系与某一单个力等效,则称此单个力为该力系的合力。

(2)建立各种力系的平衡条件。使刚体处于平衡状态的力系,称为平衡力系。平衡力系应该满足的条件称为平衡条件。

### 三、力的概念

力是物体间的相互机械作用,这种作用可以使物体的运动状态发生变化或使物体产生变形。前者称为力的运动(外)效应,后者称为力的变形(内)效应。静力学主要研究力的运动效应,例如,人用力推某一物体,使该物体从静止状态进入运动状态。当然,力的运动效应和力的变形效应在一般情况下是同时存在的,但是在分析力的效应的时候,可以将它们分开研究,这样可以简化问题。另外还要指出,既然力是物体间的相互机械作用,那么肯定存在一个施力体和一个受力体,上面所讲的例子中,“人”作为施力体,而“某一物体”作为受力体而存在,这一点在后面的受力分析过程中要特别注意,没有相互作用就不能进行受力分析。

力的作用效果取决于力的三个要素,简称力的三要素。

(1)力的大小。表示物体之间机械作用的强度。力的单位,采用国际单位时为  $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ 、牛顿(N)以及千牛(kN)。

(2)力的方向。表示物体之间机械作用的方向。力的方向包括力的作用线在空间的方向和力沿作用线的指向。

(3)力的作用点。是物体间机械作用位置的抽象,力的作用位置实际上并不是一个点,而是作用于物体的一定面积上。我们将很小的作用面积抽象为一个点,将作用于一个个点上的力称为集中力,通过力的作用点代表力的方位的直线称为力的作用线。如果力的作用面积不能抽象为一个点,则将作用于这个面积上的力称为分布力。分布力的作用强度用单位面积上力的大小来度量,称为载荷集度,一般用  $\text{N}/\text{mm}^2$  来表示。

力具有大小和方向,因此力是矢量,而且为定位矢量。所以可以用一个定位的有向线段来表示力。如图 1-1 所示,线段 AB 的长度(按一定的比例尺)表示力的大小,箭头的指向表示力的方向,线段的起点 A(或终点 B)表示力的作用点。通过力的作用点与线段重合的虚线称为力的作用线。我们一般用两种方式来表示力:一种是用图形表示;另一种是用符号  $\mathbf{F}$  来表示,大小  $F=|\mathbf{F}|$ 。

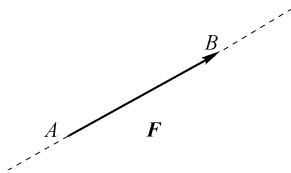


图 1-1 力的图示

### 四、力系的概念

力系是指作用于物体上的一群力。作用在物体上的力可以是一个力,也可以是多个力,力的作用线可以在同一平面内,也可以不在同一个平面内,而是在三维空间内。当物体只有一个力作用时,我们可以将它看作是一个力系,这种力系在所有力系中最简单的一种情况。当有多个力作用于同一物体的时候(复杂力系),也就是我们在工程实际中经常遇到的情况,我们可以用一个简单力系代替一个复杂力系,从而使问题简化。这个过程称为力系的等效或简化。如果一个力与一个力系等效,则称此力为该力系的合力,该力系中各力称为该合力的分力或分量。求合力的过程称为力系的合成。

力系按照作用线是否处于同一平面可以分为两种。



### 1. 平面力系

所有力的作用线在同一平面内的力系为平面力系,平面力系又可分为以下三种:

- (1)平面汇交力系。即所有力的作用线汇交于一点的平面力系。
- (2)平面平行力系。即所有力的作用线都相互平行的平面力系。
- (3)平面任意力系。即所有力的作用线既不汇交于同一点,又不相互平行的平面力系。

### 2. 空间力系

所有力的作用线不在同一平面内的力系为空间力系,空间力系也可分为以下三种:

- (1)空间汇交力系。即所有力的作用线汇交于一点的空间力系。
- (2)空间平行力系。即所有力的作用线都相互平行的空间力系。
- (3)空间任意力系。即所有力的作用线既不汇交于同一点,又不相互平行的空间力系。

通过以上的分析可知,平面汇交力系和平面平行力系是平面力系的特殊形式,而平面力系又是空间力系的特殊形式,所以说空间任意力系是力系中最一般的形式。

## 第二节 静力学的基本公理

公理是人类经过长期实践并总结经验而得到的结论,它被反复的实践所验证,是无须证明而为人们所公认的结论。静力学公理已被证明是符合客观实际的普遍规律,是研究静力学的基础和解决静力学问题的关键。

### 公理 1 二力平衡公理

作用于刚体上的两个力,使刚体处于平衡的必要与充分条件是:这两个力大小相等  $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|$ 、方向相反  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ ,作用力共线,作用于同一物体上。

需要说明的是,对于刚体来说,上面的条件是充要条件;对于如图 1-2(a)所示的变形体或如图 1-2(b)所示的多体,上面的条件只是必要条件。

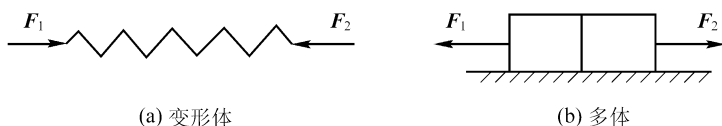


图 1-2 变形体和多体

该公理阐明了作用于刚体上的最简单力系的平衡条件。当某一杆件只受两个力作用而处于平衡状态,则该杆件称为二力杆。二力杆是工程中最常见的受力形式,它的受力特点是:两个力必沿作用点的连线,如图 1-3(a)所示。在工程中把只受两个力作用而平衡的构件称为二力构件,如图 1-3(b)所示。这个公理是论证刚体平衡条件的基础。

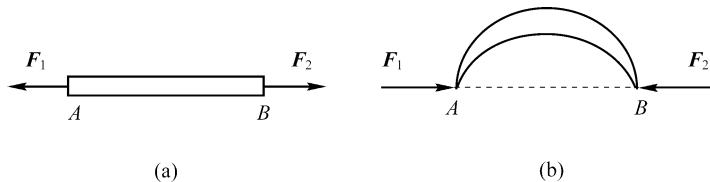


图 1-3 二力杆

**公理 2 力的平行四边形法则**

作用于物体上同一点的两个力,可以合成为一个合力。合力的作用点仍在该点,合力的大小和方向以这两个力为边所作的平行四边形的对角线来表示,如图 1-4(a)所示,图中  $F_1$  与  $F_2$  的合力为  $F_R$ ,作用点仍为该点,大小和方向由以这两个力为边所作的平行四边形的对角线来确定。用公式表示为

$$F_R = F_1 + F_2 \quad (1-1)$$

需要指出的是式(1-1)是矢量的和,而不是代数等式。为了便于求解合力  $F_R$ ,一般我们习惯于用三角形法则,如图 1-4(b)所示。

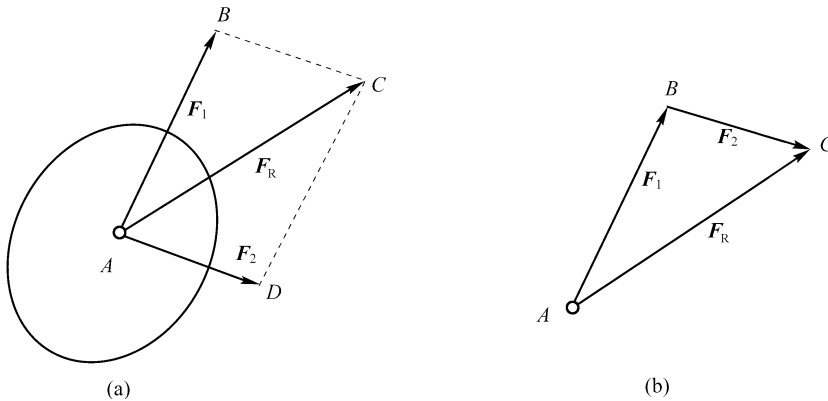


图 1-4 力的平行四边形和三角形法则

**公理 3 加减平衡力系公理**

在作用于刚体上的任何一个力系中加上或减去任何一个平衡力系,并不改变原力系对刚体的作用。

这是显而易见的,因为平衡力系对于刚体的平衡或运动状态没有影响。这个公理是力系简化的重要理论依据,但是公理 3 并不适用于变形体。由公理 3 可以推导出两个重要的推论。

**推论 1 力的可传性原理**

作用在刚体上的力,可沿其作用线移到刚体内任意一点,而不改变该力对刚体的作用效应。

**证明:**设力  $F$  作用在刚体上的  $A$  点,如图 1-5(a)所示。在力  $F$  作用线上任意一点  $B$  上加上一对平衡力  $F_1$  与  $F_2$ ,且使  $F_2 = F = -F_1$ ,如图 1-5(b)所示。

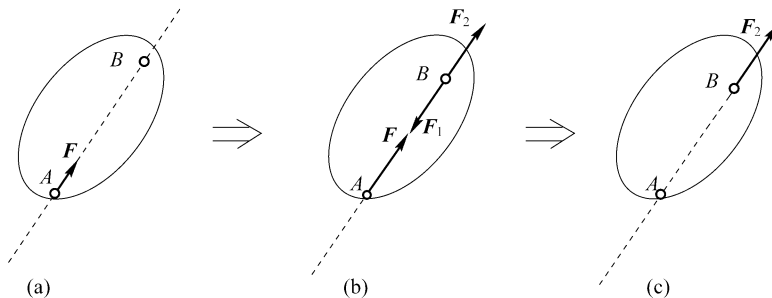


图 1-5 力的可传性

由公理 3 可知,这并不改变原力  $F$  对刚体的作用。由公理 1 可知, $F$  与  $F_1$  构成平衡力



系,再由公理3可以判定,这个平衡力系可以去掉。最后剩下作用于点B的力 $F_2$ ,如图1-5(c)所示。可见 $F_2$ 与 $F$ 等效,又因 $F_2=F$ ,因此可将力 $F_2$ 看做是力 $F$ 从点A滑移至点B而力的作用效应不变。

根据力的可传性原理可知,对刚体而言,力是滑动矢量,它可沿其作用线滑移至刚体上的任意位置。

### 推论2 三力平衡汇交定理

作用于刚体上的三个力平衡,若其中两个力的作用线汇交于一点,则此三力必在同一平面内,且第三个力的作用线必通过此汇交点。

**证明:**在刚体上的A、B、C点分别作用有三个力,且相互平衡,如图1-6所示。由力的可传性原理,将力 $F_1$ 和 $F_2$ 移到汇交点O,并有 $F'_1=F_1$ , $F'_2=F_2$ 。再根据力的平行四边形法则,求得合力 $F_{12}$ 。则力 $F_3$ 应与 $F_{12}$ 平衡。由于两个力平衡必须共线,故力 $F_3$ 必定与力 $F_1$ 和 $F_2$ 共面,且通过力 $F'_1$ 与 $F'_2$ 的交点O。

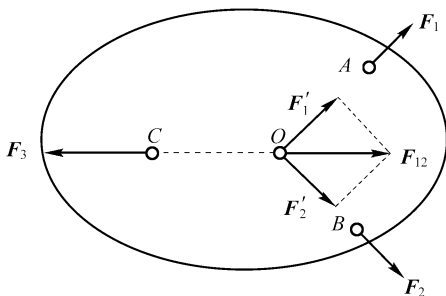


图 1-6 三力平衡

### 公理4 作用与反作用公理

两物体间相互作用的力,总是大小相等、方向相反,沿同一直线,并分别作用于两个物体上。

这个定律指出了两个物体之间相互作用的关系,力必是成对出现的。有作用力,必定有反作用力。需要强调指出的是:作用力与反作用力虽然等值、共线、反向,但并不作用于同一物体上。因此,不能误认为这两个力互成平衡,这与二力平衡公理有本质的区别,不能混同。在对由许多物体组成的系统进行受力分析过程中,应用该公理就可以从对原物体的受力分析,过渡到对其相邻物体的受力分析,简化并解决实际工程问题。

## 第三节 约束与约束反力

力学中将刚体分为自由体和非自由体。位移不受限制的物体叫自由体,如飘在空中的气球。位移受限制的物体叫非自由体,如在轨道内行驶的电车。对非自由体的某些位移预先施加的限制条件称为约束。注意这里讲的约束是名词,而不是动词的约束,如电车的轨道就是对电车的约束。

约束对被约束物体的作用力称为约束反力,简称反力。约束反力具有以下三个特点:

(1)大小常常是未知的。在解决工程问题时,一般已知物体所受的主动动力(使物体运动或有运动趋势的力),然后求解约束反力。

(2)方向总是与被约束限制的物体的位移方向相反。

(3)作用点在物体与约束相接触的那一点。

工程中约束的类型是各种各样的,因此在分析过程中要针对具体情况具体分析,下面介绍一些常见约束的基本类型。

### 一、柔性约束

由柔软的绳索、链条或皮带构成的约束称为柔性约束。如图 1-7 所示,绳索类只能承受拉力,所以它们的约束反力作用在接触点,方向沿绳索背离物体。图中  $G$  表示物体的重力, $T$  表示约束反力。

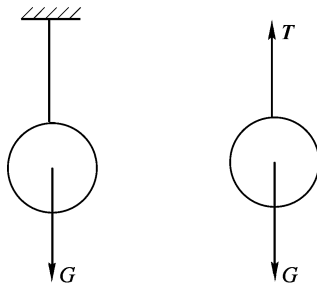


图 1-7 柔性约束及约束反力

### 二、光滑面约束

两个物体互相接触,如果接触面上的摩擦力忽略不计,我们认为是光滑面约束。光滑面约束的约束反力作用在接触点处,方向沿接触面的公法线,指向受力物体。这类约束不能限制物体沿接触面切线方向的运动,只能限制物体沿接触面的公法线方向运动,并且只能受压,不能受拉。因此光滑面约束的反力又叫法向反力,通常用  $F_N$  表示。如图 1-8(a)所示为固定支承平面对圆球的约束,如图 1-8(b)所示为固定支承曲面对圆球的约束,如图 1-8(c)所示为固定支撑面对杆件的约束。

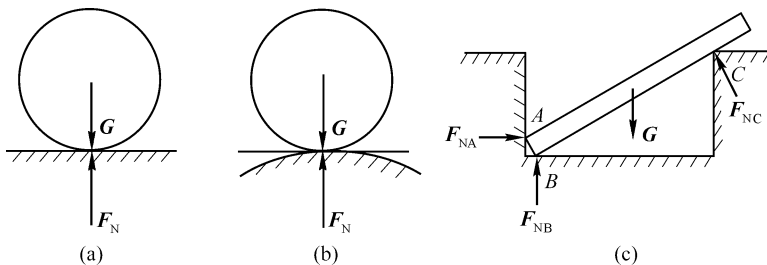


图 1-8 光滑面约束及约束反力

### 三、圆柱铰链约束

圆柱铰链约束包括中间铰链约束、固定铰链支座、活动铰链支座和链杆约束。

(1)中间铰链约束。铰链是工程中常用的一种约束,通常用于连接构件或零部件,铰链一般是两个带有圆孔的物体,用光滑圆柱形销钉相连接,物体只能绕销钉的轴线转动,这种连接称为中间铰。

(2) 固定铰链支座。在圆柱铰链约束中,若某构件固定作为基座,则构成固定铰链支座。如图 1-9(a)所示,固定铰链支座对于另一物体的约束力是通过销钉给予物体的作用力,其示意图如图 1-9(b)所示,所以可以用正交的两个分力  $F_{N_x}$  和  $F_{N_y}$  来表示,如图 1-9(c)所示。

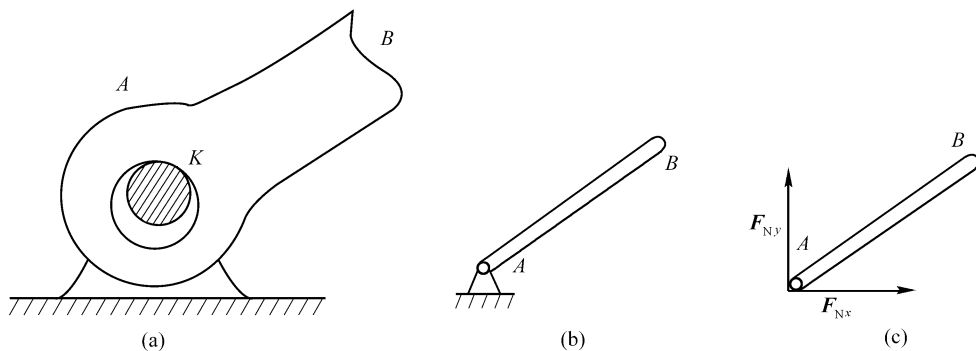


图 1-9 固定铰链支座及约束反力

(3) 活动铰链支座(辊轴支座)。活动铰链支座相当于在固定铰链支座的底部安装一排滚轮,如图 1-10(a)所示,就可使支座沿固定支承面移动,但不能脱离支撑面。在不计各接触面摩擦的情况下,活动铰链支座不能限制构件绕销钉的转动和沿支撑面的运动,只能限制构件沿支撑面垂直方向的移动,其计算简图如图 1-10(b)所示。因此活动铰链支座的约束力方向必垂直于支承面,且通过铰链中心,而指向未知,如图 1-10(c)所示。这种支座常用于桥梁、屋架或天车等结构中,可以避免由温度变化而引起结构内部变形应力。



视频  
光滑铰链约束

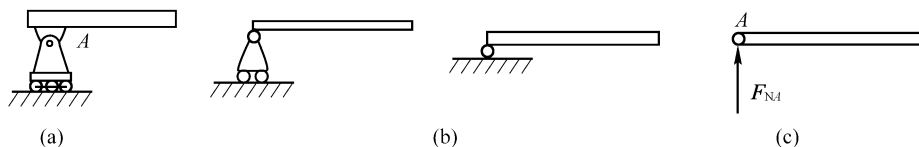


图 1-10 活动铰链支座及约束反力

(4) 链杆约束。链杆是指两端用光滑销钉与其他构件连接而中间不受力的直杆。如图 1-11(a)所示的杆件 AB,很显然链杆 AB 是二力杆。由于是二力杆,所以链杆在工程中常被用来作为拉杆或撑杆,这种约束的示意图如图 1-11(b)所示。但链杆只能限制构件沿其轴线方向的运动,而不能限制其他方向的运动。因此,约束力的作用线一定是沿着链杆两端铰链的连线,指向待定,如图 1-11(c)所示。

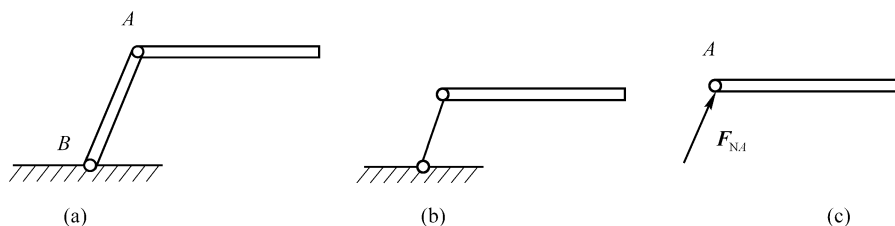


图 1-11 链杆约束及约束反力

## 第四节 构件的受力分析

解决力学问题时,首先要选定需要进行研究的构件,即选择研究对象;然后根据已知条件、约束类型并结合基本概念和公理分析它的受力情况,这个过程称为构件的受力分析。在静力学范围内,我们认为作用在构件上的力分为主动力和约束反力。使构件具有运动趋势的力称为构件所受的主动力,如重力、风力、气体压力等。限制构件运动的力可以称为约束反力。由此可以把物体受力分析分为以下几个步骤:

- (1)根据题目恰当地选择研究对象,研究对象可以是一个物体或一个物系。
- (2)取分离体。
- (3)在分离体上,画出构件所受的主动力,并标出各主动力的名称。
- (4)根据约束的类型确定约束反力的位置与方向,画在分离体上,并标出各约束反力的名称。

## 第五节 构件的受力图

将所要研究的对象(构件或构件系统)从周围构件的约束中分离出来,画出作用在该研究对象上的全部主动力和约束反力,这样的图称为受力图,也称分离体图。

画受力图有以下注意事项:

(1)要画出构件所受的全部力。一般除重力、电磁力外,构件之间只有通过接触才有相互机械作用力,要分清研究对象(受力体)都与周围哪些构件(施力体)相接触,接触处必有力,力的方向由约束类型而定。

(2)不要多画力。要注意既然力是构件之间的相互机械作用,那么对于受力体所受的每一个力,都应能明确地指出它是哪一个施力体施加的。

(3)要正确画出力的方向。约束反力的方向必须严格地按照约束的类型来画,不能单凭直观或根据主动力的方向来简单推想。在分析两构件之间的作用力与反作用力时要注意:作用力的方向一旦确定,反作用力的方向一定要与之相反,不要把箭头方向画错。

(4)约束不能出现在受力图上,即受力图一定要画在分离体上。

(5)受力图上只画外力,不画内力。一个力属于外力还是内力,因研究对象的不同有可能不同。当把物系拆开来分析时,原系统的部分内力就成为新研究对象的外力,这一点在分析的过程中必须注意。

(6)同一系统各研究对象的受力图必须整体与局部一致,相互协调,不能相互矛盾。对于某一处的约束反力的方向一旦设定,在整体、局部或单个构件的受力图上要与之保持一致。

(7)正确判断二力构件。二力构件是工程中最简单的受力构件,先画出它的受力图,然后再画出其他构件的受力图,另外在分析以及画受力图的过程中要注意正确运用三力平衡



汇交定理。

**例 1-1** 如图 1-12(a)所示的小球在力  $F$  的作用下处于静止状态,试画出小球的受力图。

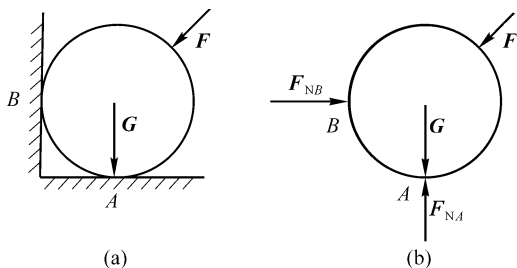


图 1-12 小球的受力图

**解** 取小球为研究对象,将小球从体系中分离出来,有重力  $G$  和小球所受的压力  $F$ ,取消小球在  $A$  和  $B$  两处受到左侧墙体和地面的约束,如不计摩擦,则均为光滑面约束,故在  $A$  处受地面的支撑力  $F_{NA}$  的作用,在  $B$  处受墙体的阻力  $F_{NB}$  的作用,它们都沿着与小球的接触点的公法线而指向圆心,小球的受力图如图 1-12(b)所示。

**例 1-2** 一木条  $EF$  置于一凹槽内,如图 1-13(a)所示,木条的重量为  $G$ ,不计摩擦的影响,下端与凹槽内  $A$ 、 $B$  点接触,上端与凹槽的接触点为  $C$ ,试画出木条  $EF$  的受力图。

**解** 首先选择木条为研究对象,将木条从体系中分离出来,单独画出,取消  $A$ 、 $B$ 、 $C$  处的约束,加上作用在木条上的约束反力  $F_{NA}$ 、 $F_{NB}$ 、 $F_{NC}$ 。根据约束的特点,反力  $F_{NA}$  垂直于左侧墙体,反力  $F_{NB}$  方向垂直于地面,反力  $F_{NC}$  垂直于木条  $EF$ ,受力图如图 1-13(b)所示。

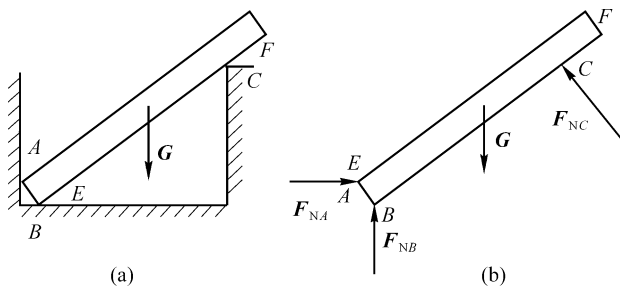


图 1-13 木条的受力图

**例 1-3** 如图 1-14(a)所示的屋架结构中,已知主动力  $F$  作用于铰  $D$  上。 $AB$  杆上作用有竖向载荷  $G$ ,杆件与杆件之间均为铰接,不计杆件自重,试分析  $AB$ 、 $BC$  及  $DE$  杆件的受力并画出受力图。

**解** 根据题意分别取  $AB$ 、 $BC$ 、 $DE$  杆件及整体为研究对象。

(1)取整体为研究对象。不考虑  $AB$ 、 $BC$  以及  $DE$  之间的相互作用力(即全部内力),整体只受外力  $G$  和外力  $F$ ,以及  $A$ 、 $C$  两处的反力  $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$  和  $F_C$  作用,受力图如图 1-14(b)所示。

(2)以  $AB$  为对象,它受主动力  $G$  和  $F$ ,杆  $DE$  的拉力  $F_D$ ,以及  $A$ 、 $B$  两处铰的约束力  $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$  和  $F_{Bx}$ 、 $F_{By}$ ,故其受力图如图 1-14(c)所示。

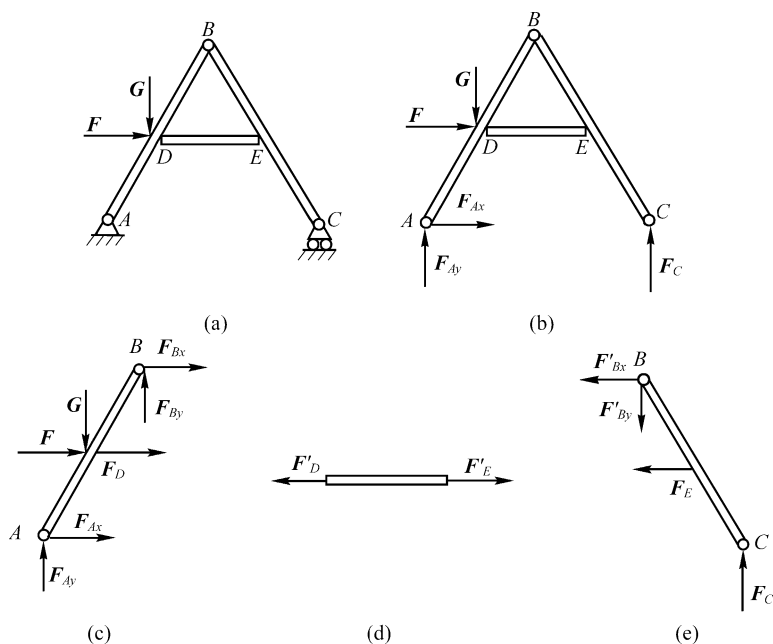


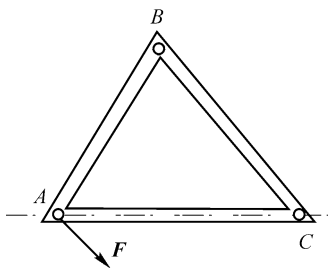
图 1-14 屋架的受力图

(3)取杆  $DE$  为对象,它属于两端铰接,因此只受到轴力  $F'_D$  和  $F'_E$  的作用,其中  $F'_D$  和  $F'_E$  与  $F_D$  和  $F_E$  分别等值且反向,受力图如图 1-14(d)所示。

(4)以  $BC$  为研究对象。它受杆  $DE$  的拉力  $F_E$ (与  $F_D$  等值、反向、共线)以及  $C$  端活动铰支座的约束反力  $F_C$ ,  $B$  处受到杆  $AB$  的约束反力  $F'_{Bx}$ 、 $F'_{By}$ (分别与  $F_{Bx}$ 、 $F_{By}$  等值、反向、共线),  $BC$  的受力图如图 1-14(e)所示。

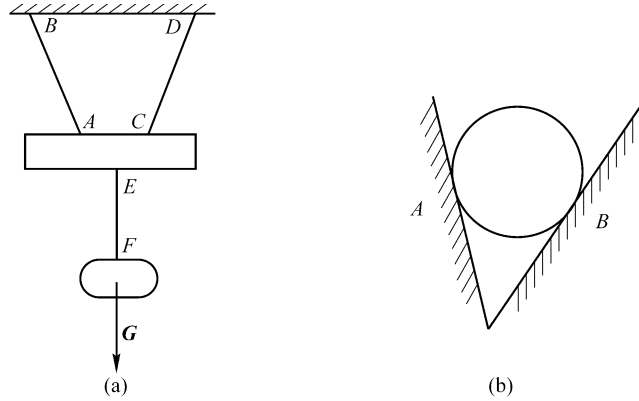
 单元练习

1. 在三角形杆  $ABC$  上,如果在  $A$  点作用一个图示方向的力  $F$ ,如图题 1-1 所示,在  $C$  点加一个力能否和力  $F$  相互平衡,为什么?



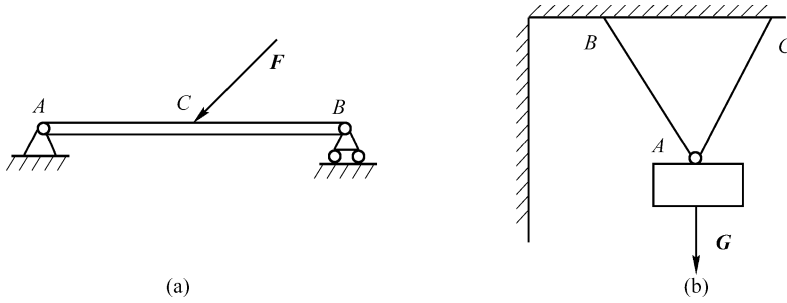
图题 1-1

2. 画出如图题 1-2 所示各物体的受力图(不计摩擦)。



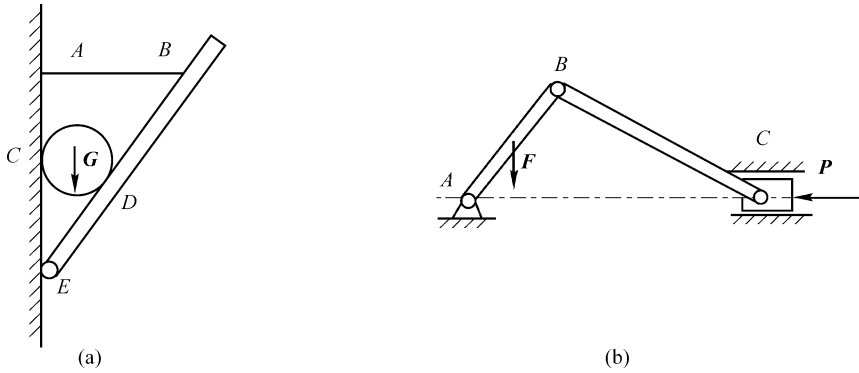
图题 1-2

3. 画出如图题 1-3(a)所示的杆件以及如图题 1-3(b)所示物块的受力图, 不计摩擦。



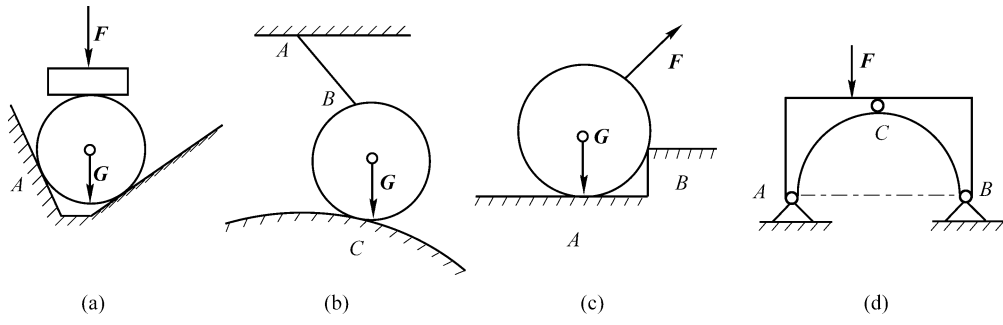
图题 1-3

4. 画出如图题 1-4 所示机构的整体受力图和机构中每个构件的受力图(不考虑摩擦)。



图题 1-4

5. 画出如图题 1-5 所示球体(自重  $G$ )以及三角拱的受力图。



图题 1-5

## 单元二

# 平面力系和平面力偶系



### 单元导读

平面力系是指作用在物体上各力的作用线位于同一平面内,它是力系中最基本的一种情况,也是我们研究一般力系合成与平衡的基础。平面力系分为平面汇交力系、平面力偶系和平面任意力系,本单元主要研究平面汇交力系和平面力偶系理论。



### 相关知识

## 第一节 力在坐标轴上的投影

研究平面汇交力系的前提是将力投影到坐标轴上,如图 2-1 所示,将力  $F$  投影到  $x$  轴和  $y$  轴,令力  $F$  与坐标轴  $x$  的夹角为  $\alpha$ ,与坐标轴  $y$  的夹角为  $\beta$ ,力  $F$  在  $x$  轴和  $y$  轴上的投影分别为

$$\left. \begin{aligned} X &= F \cos \alpha \\ Y &= F \sin \alpha = F \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

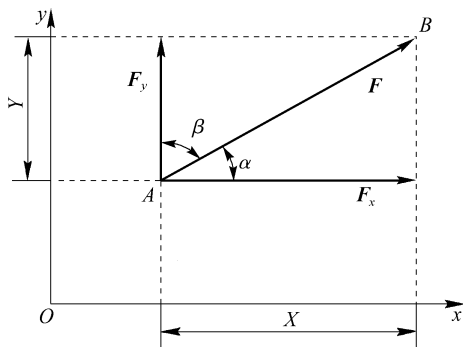


图 2-1 力在直角坐标轴上的投影

由图 2-1 中的几何关系可知

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \cos \alpha &= \frac{F_x}{F} \\ \cos \beta &= \frac{F_y}{F} \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

若令力  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$ 、 $F_4$  构成的多边形合力为  $F_R$ ，如图 2-2 所示，各分力在  $x$  轴和  $y$  轴投影的和分别为

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= X_1 + X_2 - X_4 = \sum X \\ F_{Ry} &= -Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = \sum Y \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

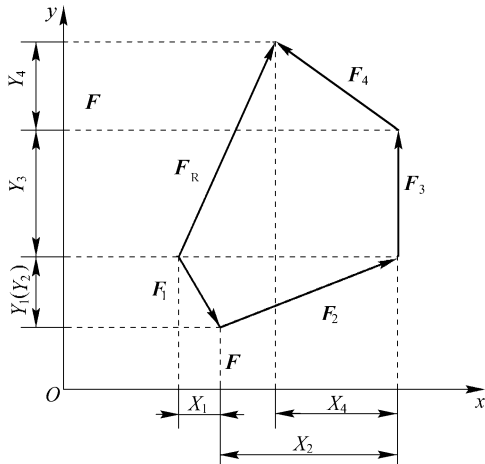


图 2-2 各分力在直角坐标轴上的投影

简化为

$$F_{Rx} = \sum X, \quad F_{Ry} = \sum Y \quad (2-4)$$

合力投影定理是指合力在任一轴上的投影，等于各分力在同一轴上投影的代数和。

合力的大小为

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} \quad (2-5)$$

方向为

$$\tan \theta = \left| \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right| = \frac{\sum Y}{\sum X} \quad (2-6)$$

式中， $\theta$  为合力  $F_R$  与  $x$  轴所夹的角。

作用点为该力系的汇交点。

## 第二节 平面汇交力系的合成与平衡

### 一、平面汇交力系的合成

各力的作用线都在同一平面内且汇交于一点的力系称为平面汇交力系。平面汇交力系的合成研究方法主要有几何法、解析法等。

#### 1. 几何法

##### 1) 两个共点力的合成

如图 2-3 所示，力  $F_1$  与力  $F_2$  汇交于点 A，由力的平行四边形法则或者力的三角形法则

可以求出合力  $F_R$ 。

合力大小由余弦定理可得

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \varphi - \alpha)} \quad (2-7)$$

合力方向由正弦定理可得

$$\frac{F_1}{\sin \varphi} = \frac{F_R}{\sin(180^\circ - \alpha - \varphi)} \quad (2-8)$$

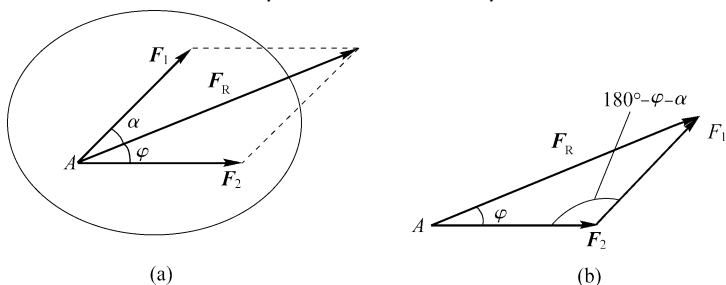


图 2-3 两个共点力的合成

### 2) 任意一个共点力的合成

如图 2-4(a)所示,力  $F_1, F_2, F_3, F_4$  汇交于点  $A$ , 求合力  $F_R$ 。按力的三角形法则, 先从点  $A$  按一定的比例尺, 作矢量  $F'_1$  平行且等于  $F_1$ , 从  $B$  点作矢量  $F'_2$  平行且等于  $F_2$ , 从  $C$  点作矢量  $F'_3$  平行且等于  $F_3$ , 从  $D$  点作矢量  $F'_4$  平行且等于  $F_4$ , 则合力  $F_R$  的大小和方向如图 2-4(b)所示, 作用点仍为  $A$ , 我们称  $ABCDE$  为力多边形。以力的多边形求合力的规则称为力的多边形法则。

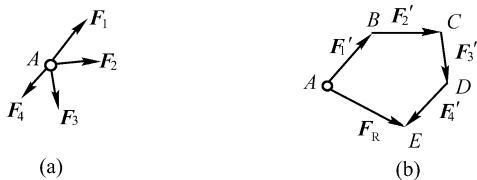


图 2-4 任意一个共点力的合成

平面汇交力系的合力等于各分力的矢量和, 合力的作用线通过各力的汇交点, 即

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \dots + F_n = \sum F \quad (2-9)$$

### 2. 解析法

利用合力投影定理, 由式(2-5)和式(2-6)求出合力的大小, 确定合力的方向。

## 二、平面汇交力系平衡的几何条件

平面汇交力系平衡的充要条件是

$$F_R = \sum F = 0 \quad (2-10)$$

在上面几何法求力系的合力中, 合力为零意味着力多边形自行封闭。所以平面汇交力系平衡的必要与充分的几何条件是: 力多边形自行封闭或力系中各力的矢量和等于零。如图 2-5 所示的情况, 即力多边形自行封闭或者说合力为零。

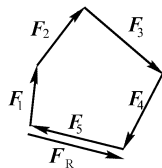


图 2-5 力多边形自行封闭

### 三、平面汇交力系的平衡方程

从前述可知,平面汇交力系平衡的必要与充分条件是该力系的合力为零。

$$\mathbf{F}_R = 0 \Rightarrow \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 0$$

即

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= \sum X = 0 \\ F_{Ry} &= \sum Y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

此方程为平衡的充要条件,也叫平衡方程。注意对力的方向判定不准的,一般用解析法。利用平衡方程通过解析法解题时,力的方向可以任意假设,如果求出负值,则说明力的方向与假设相反。对于二力构件,一般先设为拉力,如果求出负值,说明物体受压。

**例 2-1** 如图 2-6(a)所示机构,已知力  $P=15 \text{ kN}$ ,杆件  $BC=AC=1 \text{ m}$ ,  $AC$  与  $BC$  相互垂直且铰接于  $C$ 。求在力  $P$  的作用下杆件  $AC$  与  $BC$  所受力的大小。

**解法一 几何法**

(1)选铰  $C$  为研究对象,进行受力分析。

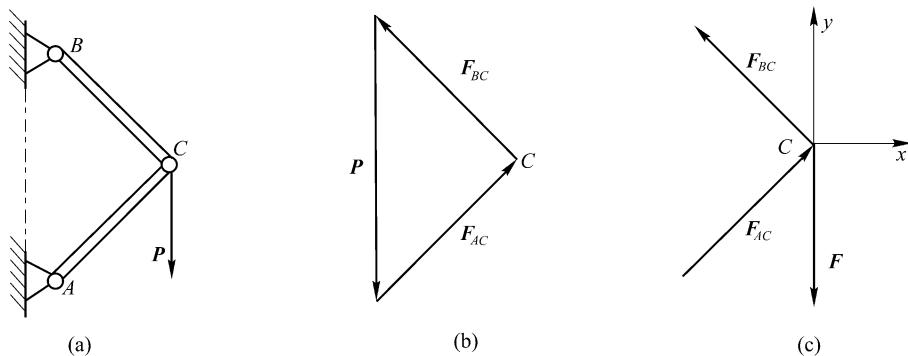


图 2-6 杆件的受力

(2)由平衡的几何件画出力多边形,如图 2-6(b)所示,令  $1 \text{ mm}$  长度代表  $0.1 \text{ kN}$ ,由几何关系得  $F_{AC} = F_{BC}$ ,通过比例尺丈量得

$$F_{AC} = F_{BC} = 10.61 \text{ kN}$$

**解法二 平衡方程法**

(1)选铰  $C$  为研究对象,进行受力分析。

(2)取分离体画受力图,如图 2-6(c)所示。

(3)列平衡方程为

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 & F_{AC} \cos 45^\circ - F_{BC} \cos 45^\circ &= 0 \\ \sum Y &= 0 & -P + F_{AC} \sin 45^\circ + F_{BC} \sin 45^\circ &= 0 \end{aligned}$$

(4)解平衡方程,得

$$F_{AC} = F_{BC} = \frac{P}{2 \sin 45^\circ} = \frac{15\sqrt{2}}{2} \text{ kN}$$

综上所述,可以总结出两种解题方法的步骤。



(1)几何法解题步骤如下:

- ①选研究对象;
- ②作力多边形;
- ③选择适当的比例尺,按比例尺画出各力的大小和方向;
- ④量出未知力的大小。

但几何法解题存在作图精度不够、误差大、不能表达各量之间的函数关系等不足。

(2)平衡方程法解题步骤如下:

- ①选研究对象;
- ②取分离体,画出受力图;
- ③列出平衡方程;
- ④解平衡方程,求出未知力。

### 第三节 力矩、平面力偶系的合成与平衡

力对物体可以产生移动效应和转动效应。移动效应取决于力的大小和方向,转动效应取决于力矩的大小和方向。这一节我们主要研究转动效应,即力矩和力偶。

#### 一、力对点的矩

##### 1. 力矩的概念和性质

如图 2-7 所示,我们将力  $F$  对点  $O$  的矩定义为力  $F$  的大小与从  $O$  点到力  $F$  的作用线的垂直距离  $h$  的乘积,即

$$M_O(\mathbf{F}) = \pm Fh \quad (2-12)$$

力矩的表示方法如图 2-7 所示,方向用右手法则确定:以使物体作逆时针转动为正(图示为正),作顺时针转动为负,将  $O$  点到力  $F$  的作用线的垂直距离  $h$  称为力臂。

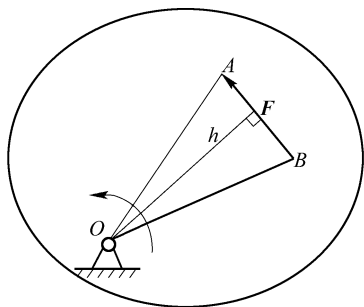


图 2-7 力矩的表示方法

需要说明的是以下几个方面:

- (1) $M_O(\mathbf{F})$ 是代数量。
- (2)随着力  $F$  和垂直距离  $h$  的增大,物体转动效应明显。
- (3) $M_O(\mathbf{F})$ 是影响转动的独立因素,当  $F=0$  或  $h=0$  时, $M_O(\mathbf{F})=0$ 。
- (4) $M_O(\mathbf{F})$ 的国际单位为  $\text{N} \cdot \text{m}$  或  $\text{kN} \cdot \text{m}$ 。

(5)  $M_O(\mathbf{F}) = \pm 2S_{\triangle AOB} = \pm Fh$ ,  $S_{\triangle AOB}$  为三角形  $AOB$  的面积。

由上述可知,力矩具有以下几个性质:

- (1) 力沿力的作用线移动,不改变它对某点的矩。
- (2) 互成平衡的二力对同一点之矩的代数和为零。
- (3) 当力的作用线通过矩心,则力矩为零。

### 2. 合力矩定理

平面汇交力系的合力对平面内任意一点之矩等于力系中所有各分力对同一点之矩的代数和,即

$$M_O(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^n M_O(\mathbf{F}_i) \quad (2-13)$$

### 3. 力矩与合力矩的解析表达式

如图 2-8 所示,已知力  $\mathbf{F}$ ,作用点  $A(x, y)$  及其夹角。求力  $\mathbf{F}$  对坐标原点  $O$  之矩,可按合力矩定理,通过其分力  $\mathbf{F}_x$  与  $\mathbf{F}_y$  对点  $O$  之矩而得到,即

$$M_O(\mathbf{F}) = M_O(\mathbf{F}_y) + M_O(\mathbf{F}_x) = xF \sin \alpha - yF \cos \alpha = xF_y - yF_x \quad (2-14)$$

上式为平面内力矩的解析表达式。

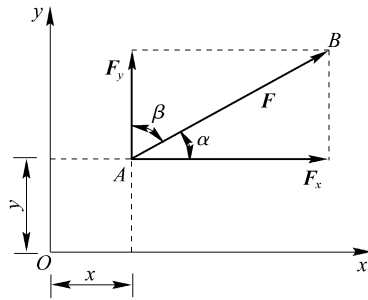


图 2-8 力对坐标原点之矩

**例 2-2** 已知某物体铰接于点  $O$ ,物体上  $A$  点作用有力  $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{Q}$ ,力  $\mathbf{F}$  的作用线垂直于  $AO$ ,  $AO$  与力  $\mathbf{Q}$  的作用线夹角为  $\alpha$ ,  $O$  点到力  $\mathbf{Q}$  作用线的垂直距离为  $h$ ,如图 2-9 所示。求  $M_O(\mathbf{F})$  和  $M_O(\mathbf{Q})$ 。

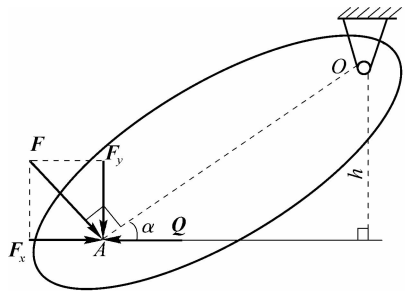


图 2-9 求平面物体的力偶矩

**解** (1) 由力对点之矩定义,得

$$M_O(\mathbf{F}) = F \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$M_O(\mathbf{Q}) = -Qh$$

(2)应用合力矩定理,得

$$\begin{aligned} M_O(\mathbf{F}) &= F_x h + F_y h \cot \alpha \\ &= Fh \sin \alpha + Fh \cos \alpha \cot \alpha \\ &= F \frac{h}{\sin \alpha} \\ M_O(\mathbf{Q}) &= -Qh \end{aligned}$$

## 二、力偶

### 1. 力偶及其性质

两个大小相等、不共线的反向平行力叫力偶。如图 2-10 所示,若力  $F = F'$  且相互平行,则  $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{F}'$  构成力偶。由  $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{F}'$  构成的平面称为力偶作用面,  $d$  称为力偶臂。



视频  
力偶

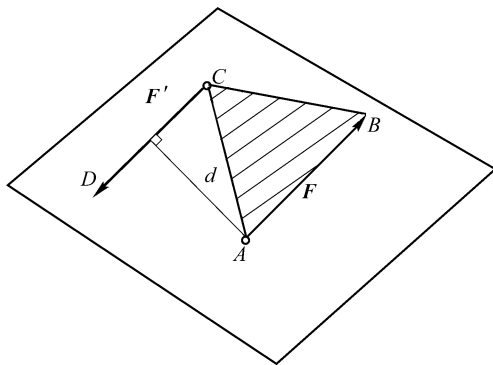


图 2-10 力偶的图示

力偶使物体产生的转动效应一般通过力偶矩来衡量,力偶矩的大小为  $Fd$ ,方向由右手法则确定,平面力偶矩也为代数量,用  $M(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$  来表示,即

$$M(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = \pm 2S_{\triangle ABC} \quad (2-15)$$

力偶具有以下几个性质:

- (1)力偶在任何坐标轴上的投影的代数和等于零。
- (2)力偶不能合成为一个力,或者说力偶没有合力。
- (3)平面力偶等效定理。

作用在同一平面内的两个力偶,只要它的力偶矩的大小相等,转向相同,则此两个力偶彼此等效。这就是力偶等效的条件,从中可以推导出两个重要的推论:

- (1)力偶可以在其作用面内任意移动,而不影响它对刚体的作用效应。
- (2)只要保持力偶矩大小和转向不变,可以任意改变力偶中力的大小和相应力偶臂的长短,而不改变它对刚体的作用效应。

### 2. 平面力偶系的合成与平衡

作用在物体同一平面的多个力偶称为平面力偶系。

设有两个力偶,分别为  $M_1(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}'_1)$  和  $M_2(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}'_2)$ ,力偶臂分别为  $d_1$  和  $d_2$ ,如图 2-11(a)所示,求两个力偶的合成。

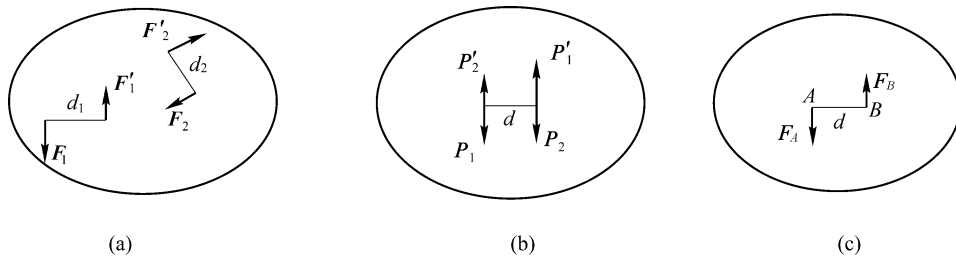


图 2-11 力偶的等效

首先将两力偶转化为如图 2-11(b)所示,力偶臂为  $d$ ,则原力偶等效为  $M_1(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}'_1)$  和  $M_2(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}'_2)$ ,由力偶定义得

$$M_1 = F_1 d_1, \quad M_2 = -F_2 d_2$$

又

$$M_1 = P_1 d, \quad M_2 = -P'_2 d$$

得合力矩为

$$M = F_A d = (P_1 - P'_2) d = P_1 d - P'_2 d = M_1 + M_2$$

其中

$$F_A = P_1 - P'_2, \quad F_B = P'_1 - P$$

由此可以推出

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{i=1}^n M_i \quad (2-16)$$

即平面力偶系合成结果还是一个力偶,其力偶矩为各力偶矩的代数和。

平面力偶系平衡的充要条件是:所有力偶矩的代数和等于零。

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0 \quad (2-17)$$

**例 2-3** 在一钻床上水平放置工件,在工件上同时钻四个等直径的孔,钻头的力偶矩为  $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 25 \text{ N} \cdot \text{m}$ ,如图 2-12 所示。求工件的总切削力偶矩和 A、B 端水平反力。

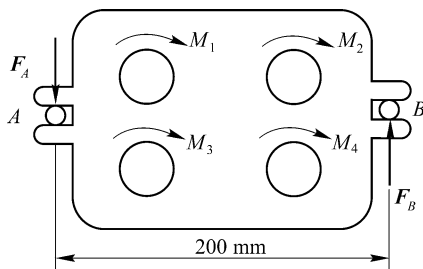


图 2-12 水平放置的工件

**解** 各力偶的合力偶矩为

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 4 \times (-25) \text{ N} \cdot \text{m} = -100 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由力偶只能与力偶平衡的性质,力  $F_A$  与力  $F_B$  组成一力偶。可得

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0$$

即  
得

$$F_B \times 0.2 - M_1 - M_2 - M_3 - M_4 = 0$$

$$F_B = \frac{100}{0.2} = 500 \text{ N}, \quad F_A = F_B = 500 \text{ N}$$

## 第四节 力线的平移定理

如果作用在物体上各力的作用线在同一平面内,但既不汇交为一点又不相互平行,这种力系称为平面任意力系。而研究平面任意力系向任意一点简化时,就涉及力线的平移定理。

### 一、力线平移定理

作用在刚体上的力  $F$  可以平行移动到刚体内任意一点,但必须同时附加一个力偶,其力偶矩等于原力  $F$  对平移点之矩,该定理称为力线平移定理。

如图 2-13(a)所示,力  $F$  作用于  $A$  点,在刚体上任意一点  $B$  加上力  $F'$  和  $F''$ ,  $F' = F'' = F$ ,如图 2-13(b)所示,则该体系与原体系等效,由此可以将这个新体系看成是在点  $B$  作用有力  $F'$  和力偶  $M(F, F'')$ ,如图 2-13(c)所示,此力偶矩为

$$M = M(F, F'') = Fd$$

式中,  $Fd$  是原力  $F$  对点  $B$  之矩。

因此

$$M_B(F) = Fd$$

得

$$M = M_B(F) = Fd$$

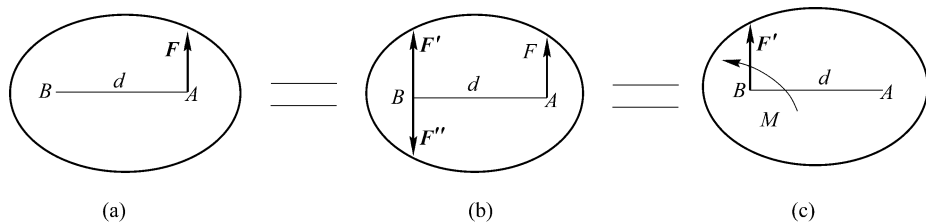


图 2-13 力线平移

通过证明过程,可以归纳出以下内容:

- (1) 力线平移定理揭示了力与力偶的关系,即力等效于力和力偶的共同作用。
- (2) 力平移的条件是附加一个力偶  $M$ ,且  $M$  与  $d$  有关,  $M = Fd$ 。
- (3) 力线平移定理是力系简化的理论基础。

### 二、固定端约束

在工程实际中,有很多构件的一部分嵌固于另一物体上而受到约束作用,这样的约束称为固定端约束。如刚接的框架梁柱、固定在车床的车刀、焊接在立柱上的托架等所受的约束

都是固定端约束。计算简化示意图如图 2-14 所示, AB 杆件的 A 端为固定端约束。这种约束不但限制物体在约束处沿任意方向的线位移, 也限制物体在约束处的角位移, 即物体在 A 端没有移动和转动。

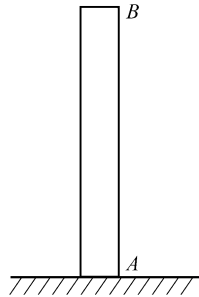


图 2-14 固定端约束

## 第五节 平面任意力系的简化

### 一、力系向平面内任意一点简化

平面任意力系的简化主要依据是力线平移定理, 简化的实质是将一个平面任意力系分解为一个平面汇交力系和一个平面力偶系, 然后将这两个力系进行合成。如图 2-15(a) 所示, 将力  $F_1$ 、 $F_2$  和  $F_3$  向平面内任意一点  $O$  进行简化, 首先由力线平移定理将力  $F_1$  平移到点  $O$  用  $F'_1$  表示, 同时附加力偶  $M_1$ , 将力  $F_2$  平移到点  $O$  用  $F'_2$  表示, 附加力偶  $M_2$ , 将力  $F_3$  平移到点  $O$  用  $F'_3$  表示, 附加力偶  $M_3$ , 如图 2-15(b) 所示, 力  $F'_R$  (主矢) 作用在简化中心, 力偶  $L_0$  (主矩) 作用在该平面上, 如图 2-15(c) 所示。

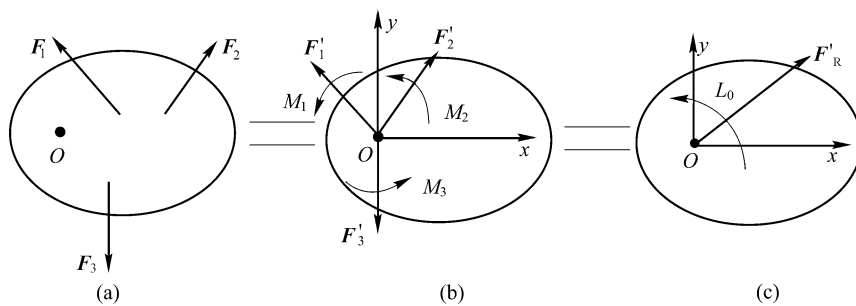


图 2-15 平面力系的简化

其中 
$$\mathbf{F}'_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \sum \mathbf{F} \quad (2-18)$$

$$L_0 = M_1 + M_2 + M_3 = M_0(\mathbf{F}_1) + M_0(\mathbf{F}_2) + M_0(\mathbf{F}_3) = \sum M_0(\mathbf{F}) \quad (2-19)$$

由合力投影定理, 将上式写成解析形式, 得

$$F'_R = \sqrt{F'^2_{Rx} + F'^2_{Ry}} = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} \quad (2-20)$$



$$\alpha = \tan^{-1} \left| \frac{F'_{Ry}}{F'_{Rx}} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{\sum Y}{\sum X} \right| \quad (2-21)$$

## 二、简化结果分析与合力矩定理

力系向平面内任意一点简化的结果可得主矢  $F'_R$  和主矩  $L_0$ ，下面分别讨论：

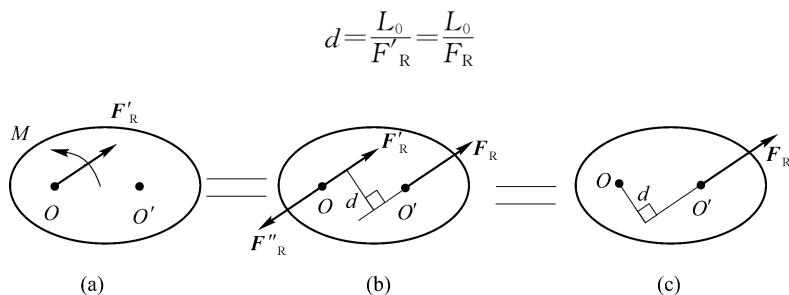
(1)  $F'_R=0, L_0=0$ ，则力系平衡。

(2)  $F'_R=0, L_0 \neq 0$ ，即简化结果为一合力偶比，此时刚体等效于只有一个力偶的作用，因为力偶可以在刚体平面内任意移动，故此时主矩与简化中心  $O$  无关。

(3)  $F'_R \neq 0, L_0=0$ ，即简化为一个作用于简化中心的合力。

(4)  $F'_R \neq 0, L_0 \neq 0$ ，为最一般的情况。此种情况还可以继续简化为一个合力  $F_R$ 。

如图 2-16 所示，合力  $F_R$  的大小等于原力系的主矢  $F'_R$ ，合力  $F_R$  的作用线离点  $O$  的距离为  $d$ 。



$$d = \frac{L_0}{F'_R} = \frac{L_0}{F_R}$$

图 2-16 合力矩定理

平面任意力系的合力对作用面内任一点之矩等于力系中各力对于同一点之矩的代数和，该定理称为合力矩定理。即

$$M_0(F_R) = \sum M_0(F) \quad (2-22)$$

## 第六节 平面任意力系的平衡方程及应用

物体在力系作用下，保持平衡的充分必要条件是：力系的主矢与对任一点的主矩均为零，即

$$F'_R=0, \quad L_0=0$$

转换成解析式为

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum M_0(F) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-23)$$

式(2-23)也称为一矩式。

当平面内任意两点  $AB$  的连线不垂直于  $x$  轴时，可用二矩式表示为

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0 \\ \sum M_A(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-24)$$

当平面内任意 A、B、C 三点不共线时,可用三矩式表示为

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) &= 0 \\ \sum M_C(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-25)$$

**例 2-4** 如图 2-17(a)所示的体系,已知力  $P=150 \text{ kN}$ ,  $AC=1.6 \text{ m}$ ,  $BC=0.9 \text{ m}$ ,  $CD=CE=1.2 \text{ m}$ ,  $AD=2 \text{ m}$ ,且  $AB$  水平,  $ED$  铅垂,  $BD$  垂直于斜面,求  $F_B$  和 A 支座反力。

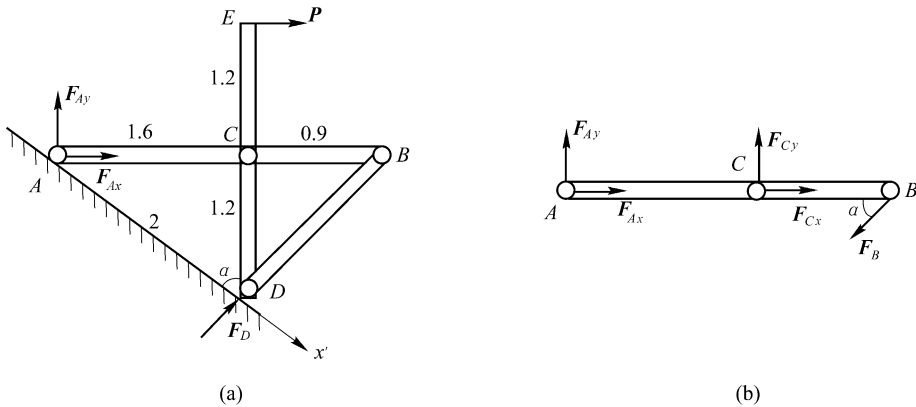


图 2-17 平面铰接体系

- 解 (1)以体系整体为研究对象。  
 (2)画出受力图,如图 2-17(a)所示。  
 (3)选坐标列方程。

$$\begin{aligned} \sum X' &= 0 & F_{Ax} \cdot \sin \alpha - F_{Ay} \cdot \cos \alpha + P \cdot \sin \alpha &= 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}) &= 0 & F_{Ay} \times 2.5 - P \times 1.2 &= 0 \end{aligned}$$

而  $\sin \alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{1.6}{2} = \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{1.2}{2} = \frac{3}{5}$

解得

$$F_{Ax} = -96 \text{ kN}, \quad F_{Ay} = 72 \text{ kN}$$

(4)再研究 AB 杆,受力如图 2-17(b)所示。

$$\sum M_C = 0 \quad -F_B \sin \alpha \cdot CB - F_{Ay} \cdot AC = 0$$

得

$$F_B = \frac{-F_{Ay} \cdot AC}{BC \cdot \sin \alpha} = \frac{(-72) \times 1.6}{0.9 \times \frac{4}{5}} \text{ kN} = -160 \text{ kN}$$

**例 2-5** 简支梁受力如图 2-18 所示,已知均布载荷  $q=1 \text{ kN/m}$ ,集中力  $F=5 \text{ kN}$ ,力偶  $M=4 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,求支座反力。



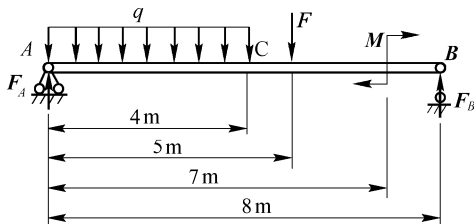


图 2-18 简支梁

解 (1)选 AB 梁为研究对象。

(2)画受力图,如图 2-18 所示。

(3)列方程求解。

$$\text{由 } \sum M_A(F)=0 \quad F_B \times 8 - M - F \times 5 - q \times 4 \times 2 = 0$$

得

$$F_B = 4.63 \text{ kN}$$

结果为正值,说明与假设方向一致。

$$\text{由 } \sum Y=0 \quad F_A + F_B - F - q \times 4 = 0$$

得

$$F_A = 4.37 \text{ kN}$$

结果为正值,说明与假设方向一致。

## 第七节 静定与静不定问题及物系的平衡

### 一、静定与静不定问题

在前面的单元里,问题中涉及的未知力数目等于对应的独立平衡方程的数目,因此可以由平衡方程求得所有的未知量,这一类问题我们称之为静定问题。如图 2-19 所示的简支梁,但在实际的工程当中,遇到的问题中可能涉及未知力的数目多于平衡方程的数目,这类问题称之为静不定问题,如图 2-20 所示的梁,这时我们还用平衡方程求解的话,不可能求出所有的未知力。

静不定问题的求解必须借助变形协调方程,这是材料力学的知识,在刚体静力学中不做研究。

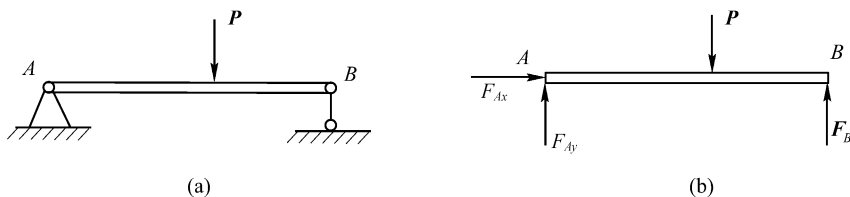


图 2-19 静定问题

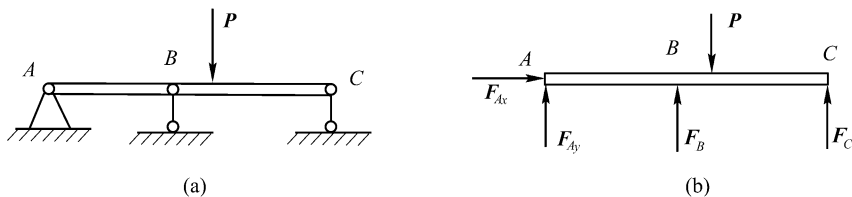


图 2-20 静不定问题

## 二、物系的平衡

两个或两个以上的物体通过一定的连接(约束)方式组合在一起的系统称为物系或物体系。物系内部物体之间作用的力称为内力;物体外部作用于整个物系的力称为外力。一般情况下,研究物系的受力时不考虑内力,但当研究物系中个别物体时必须考虑内力。

显然,当物系处于平衡状态时,物系内的每个物体也处于平衡状态,因此在研究物系平衡时,选取研究对象,既可以选个别物体,也可以选几个物体的组合甚至整个物系。

**例 2-6** 多跨静定梁受力如图 2-21 所示,求支座 A、B、C 处的反力。

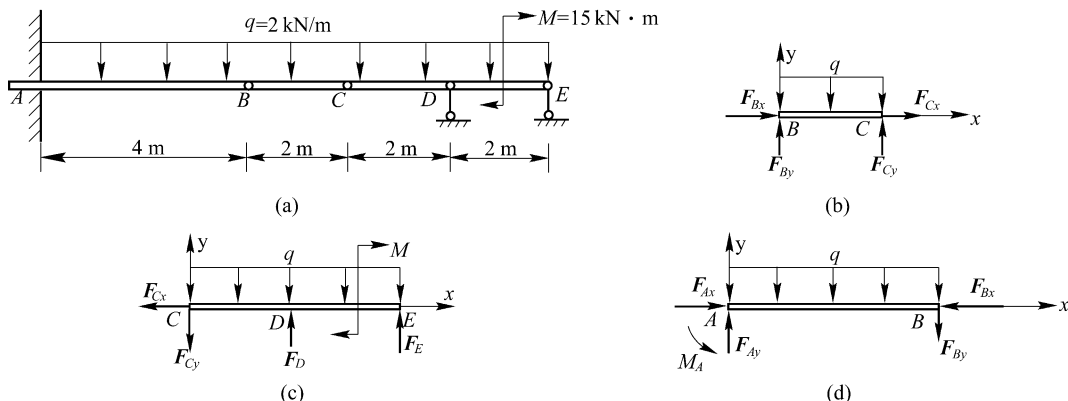


图 2-21 多跨静定梁

**解** (1)首先取 BC 段为研究对象,其受力和投影轴如图 2-21(b)所示,列平衡方程。

$$\text{由 } \sum M_B(\mathbf{F}) = 0 \quad F_{Cy} \times 2 - \frac{1}{2} \times q \times 2^2 = 0$$

得  $F_{Cy} = 2 \text{ kN}$

$$\text{由 } \sum Y = 0 \quad F_{By} + F_{Cy} - q \times 2 = 0$$

得  $F_{By} = 2 \text{ kN}$

$$\text{再由 } \sum X = 0 \quad F_{Bx} + F_{Cx} = 0$$

(2)取 CDE 段为研究对象,受力和投影轴如图 2-21(c)所示,列平衡方程。

$$\text{由 } \sum X = 0 \quad F_{Cx} = 0$$

得  $F_{Bx} = 0$

$$\text{由 } \sum M_D(\mathbf{F}) = 0 \quad F_{Cy} \times 2 + F_E \times 2 - M = 0$$

得  $F_E = 5.5 \text{ kN}$

$$\text{再由 } \sum Y = 0 \quad -F_{Cy} + F_D + F_E - q \times 4 = 0$$

得

$$F_D = 4.5 \text{ kN}$$

(3) 取 AB 段为研究对象, 受力图如图 2-21(d) 所示, 列平衡方程

$$\text{由 } \sum X = 0 \quad F_{Ax} - F_{Bx} = 0$$

得

$$F_{Ax} = F_{Bx} = 0$$

$$\text{由 } \sum Y = 0 \quad F_{Ay} - F_{By} - q \times 4 = 0$$

得

$$F_{Ay} = 10 \text{ kN}$$

$$\text{再由 } \sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \quad -F_{By} \times 4 - q \times 4 \times 2 + M_A = 0$$

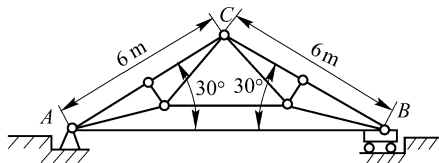
得

$$M_A = 24 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



### 单元练习

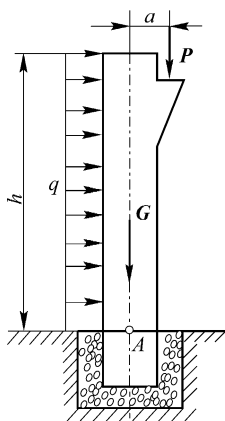
1. 一简易屋架 ABC 受力如图题 2-1 所示。屋架重为 200 kN, AC 边受的风压可看成均布载荷, 垂直于 AC, 其合力为 80 kN, 作用于 AC 边中点, 试求 A、B 支座处的约束反力。



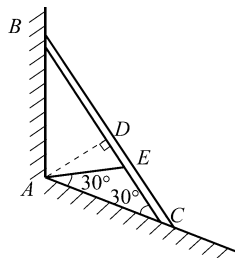
图题 2-1

2. 某工业厂房立柱的底部是杯形基础。立柱底部用混凝土与杯形基础固连在一起, 如图题 2-2 所示。已知吊车梁传来的铅垂载荷为  $P=100 \text{ kN}$ , 风压集度  $q=5 \text{ kN/m}$ , 柱自重  $G=500 \text{ kN}$ , 长度  $a=0.5 \text{ m}$ ,  $h=10 \text{ m}$ , 试求立柱底部的约束反力。

3. 均质杆 BC 重  $G$ , 长度为  $2b$ , 两端分别搁在光滑的斜面和铅垂面上, 用一根水平细绳 AE 拉住, 在如图题 2-3 所示的位置上保持平衡。求细绳拉力  $T$  和 B、C 两处的约束反力。

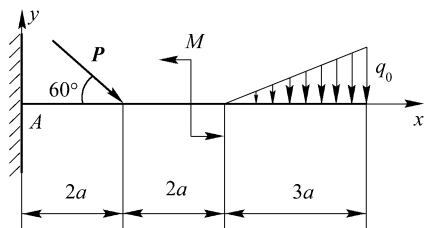


图题 2-2



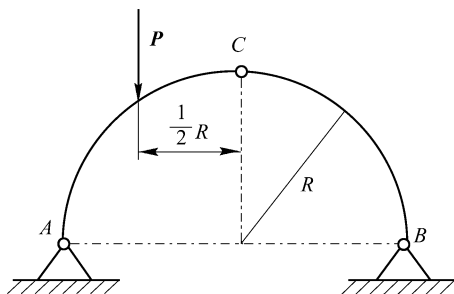
图题 2-3

4. 简支梁受力如图题 2-4 所示。其中  $a=1\text{ m}$ ,  $P=8\text{ kN}$ , 弯矩  $M=16\text{ kN}\cdot\text{m}$ ,  $q_0=2\text{ kN/m}$ , 求 A 支座的约束反力。



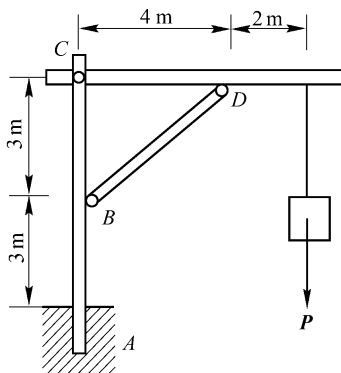
图题 2-4

5. 对称三角拱上作用有铅垂力  $P$ , 尺寸如图题 2-5 所示。求支座 A, B 处的约束反力。



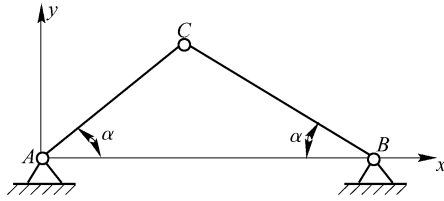
图题 2-5

6. 已知力  $P=2\ 000\text{ N}$ , 各杆件的单位长度重量为  $50\text{ N/m}$ , 尺寸如图题 2-6 所示。求 A、B、C 处的约束反力。



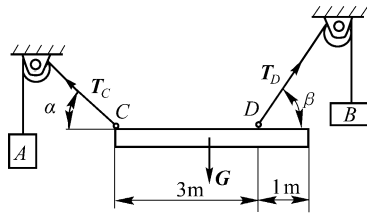
图题 2-6

7. 杆件 AC 与杆件 BC 铰接于点 C, 如图题 2-7 所示。在两杆重量 ( $W$ ) 与长度相同的条件下, 试求: (1) 支点的反作用力; (2) 判断当  $\alpha=0$  时, 该杆系是不是静定。



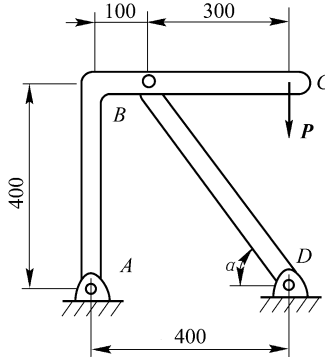
图题 2-7

8. 匀质钢梁, 尺寸及受力如图题 2-8 所示, 已知  $\alpha=30^\circ$ , 不计摩擦, 求角  $\beta$  的大小及重物 A、B 的重量。



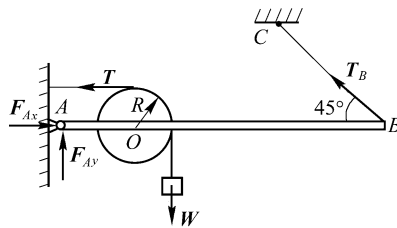
图题 2-8

9. 在如图题 2-9 所示的结构体系中, 杆件在 A、B、D 处铰接, 体系上作用的力  $P$  为 150 kN, 求支座 A、D 的约束反力。长度单位为 cm。



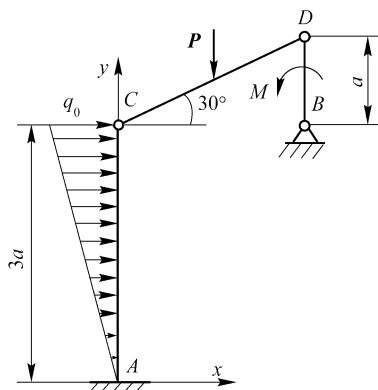
图题 2-9

10. 在如图题 2-10 所示的平衡机构中,  $AB=50\text{ cm}$ ,  $R=10\text{ cm}$ ,  $OA=20\text{ cm}$ , 重物  $W$  重 1500 N, 各连接点均为光滑铰链, 绳子、杆件及滑轮重量均略去不计, 求铰链 A、C 的反力与 O 轴反力。



图题 2-10

11. 系统由三根杆组成,分别为  $AC$ 、 $CD$ 、 $DB$ ,其中  $A$  端固定,另外两根之间用铰链连接,杆  $AC$  受一最大集度  $q_0$  的线性分布的力作用,杆  $CD$  的中点受一平行于  $y$  轴的力  $P$  作用,杆  $DB$  上作用一力矩为  $M$  的力偶,如图题 2-11 所示。如果  $q_0=50\text{ N/m}$ , $P=200\text{ N}$ , $M=400\text{ N}\cdot\text{m}$ , $a=1\text{ m}$ ,求铰链  $D$  的反作用力和点  $A$  的约束力偶矩。



图题 2-11

## 单元三

# 摩擦问题简介



### 单元导读

在前面的研究中,假定物体的接触表面是光滑的,不考虑摩擦的作用。但是,完全光滑的表面是不存在的,也就是说,摩擦在机械运动中是一种普遍存在的现象。在机械运动中摩擦表现为有害和有利的两个方面,有害的一面主要表现为由于摩擦给各种机械带来多余的阻力,使机械发热,零件磨损,从而消耗能量、降低效率和使用寿命,在自动调节、精密测量等问题中,即使摩擦很小,也会影响机构的灵敏度和准确性。有利的一面主要表现在车辆用摩擦来加速与制动、螺旋连接和尖劈顶重装置等。对摩擦问题进行研究是为了更好地发挥它对生产的积极作用,尽可能地减少它的消极作用。

按照接触物体之间的相对运动情况,摩擦可以分为滑动摩擦和滚动摩擦。当两个相互接触的物体有相对滑动或相对滑动趋势时,在接触处的公切面内将受到一定的阻力阻碍其滑动,这种现象的摩擦称为滑动摩擦。如活塞在汽缸中的滑动就是滑动摩擦。根据滑动摩擦的定义,滑动摩擦有动滑动摩擦与静滑动摩擦之分。当两物体有相对滚动或相对滚动趋势时,物体间产生相对波动的阻碍称为滚动摩擦。如车轮在地面上的滚动,就是滚动摩擦。

本单元主要考虑滑动摩擦的平衡问题,并简单介绍了滚动摩擦的基本概念。



### 相关知识

## 第一节 滑动摩擦

### 一、静滑动摩擦

相互接触的两物体之间有相对滑动的趋势,但仍保持相对静止时,彼此作用着阻碍相对滑动的阻力,这种摩擦称为静滑动摩擦,相应的阻力称为静滑动摩擦力,简称静摩擦力。

静滑动摩擦力的特性可通过下述实验说明。在非光滑水平面上放一重量为  $W$  的物块,则物体在重力  $W$  和支承面约束反力  $F_N$  的作用下处于静止状态,如图 3-1(a)所示。今在该物体上作用一大小可以改变的力  $Q$ ,当  $Q$  由零逐渐增大但不超过一定范围时,物体仍能保持静止。可见支承面对于物体除有法向约束反力  $F_N$  外,还有一阻止物体沿支承面滑动的约束反力  $F$ ,此即为静滑动摩擦力,如图 3-1(b)所示。静滑动摩擦力  $F$  的方向与物体滑动趋势相反,其大小根据物体的平衡条件确定,即

$$\sum X = 0$$

$$F=Q$$

根据上式可知,静滑动摩擦力  $F$  的大小随水平力  $Q$  的增大而增大,当  $Q=0$  时有  $F=0$ ,即物体没有滑动趋势时也就没有摩擦力。这是静滑动摩擦力与一般约束反力相同的性质。

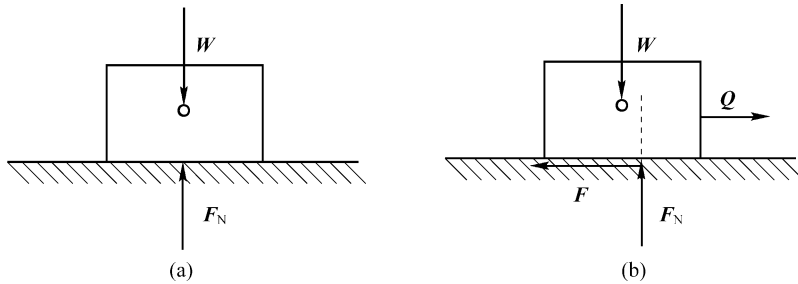


图 3-1 静滑动摩擦

但静滑动摩擦力  $F$  又与一般约束反力不同,它不能随水平力  $Q$  的增大而无限度地增大,即静滑动摩擦力有一极限值  $F_{\max}$ ,当水平力  $Q$  的大小达到这一极限值时,物体处于将要滑动但尚未开始滑动的临界状态,只要力量再稍微增大一点,物体即开始滑动。这一现象表明,当物体处于静平衡的临界状态时,静摩擦力达到最大值  $F_{\max}$ ,称为最大静滑动摩擦力,简称最大静摩擦力。

最大静摩擦力的大小与法向约束反力成正比,该定律称为静滑动摩擦定律。即

$$F_{\max} = f_s F_N \quad (3-1)$$

式中,比例常数  $f_s$  称为静滑动摩擦系数(简称静摩擦系数)。

$f_s$  的大小与接触物体的材料以及接触面的粗糙程度、温度、湿度等情况有关,而与接触面积的大小无关。一般材料的  $f_s$  值可在机械工程手册中查到。常用的材料  $f_s$  值如表 3-1 所示。

表 3-1 常用材料的摩擦系数

材料名称	摩擦系数			
	静摩擦系数 $f_s$		动摩擦系数 $f$	
	无润滑剂	有润滑剂	无润滑剂	有润滑剂
钢—钢	0.15	0.10~0.12	0.15	0.05~0.10
钢—铸铁	0.30		0.18	0.05~0.15
钢—青铜	0.15	0.10~0.15	0.15	0.10~0.15
铸铁—铸铁		0.18	0.15	0.07~0.12
铸铁—青铜			0.15~0.20	0.07~0.15
青铜—青铜		0.10	0.20	0.07~0.10
皮革—铸铁	0.30~0.50	0.15	0.60	0.15
橡皮—铸铁			0.80	0.50
木—木	0.40~0.60	0.10	0.20~0.50	0.07~0.15

此表摘自《机械设计手册》(燃料化学工业出版社)

由以上试验证明,静摩擦力随外力的改变而变化,但必有最大值。即

$$0 \leq F \leq F_{\max}$$

此处应注意,当物体未达到临界平衡状态时,上述关系并不成立。摩擦定律指出了利用或减小摩擦力的途径。要增大摩擦力,可增大正压力或增大摩擦系数,如火车在冰雪天行驶或上坡时,在铁轨上撒沙子可增大车轮与铁轨间的摩擦力,防止车轮打滑;要减小摩擦力,可



视频  
斜面上物体的  
滑动摩擦与静  
摩擦场景比较





减小摩擦系数,如采取降低接触面的粗糙度、加入润滑剂等措施。

## 二、摩擦角与自锁现象

法向约束反力和切向静摩擦力的合力  $F_R$  称为支承面的全反力,它与支承面法线间的夹角  $\varphi = \arctan (F/F_N)$  将随静摩擦力的变化而变化,如图 3-2(a)所示。当物块达到平衡的临界状态时,静摩擦力达到它的最大值,则临界平衡时的夹角  $\varphi_m$  称为静摩擦角,所以夹角的变化范围为

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_m$$

如图 3-2(b)所示,静摩擦角  $\varphi_m$  与静摩擦系数  $f_s$  之间的关系为

$$\tan \varphi_m = \frac{F_{\max}}{F_N} = \frac{f_s F_N}{F_N} = f_s \quad (3-2)$$

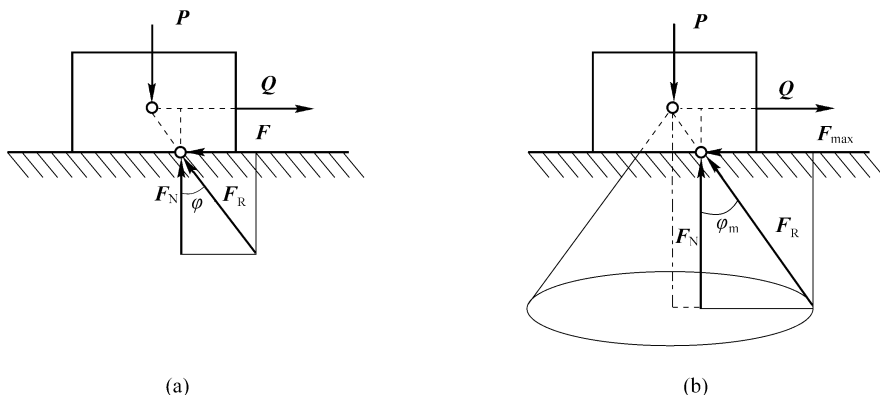


图 3-2 静摩擦角与静摩擦锥

因此,静摩擦角也是表示材料摩擦性质的物理量。全反力的作用线只能在静摩擦角域内产生与变化。

当水平力  $Q$  在水平面内的任意方向变化时,则相应的最大摩擦力方向或物块的滑动趋势方向亦随之改变,即全反力作用线的方位随之改变。这时,  $F_R$  的作用线将画出一个以力系汇交点为顶点的圆锥面,如图 3-2(b)所示。该锥面体称为静摩擦锥。如物体与接触面间的静摩擦系数与方向无关,为常数,则锥的顶角为  $2\varphi_m$ 。摩擦锥是全反力  $F_R$  在三维空间的作用范围。

物块在摩擦条件下平衡时,摩擦力  $F$  在零与最大静摩擦力  $F_{\max}$  之间变化,即  $0 \leq \varphi \leq \varphi_m$ 。因此,全反力  $F_R$  的作用线不能越出静摩擦锥的表面。由此可知:

(1) 如果作用于物体的全部主动力的合力  $F_{RW}$  的作用线在静摩擦角  $\varphi_m$  之内,则无论这个力有多大,物体都将保持静止,如图 3-3(a)所示,这种现象称为自锁现象。在这种情况下,主动力的合力  $F_{RW}$  与全反力  $F_R$  必能满足二力平衡条件。由此可得出斜面的自锁条件,当斜面的倾角  $\alpha$  满足  $\alpha \leq \varphi_m$  时,物块在自重作用下不沿斜面下滑。工程中的千斤顶、压榨机、圆锥销等就是利用此自锁条件设计的。

(2) 若全部主动力的合力  $F_{RW}$  的作用线在静摩擦角  $\varphi_m$  之外,则无论这个力有多小,物体都一定会发生滑动,如图 3-3(b)所示。因为此时的主动力合力  $F_{RW}$  与全反力  $F_R$  不能满足二力平衡条件。

综上所述,当主动力的作用线与接触面法线夹角  $\alpha < \varphi_m$  时,物块保持静止,见图 3-3(a);当主动力的作用线与接触面法线夹角  $\alpha > \varphi_m$  时,物块将发生运动,见图 3-3(b);当主动力的



视频  
摩擦角

作用线与接触面法线夹角  $\alpha = \varphi_m$  时,物块处于平衡和运动的临界状态。

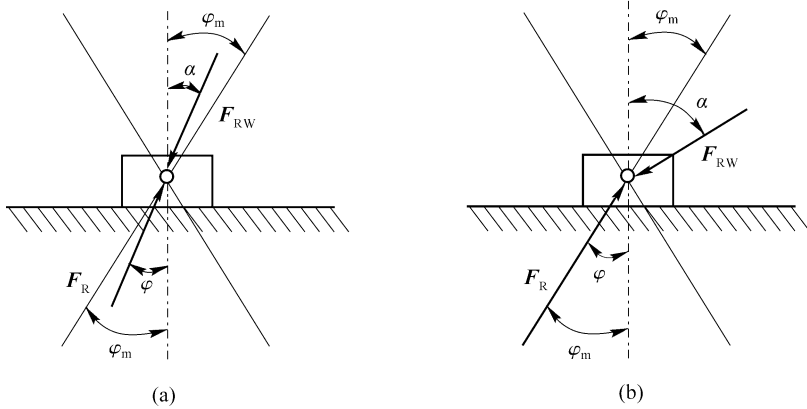


图 3-3 自锁现象

### 三、动滑动摩擦

两物体接触面间有相对滑动而表现出的摩擦称为动滑动摩擦(简称动摩擦),相应的摩擦力称为动滑动摩擦力(简称动摩擦力)。也可通过实验得到与静滑动摩擦相似的定律。动滑动摩擦力用  $F'$  表示,  $F'$  的方向与物体的运动方向相反,其大小与接触面间的法向反力的大小成正比,即

$$F' = fF_N \tag{3-3}$$

式中,  $f$  为动滑动摩擦系数。

$f$  的大小除与两物体接触面的材料及表面情况有关外,还与两物体间的相对运动速度有关。在一般的工程中,精度要求不高时可近似认为动摩擦系数与静摩擦系数相等,常用材料的  $f$  值见表 3-1。

## 第二节 有滑动摩擦时的平衡问题

考虑摩擦时的平衡问题,与不考虑摩擦时物体的平衡问题有着共同点,如果物体平衡时满足平衡条件,则解题方法步骤也基本相同,但摩擦问题也有以下特点:

- (1)问题中含有可能发生相对滑动的摩擦面。
- (2)受力图中应包括摩擦力,摩擦力沿滑动面切向,指向与物体运动趋势相反。
- (3)两物体接触面间的摩擦力,也是相互作用的作用力与反作用力。
- (4)考虑可能发生滑动的临界状态,并由此判断摩擦力指向。
- (5)列平衡方程求解时,有补充方程  $F_{\max} = f_s F_N$ ,  $F_N$  为滑动接触面上的法向约束力。因此,分析问题时一定要注意分析临界状态。

**例 3-1** 制动装置如图 3-4(a)所示。已知载荷  $Q=1\ 000\ \text{N}$ ,制动轮与制动块之间的摩擦系数  $f_s=0.4$ ,制动轮半径  $R=20\ \text{cm}$ ,鼓轮半径  $r=10\ \text{cm}$ ,其他尺寸为  $a=100\ \text{cm}$ ,  $b=20\ \text{cm}$ ,  $e=5\ \text{cm}$ 。试求制动力  $P$  至少需多大才能阻止重物下降。

**解** 当鼓轮刚停止转动时,制动力  $P$  以最小值使制动轮处于平衡状态,此时有最大静摩擦力  $F_{\max} = f_s F_N$ 。

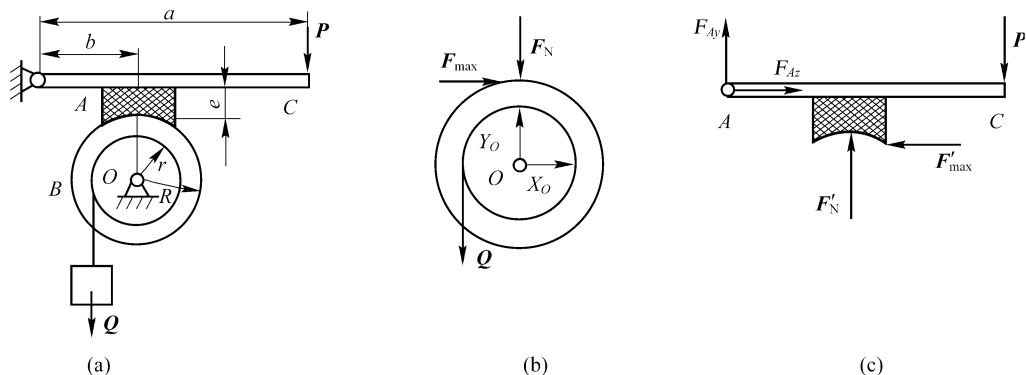


图 3-4 制动装置

以鼓轮为研究对象,其受力图如图 3-4(b)所示,建立如下平衡方程

$$\sum M_O(\mathbf{F}) = 0 \quad Q \cdot r - f_s F_N R = 0$$

解得

$$F_N = Qr / f_s R = \frac{1\,000 \times 100}{0.4 \times 200} \text{ N} = 1250 \text{ N}$$

$$F_{\max} = f_s F_N = Qr / R = \frac{1\,000 \times 100}{200} \text{ N} = 500 \text{ N}$$

再以手柄 AC 为研究对象,受力图如图 3-4(c)所示,建立如下平衡方程

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0$$

$$F'_N b - Pa - F'_{\max} e = 0$$

由  $F_N = F'_N$ ,  $F_{\max} = F'_{\max}$  解得

$$P = \frac{1\,250 \times 200 - 500 \times 50}{1\,000} \text{ N}$$

$$P = 225 \text{ N}$$

可见设计时,在可能的情况下, $r$ 、 $b$  取较小值, $a$ 、 $R$ 、 $f_s$  取较大值,闸瓦也可适当设计得厚一些,可使制动力减小,制动效果更好。

**例 3-2** 如图 3-5 所示,已知滑块 A 的重量  $G = 100 \text{ N}$ ,与水平地面之间的静滑动摩擦系数  $f_s = 0.5$ 。当力  $\mathbf{F}_1$  的大小分别为  $F_1 = 40 \text{ N}$  和  $F_1 = 120 \text{ N}$  时,物体是否会滑动?

**解** 此题为条件平衡问题,但由于主动力  $\mathbf{F}$  为已知,故只需验证平衡条件式是否满足即可判断物块能否平衡。

(1) 以物块为研究对象,受力图如图 3-5(b)所示。

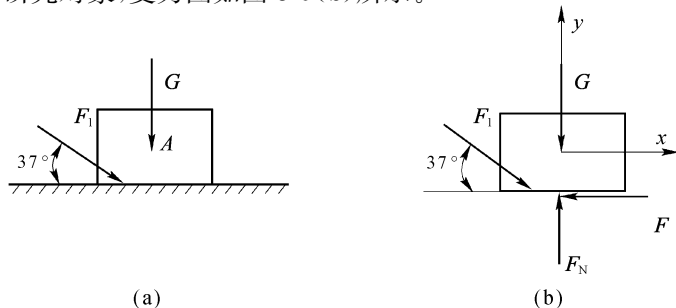


图 3-5 平面摩擦

(2)不滑动的条件为

$$\text{由} \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F_1 \cos 37^\circ - F = 0 \\ -F_1 \sin 37^\circ - G + F_N = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} F = F_1 \cos 37^\circ \\ F_N = G + F_1 \sin 37^\circ \end{cases}$$

当  $F_1 = 40 \text{ N}$  时,可得

$$\begin{cases} F = F_1 \cos 37^\circ = 40 \times \cos 37^\circ \text{ N} = 32 \text{ N} \\ F_N = G + F_1 \sin 37^\circ = (100 + 40 \times \sin 37^\circ) \text{ N} = 124 \text{ N} \end{cases}$$

此时  $f_s F_N = 0.5 \times 124 = 62 \text{ N}$ ,  $F \leq f_s F_N$  成立,所以物块不会滑动。

当  $F_1 = 120 \text{ N}$  时,可得

$$\begin{cases} F = F_1 \cos 37^\circ = 120 \times \cos 37^\circ \text{ N} = 96 \text{ N} \\ F_N = G + F_1 \sin 37^\circ = (100 + 120 \times \sin 37^\circ) \text{ N} = 172 \text{ N} \end{cases}$$

此时,  $f_s F_N = 0.5 \times 172 \text{ N} = 86 \text{ N}$ ,  $F \leq f_s F_N$  不成立,所以物块会产生滑动。

**例 3-3** 攀登电线杆的脚套钩如图 3-6(a)所示。已知电线杆直径为  $d$ ,  $A$ 、 $B$  两接触点的垂直距离为  $b$ ,套钩与电线杆间的静摩擦系数为 0.5,欲使套钩不致下滑,试求人站在套钩上的最小距离  $L$ 。

**解** 人站在套钩上的最小距离,是指套钩不致下滑时脚踏力  $F$  的作用线与电线杆中心线的距离。以套钩为研究对象,考虑套钩处于有向下滑动趋势的临界平衡状态。这时静摩擦力达到最大值。在受力图中必须画出摩擦力的正确方向,受力图如图 3-6(b)所示。

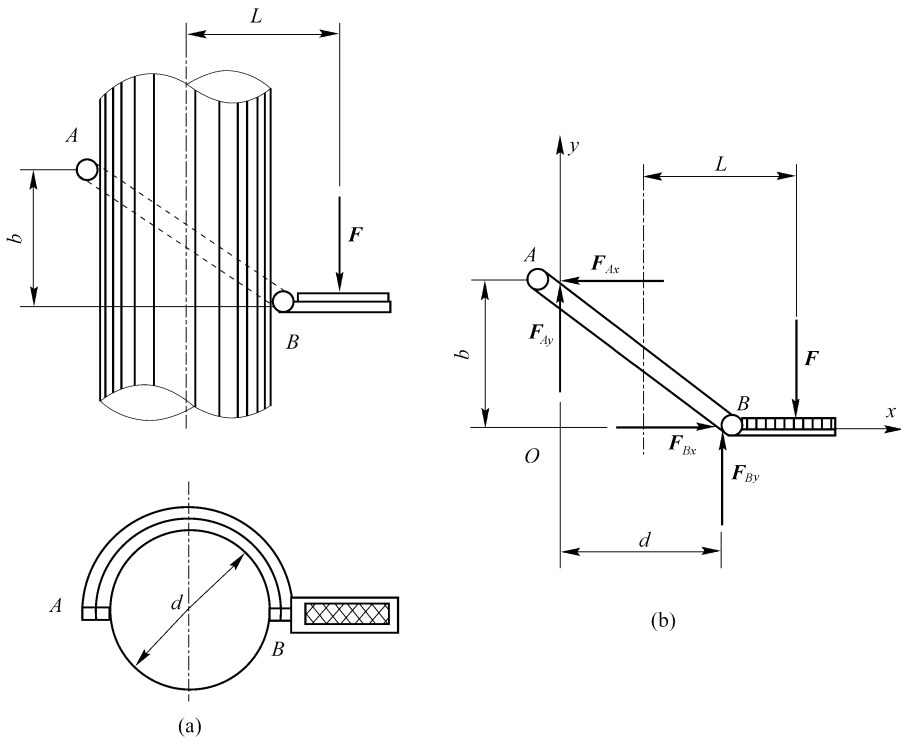


图 3-6 套钩



套钩的平衡方程为

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad F_{Bx} - F_{Ax} = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad F_{Ay} + F_{By} - F = 0 \\ \sum M_A(\mathbf{F}) = 0 & \quad F_{Bx}b + F_{By}d - F(L_{\min} + d/2) = 0 \end{aligned}$$

因套钩处于临界平衡状态,还需建立物理方程为

$$\begin{aligned} F_{Ay} &= f_s F_{Ax} \\ F_{By} &= f_s F_{Bx} \end{aligned}$$

解方程组可得

$$L_{\min} = \frac{b}{2f_s}$$

所以,套钩不致下滑时,人站在套钩中的位置到电线杆中心线的最小距离是  $\frac{b}{2f_s}$ 。

### 第三节 滚动摩擦

当两物体作相对滚动时,它们在接触点处或接触线上也存在着摩擦。比如在车轮的滚动、轴承中滚珠的滚动等工程实践中,就存在着摩擦阻碍,这就是滚动摩擦。从经验可知,滚动摩擦比滑动摩擦省力,如拖动重物时,在重物下垫上滚筒,就比直接拖运重物省力。

若将一重为  $G$ 、直径为  $d$  的刚性圆轮静止地放置在刚性的、粗糙的水平地面上,这时地面与圆轮仅在  $A$  点接触,重力  $G$  与正压力  $F_N$  共线,如图 3-7 所示,若在轮心  $O$  上施加力  $P$ ,在滚子上的  $A$  点还产生一个阻碍滚子沿水平支承面相对滑动的静滑动摩擦力  $F$  作用。不难看出,滚子上作用的力系为不平衡力系,因为  $P$  和  $F$  组成一力偶  $M(P, F)$ ,于是,似乎不论  $P$  值有多小,都能使圆轮产生滚动,这与实际情况并不相符,由此表明,在轮上必然会受到一个阻碍轮子滚动的力偶作用。此时,圆轮与水平面都不能作为刚体,受力后两者产生了微小变形,使接触点变成了偏向轮子相对滚动前方的一小块面积,圆轮受到的约束力,就分布在这一小块面积上,如图 3-8(a)所示。将分布力合成为一个合力  $F_R$ ,则合力的作用点也稍稍偏于轮子的前方。将  $F_R$  沿水平与垂直两个方向分解,水平方向的分力即摩擦力  $F$ ,垂直方向的分力即法向反力  $F_N$ 。可见,  $F_N$  向轮子前方偏移了一小段距离  $\delta$ ,如图 3-8(b)所示,使  $F_N$  与  $G$  组成一个力偶,这个力偶就是滚动摩擦阻力偶矩  $M(F_N, G)$ ,以符号  $M_f$  表示。因此,滚动摩擦阻力偶矩还可以如图 3-8(c)所示来表示。

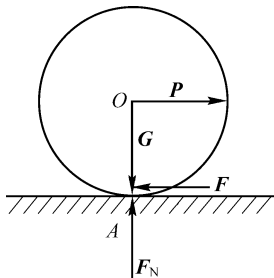


图 3-7 滚动摩擦

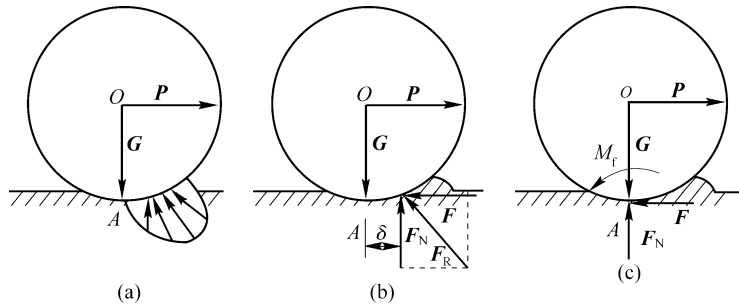


图 3-8 滚动摩擦的形成原理

当力  $P$  增大时,若轮子仍能维持静止,表明滚动摩擦阻力偶矩在相应增大。但是滚动摩擦阻力偶不能无限增大,而只能达到一定值,当主动力偶矩超过这个最大值时,轮子就要开始滚动。滚动摩擦阻力偶矩的最大值称为极限滚动摩擦阻力偶矩,用记号  $M_m$  表示。可见,滚动摩擦阻力偶矩只能在一定范围内改变,其变化范围为

$$0 \leq M_f \leq M_m$$

通过大量试验表明,滚动摩擦阻力偶矩的最大值与正压力成正比,即

$$M_m = \delta F_N$$

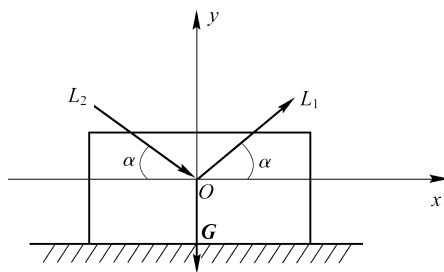
式中,  $\delta$  是比例常数,称为滚动摩擦系数,单位为  $\text{cm}$ 。

$\delta$  是正压力  $F_N$  偏离轮子最低点的最大距离,具有力偶臂的作用。 $\delta$  主要取决于轮体或支承表面的变形程度,与材料的硬度有关,而与接触表面的粗糙程度无关。



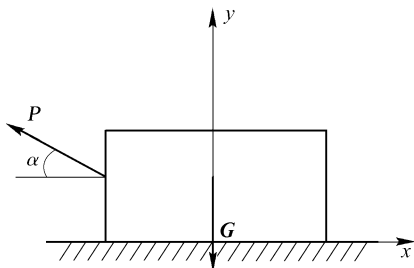
单元练习

1. 某一物块重  $G$ , 放置在粗糙的水平地面上, 如图题 3-1 所示, 接触处的摩擦系数为  $f$ , 要使物块沿水平面向右滑动, 可以沿  $L_1$  方向施加拉力, 也可沿  $L_2$  方向施加推力。试问哪种方法省力。



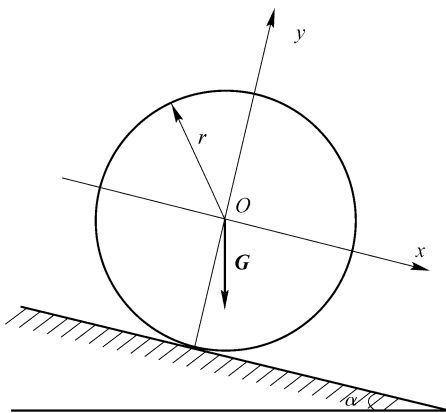
图题 3-1

2. 物块重  $G = 8 \text{ kN}$ , 拉力  $P = 2 \text{ kN}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ , 物块与地面的摩擦系数为  $f = 0.4$ , 如图题 3-2 所示。试求: (1) 物块是否平衡; (2) 物块与地面的摩擦力多大; (3) 当  $P$  为何值时, 物块将产生滑动。



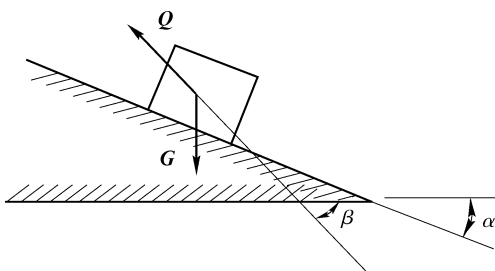
图题 3-2

3. 汽车轮的半径  $r=45\text{ cm}$ , 车轮和路面的滚动摩擦系数  $\delta=1\text{ cm}$ , 问路面的倾角  $\alpha$  最小为多少度时, 汽车能自行滑行。汽车可简化为一个车轮计算, 重为  $G$ , 如图题 3-3 所示。



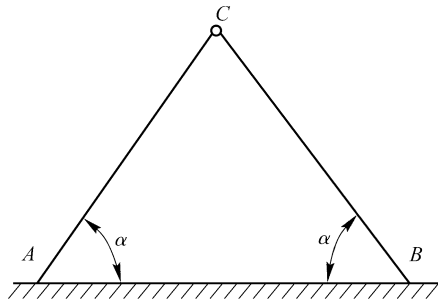
图题 3-3

4. 一重量为  $G$  的重物放在粗糙的斜面上, 斜面与水平线的夹角等于  $\alpha$ , 重物与斜面的滑动摩擦系数为  $f$ , 现有力  $Q$  作用在重物上, 如图题 3-4 所示, 为了使重物在最小的力  $Q$  作用下向上移动, 试求力  $Q$  与水平线的夹角  $\beta$ 。



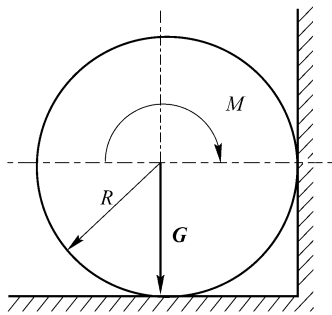
图题 3-4

5. 梯子由两个重量、长度都相同的均质部件组成, 两部件用铰链  $C$  连接, 现把梯子放在粗糙的水平地面上, 如图题 3-5 所示, 如果梯子与地面之间的摩擦系数为  $f$ , 试求当  $\alpha$  为多大时, 梯子可以平衡。



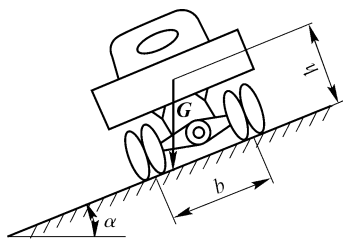
图题 3-5

6. 重量为  $G$ 、半径为  $R$  的圆盘放在粗糙的水平面上, 并且与一粗糙的垂直的墙相靠, 如图题 3-6 所示。如果圆盘与平面、墙的滑动摩擦系数都等于  $f$ , 试问当作用在圆盘上的力偶的力偶矩为多大时, 它还能保持平衡。



图题 3-6

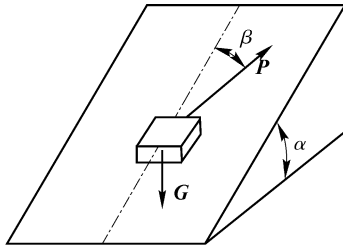
7. 重量为  $G$  的汽车停放在一段倾斜的道路上, 卡车重心离路面的高度等于  $h$ , 轮子中心之间的距离为  $b$ , 如图题 3-7 所示, 轮子对道路的滑动摩擦系数等于  $f$ , 试求: (1) 当道路与水平面的倾斜角为多大时卡车就会翻倒; (2) 什么时候会开始侧面的滑动。



图题 3-7

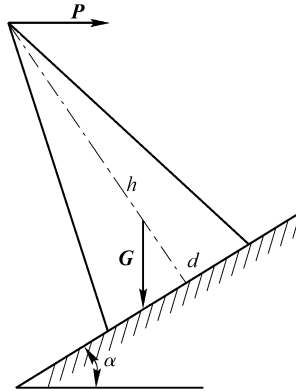
8. 一个重  $G$  的物体放在倾斜角度为  $\alpha$  的斜面上, 其与斜面间的摩擦系数为  $f$ 。今有一与斜面平行并与最大倾斜线成  $\beta$  角的力  $P$  作用于物体上, 使物体在斜面上静止, 如图题 3-8 所示。若  $\alpha = \beta = 30^\circ$ ,  $f = \frac{1}{3}$  (摩擦角  $\varphi = 18.4^\circ$ ), 求  $P$  的范围。





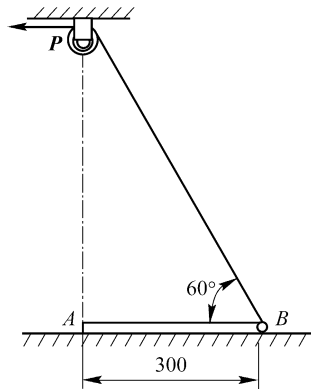
图题 3-8

9. 一个重为  $G$ , 高为  $h$ , 底面直径为  $d$  的正圆锥体放在一个倾角为  $\alpha$  的斜面上, 在其顶点作用水平力  $P$ , 如图题 3-9 所示。锥体底面与斜面间的摩擦系数为  $f$ , 若  $\alpha=30^\circ, G=100 \text{ N}, h=20 \text{ cm}, d=10 \text{ cm}, f=0.5$ , 求圆锥在斜面上保持静止时水平力  $P$  的范围。



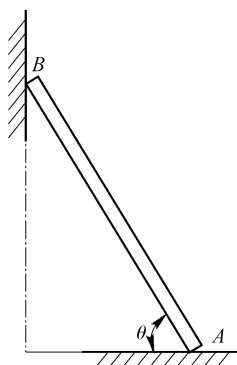
图题 3-9

10. 如图题 3-10 所示的装置用来提升重量为  $G$  的均质杆件  $AB$ 。已知杆和地面间的摩擦系数  $f=0.5, G=3 \text{ kN}$ , 当力  $P$  逐渐增加, 直到运动将发生为止, 杆将滑动还是绕  $A$  点转动? 此时  $P$  值为多少?



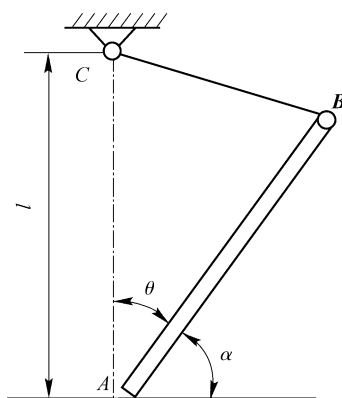
图题 3-10

11. 一长为  $l$  的均质梯子  $AB$  重  $200 \text{ N}$ , 靠于墙上, 梯子与地面的交角  $\theta=60^\circ$ , 如图题 3-11 所示。已知接触面之间的摩擦系数均为  $0.35$ , 今有一重  $600 \text{ N}$  的人缘梯而上, 问此人能否安全抵达最高点的位置? 如果不能, 求所能达到的最高点与  $A$  点的距离。



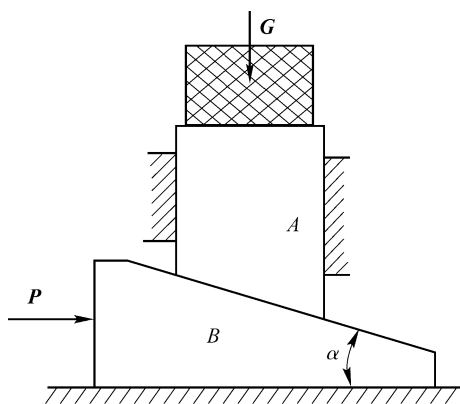
图题 3-11

12. 如图题 3-12 所示,均质杆  $AB$  重为  $G$ , 长为  $l$ , 其一端  $A$  靠在水平面上, 而另一端  $B$  用绳子牵住。已知静摩擦系数  $f_s=0.40$ , 试求  $A$  端不滑动的最小角度  $\alpha$  及所对应的绳子张力。



图题 3-12

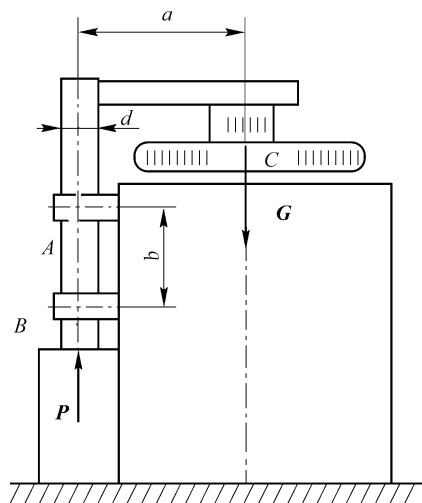
13. 如图题 3-13 所示为一楔块装置, 在楔块  $B$  上有一水平力  $P$  用以升高重量为  $G$  的物体。设所有接触面的摩擦角皆为  $\varphi$ , 若不计楔块  $A$ 、 $B$  的重量, 试求: (1) 楔块即将被推动时的水平力  $P_1$ ; (2) 保持楔块、重物平衡状态所需施加的水平力  $P_2$ ; (3) 楔块的自锁条件。



图题 3-13

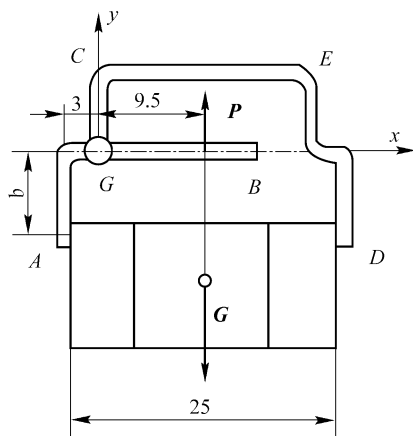


14. 井式热处理炉盖重  $G=200\text{ kN}$ , 升降支架由  $A$ 、 $B$  两径向滑动轴承支承, 如图题 3-14 所示。已知轴直径  $d=8\text{ cm}$ , 轴承距  $b=47\text{ cm}$ , 悬伸距  $a=105\text{ cm}$ , 滑动摩擦系数  $f=0.12$ 。求油缸需作用多大的力  $P$ , 才能将炉盖顶起。



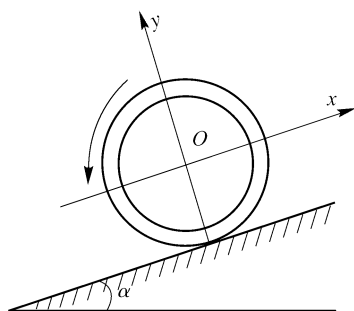
图题 3-14

15. 砖夹的宽度为  $25\text{ cm}$ , 曲杆  $AGB$  和  $GCED$  在  $G$  点铰接。提起的砖重  $G=12\text{ kN}$ , 提砖的力  $P$  作用在砖夹的中心线上, 尺寸如图题 3-15 所示。如砖夹与砖间的摩擦系数  $f=0.5$ , 求距离  $b$  为多大才能把砖夹起? 图中尺寸单位为  $\text{cm}$ 。



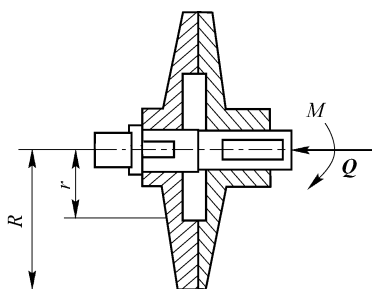
图题 3-15

16. 钢管车间设有钢管运转台架, 依靠钢管自重慢慢滚下, 如图题 3-16 所示, 若钢管直径为  $5\text{ cm}$ , 设钢管与台架之间滚动摩擦系数  $\delta=0.05\text{ cm}$ , 试求台架的最小倾角  $\alpha$  应为多大。



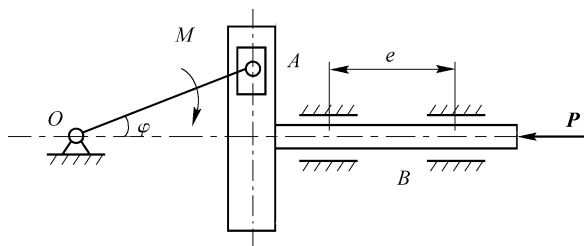
图题 3-16

17. 如图题 3-17 所示,单盘摩擦离合器由两个铸铁的圆盘组成,两圆盘分别固定在主动轴和从动轴上,当从动轴上的圆盘受到轴向压力  $Q$  的作用时,依靠两盘接触面间产生的摩擦力,而被主动轴上的圆盘带动一起运转,已知  $Q=500$  kN,摩擦系数  $f=0.25$ ,圆盘的内外半径为  $r=7$  cm,  $R=15$  cm,试求离合器能传递的最大力偶矩  $M$ 。



图题 3-17

18. 如图题 3-18 所示,长  $l$  的曲柄  $OA$  与一滑块铰接,滑块放在滑槽杆的开口里,滑槽杆的杆可以在水平方向移动,移动的距离等于  $l$ 。力  $P$  作用在杆上,杆沿此方向移动的摩擦系数等于  $f$ ,设机构的重量与在滑槽杆的开口里的摩擦均忽略不计,试求当作用在曲柄上的力偶矩为多大时机构处于平衡。



图题 3-18