第四章　三 角 函 数

第一节　角的概念推广和弧度制

一、主要内容

1. 基本概念

(1)**角**:平面内一条射线,绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形.

(2)**正角**:按逆时针方向旋转所形成的角叫作**正角**.

(3)**负角**:按顺时针方向旋转所形成的角叫作**负角**.

(4)**零角**:当射线没有做任何旋转时,我们称它形成一个**零角**,零角的始边与终边重合.

(5)**界线角**:终边在坐标轴上的角叫作**界线角**.

(6)1 **弧度的角**:把等于半径长的圆弧所对的圆心角叫作 1 **弧度的角**,记作 1 弧度或 1 rad.

(7)**弧度制**:以弧度为单位来度量角的单位制叫作**弧度制**.

2. 重要公式

(1)与角 α 终边相同的角所组成的集合为

$$\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}.$$

(2)在 y 轴上的角的集合为

$$\{\beta|\beta=90°+k\cdot 180°,n\in\mathbf{Z}\}.$$

(3)弧度公式.

当角 α 用弧度表示时,其绝对值等于圆弧长 l 与半径 r 的比,即

$$|\alpha|=\frac{l}{r}(\mathrm{rad}),$$

角 α 的正负由其终边的旋转方向决定.

(4)角度与弧度的换算公式.

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}(\mathrm{rad})\approx0.01745(\mathrm{rad}),$$

$$1\mathrm{rad}=\frac{180^\circ}{\pi}\approx57.30^\circ=57^\circ18'.$$

二、巩固训练

1. 选择题:

(1)$180^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$表示(　　).

A. 第二象限角　　B. 第三象限角

C. 第四象限角　　D. 界线角

(2)若将分针拨慢十分钟,则分针所转过的角度是(　　).

A. -60°　　B. -30°

C. 30°　　D. 60°

(3)与-463°终边相同的角可以表示为(　　).

A. $k\cdot360^\circ+463^\circ(k\in\mathbf{Z})$　　B. $k\cdot360^\circ+103^\circ(k\in\mathbf{Z})$

C. $k\cdot360^\circ+257^\circ(k\in\mathbf{Z})$　　D. $k\cdot360^\circ-257^\circ(k\in\mathbf{Z})$

(4)下列说法正确的是(　　).

A. 终边相同的角一定相等　　B. 相等的角终边一定相同

C. 第一象限的角都是锐角　　D. 小于 90°的角都是锐角

(5)$\frac{26\pi}{3}$的角为(　　).

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

(6)锐角的集合可以写作(　　).

A. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$　　B. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

C. $\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $(0,\pi)$

(7)把$-1\ 470°$化成$\alpha+2k\pi(0\leqslant\alpha\leqslant2\pi,k\in\mathbf{Z})$的形式是(　　).

A. $\frac{\pi}{6}-4\pi$　　B. $-\frac{11\pi}{6}-8\pi$

C. $\frac{\pi}{6}-10\pi$　　D. $\frac{11\pi}{6}-10\pi$

(8)第一象限角的集合可以表示为(　　).

A. $\left\{\alpha\mid 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right\}$　　B. $\{\alpha\mid 0°\leqslant\alpha\leqslant90°\}$

C. $\{\alpha\mid\alpha<90°\}$　　D. $\left\{\alpha\mid 2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

2. 填空题：

(1)$2\ 321°$角所在的象限为____________.

(2)在$0°\sim360°$范围内与$-70°$终边相同的角是____________.

(3)与$-40°$终边相同的角的集合为____________.

(4)终边落在x轴负半轴上的角α的集合为____________.

(5)$\frac{\pi}{8}=$________(用度数表示).

(6)$-72°=$________(rad).

(7)3rad 的角的终边在第____象限，-5rad 的角的终边在第____象限.

3. 判断下列角是第几象限的角，并写出与各角终边都相同的角的集合：

(1)$75°$；　　(2)$-95°$；

(3)170°；　　(4)820°.

4.在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，找出分别与下列各角终边相同的角：

(1)$-54^\circ 24'$；　　(2)458°；

(3)-490°；　　(4)$895^\circ 12'$.

5.判断下列各角所在的象限：

(1)815°；

(2)-117°；

(3)-197°；

(4)715°.

6.设α为第一象限的角，判断角$\frac{\alpha}{2}$所在的象限.

7. 设角$\frac{\alpha}{2}$为锐角，求角α的取值范围.

8. 把下列各角由角度换算为弧度：

(1)$27°$；

(2)$220°$；

(3)$460°$；

(4)$-810°$.

9. 把下列各角由弧度换算为角度：

(1)$\frac{\pi}{7}$；　　　　(2)$-\frac{5\pi}{11}$；

(3)4；　　　　(4)-3.

三、自我检测

1. 填空题：

(1)3 721°角所在的象限为________.

(2)在 0°～360°范围与$-510°$角终边相同的角是________.

(3)终边在 y 轴上的角的集合用弧度制可表示为________.

(4)某飞轮每分钟转 100 圈，则它每秒钟转过的角度为________.

(5)第三象限的角的集合用角度制可表示为________，用弧度制表示为________.

2. 选择题：

(1)时钟从 3 时走到 4 时 20 分，分针转了(　　).

A. 20°　　B. 480°　　C. 80°　　D. 28 800°

(2)$-90°+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$表示的是(　　).

A. 第一象限角　　B. 第三象限角

C. 界限角　　D. 第四象限角

(3)弧度为$\frac{5}{3}\pi$的角为(　　).

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

(4)下列各角中,是界限角的是(　　).

A. $1\ 200°$　　B. $-1\ 140°$

C. $-1\ 350°$　　D. $1\ 850°$

(5)已知角$\alpha=3$,则α的终边在(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 指出下列各角所在的象限:

(1)$-325°$;　　(2)$1\ 019°$;

(3)$-523°18'$;　　(4)$2\ 640°$.

4.将下列各角由角度转换为弧度：

(1)$105°$；　　(2)$-495°$；

(3)$-67°30'$；　　(4)$315°$.

5.将下列各角由弧度转换为角度：

(1)$-\frac{7\pi}{10}$；　　(2)$-\frac{13\pi}{12}$；

6.指出下列各角是第几象限的角,并写出与下列各角终边相同的角的集合:

(1)$\frac{13\pi}{5}$;

(2)$-\frac{5\pi}{7}$;

(3)$-\frac{2\pi}{3}$;

(4)$\frac{19\pi}{7}$.

7.已知角α为第三象限角,试判断角$\frac{\alpha}{2}$所在的象限.

8.扇形钢板的圆心角为45°,半径为1.5 cm,求它的周长(精确到0.01 cm).

9.用计算器将下列各角由弧度转换为角度(精确到$1''$):

(1)$\frac{3\pi}{4}$; (2)$-\frac{2}{3}\pi$;

(3)$-\frac{2}{7}\pi$; (4)13.

10.用计算器将下列各角由角度转换为弧度(精确到0.001):

(1)$-800°$; (2)$230.5°$.

第二节 任意角的三角函数

一、主要内容

1.基本概念

(1)**三角函数**:正弦、余弦及正切都是以角α为变量的函数,分别叫作**正弦函数**、**余弦函数**及**正切函数**,它们都是三角函数.

(2)**单位圆**:在直角坐标系中,以原点为圆心,单位长度为半径的圆叫作**单位圆**.

2.重要知识点

(1)正弦函数、余弦函数和正切函数的定义域.

三角函数	定义域
$\sin\alpha$	$\mathbf{R}$
$\cos\alpha$	$\mathbf{R}$
$\tan\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

(2)三角函数值在各象限内的正负号.

α所在的象限	点P的坐标		$\sin\alpha=\frac{y}{r}$	$\cos\alpha=\frac{x}{r}$	$\tan\alpha=\frac{y}{x}$
	x	y			
第一象限	+	+	+	+	+
第二象限	−	+	+	−	−
第三象限	−	−	−	−	+
第四象限	+	−	−	+	−

(3)界线角的三角函数值.

角 / 三角函数	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	0	−1	0	1
$\tan\alpha$	0	不存在	0	不存在	0

(4)利用科学计算器计算任意角的三角函数值的主要步骤为

设置模式(角度制或弧度制)→按$\boxed{\sin}$键(或$\boxed{\cos}$、$\boxed{\tan}$键)→输入角的大小→按$\boxed{=}$键显示结果.

二、巩固训练

1. 选择题:

(1)角α的终边经过点$P(0,b)(b\neq0)$,则$\sin\alpha$等于(　　).

A. 0　　　　B. 1

C. −1　　　　D. ±1

(2)角α的终边经过点$P(-3,-2)$,则下列式子正确的是(　　).

A. $\sin\alpha\cdot\tan\alpha>0$　　　　B. $\cos\alpha\cdot\tan\alpha>0$

C. $\cos\alpha-\tan\alpha<0$　　　　D. $\cos\alpha+\sin\alpha>0$

(3)下列各式中错误的是(　　).

A. $\sin585°<0$　　　　B. $\tan(-675°)>0$

C. $\cos(-690°)<0$　　　　D. $\tan1\,010°<0$

(4)如果$\cos\alpha>0$,$\sin\alpha<0$,那么α在(　　).

A. 第一象限　　　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

(5)如果 $\cos\alpha \cdot \tan\alpha > 0$,那么 α 在(　　).

A. 第一或第二象限　　B. 第二或第三象限

C. 第三或第四象限　　D. 第二或第四象限

(6)$\sin 2 \cdot \cos 3 \cdot \tan 4$ 的值(　　).

A. 小于零　　B. 大于零

C. 等于零　　D. 不确定

(7)下列各式中正确的是(　　).

A. $\sin \frac{8\pi}{3} < 0$　　B. $\tan\left(-\frac{4\pi}{5}\right) > 0$

C. $\cos \frac{7\pi}{3} < 0$　　D. $\tan 4 < 0$

(8)下列各三角函数值中,负值的个数是(　　).

①$\sin(-660°)$; ②$\tan 160°$; ③$\cos(-740°)$; ④$\sin(-420°)\cos 570°$.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 填空题:

(1)$\sin \frac{3\pi}{2} =$________,$\cos\pi =$________,$\tan\pi =$________.

(2)设点 $P(\sqrt{3},1)$在角 α 的终边上,则 $\sin\alpha =$________,$\tan\alpha =$________.

(3)设点 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$在角 α 的终边上,则 $\cos\alpha =$________ $\tan\alpha =$________.

(4)设点 $P(x,2)$是角 α 的终边上的一点,且满足 $\sin\alpha = \frac{2}{3}$,则 x 的值是____________.

3. 判断下列各三角函数值的正负号:

(1)$\sin 168°$;　　(2)$\cos(-600°)$;

(3)$\tan(-105°)$；　　(4)$\sin\left(-\frac{17\pi}{5}\right)$.

4.已知角 α 的终边经过点 $P(-2,4)$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

5.计算下列各式的值：

(1)$\sin0°+\cos90°+\tan180°$；

(2)$\sin\pi-2\cos3\pi-3\sin\dfrac{\pi}{2}+\tan0+5\cos\dfrac{3\pi}{2}$;

(3)$4\cos270°+12\cos0°+3\tan0°-8\sin180°$;

(4)$5\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos0-6\tan\pi-3\sin\dfrac{3\pi}{2}+4\tan0$.

6. 设点 $P(3,m)$在角 α 的终边上，且 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

三、自我检测

1. 填空题：

(1) $\sin\frac{\pi}{2}=$________，$\cos0=$________，$\tan\pi=$________，

$\sin125°$________ 0，$\cos125°$________ 0，$\tan125°$________ 0.

(2)已知角 α 的终边过点 $P(-3,2)$，则 $\sin\alpha=$________，$\cos\alpha=$________，$\tan\alpha=$________.

(3)已知点 $P(m,n)$为角 α 终边上一点，$m\in\mathbf{R}$，且 $m\neq0$，则 $\sin\alpha=$________.

2. 选择题：

(1)已知 $\cos\alpha>0$，$\tan\alpha<0$，则角 α 是(　　).

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

(2)下列各式中，正确的是(　　).

A. $\sin\frac{8\pi}{3}<0$　　B. $\tan(-\frac{4}{5})>0$

C. $\cos\frac{7\pi}{3}<0$　　D. $\tan4<0$

(3)已知角 α 的终边经过点 $P(-5,12)$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha=$(　　).

A. $-\frac{7}{13}$　　B. $\frac{7}{13}$

C. $-\frac{17}{13}$　　D. $\frac{17}{13}$

(4)已知 $\cos\alpha<0$,则角 α 是(　　).

A. 第二象限角　　　　B. 第三象限角

C. 第二象限角或第三象限角　　　　D. $\left\{\alpha \middle| \frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$

3. 计算下列各式的值:

(1)$7\cos270°+12\cos0°+2\tan0°-8\sin180°$;

(2)$\sin\pi-2\cos2\pi-3\sin\frac{3\pi}{2}+4\tan0+5\cos\frac{\pi}{2}$;

(3)$6\cos\frac{3}{2}\pi+10\cos0+\frac{1}{3}\tan^2\pi-8\sin2\pi$;

(4)$4\cos270°+5\sin0°+3\tan180°-2\cos360°$；

4.已知 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，试判断角 α 所在的象限.

5.已知 $\sin\alpha$ 与 $\tan\alpha$ 异号，试判断角 α 所在的象限.

6.已知点 $P(12,m)$为角 α 终边上一点,且 $\tan\alpha=\frac{5}{12}$,求 $\sin\alpha$,$\cos\alpha$ 的值.

7.已知角 α 是第四象限的角,点 $P(m,-4)$在角 α 的终边上,且 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$,求 $\cos\alpha$,$\tan\alpha$ 的值.

8.用计算器求下列各三角函数的值(精确到 0.001):

(1)$\sin(-2\ 007°)$;　　(2)$\tan255.7°$;

(3)$\sin 89.5^\circ$；　　(4)$\tan(-67^\circ)$.

第三节　同角三角函数的基本关系

一、主要内容

本节主要介绍了同角三角函数的基本关系式，即

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z}).$$

二、巩固训练

1. 选择题：

(1)已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且 α 是第二象限的角，则 $\tan\alpha$ 的值为(　　).

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$

C. $-\frac{4}{3}$　　D. $\pm\frac{3}{4}$

(2)下列四个命题中可能成立的一个是(　　).

A. $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 且 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$　　B. $\sin\alpha=0$ 且 $\cos\alpha=-1$

C. $\tan\alpha=1$ 且 $\cos\alpha=-1$　　D. α 在第四象限且 $\tan\alpha=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

(3)设 α 是第三象限的角，则点 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$在(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

(4)已知 $\sin\alpha<0$，$\tan\alpha>0$，则化简 $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ 的结果为(　　).

A. $\cos\alpha$　　B. $\tan\alpha$

C. $-\cos\alpha$　　D. $\pm\cos\alpha$

2. 填空题：

(1)设角 $\alpha=60°$，则其终边与单位圆交点的坐标为________.

(2)设角 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，则其终边与单位圆交点的坐标为________.

(3)设 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，且 α 是第一象限的角，则 $\cos\alpha=$________，$\tan\alpha=$________.

(4)已知 α 是第二象限的角，且 $\cos\alpha=-\frac{7}{25}$，则 $\sin\alpha=$________，$\tan\alpha=$________.

3. 已知 $\tan\alpha=3$，且 α 是第一象限的角，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$.

4. 已知 $\tan\alpha=-2$，且 α 是第四象限的角，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$.

5. 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{8}{17}$，且 α 是第三象限的角，求 $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$.

6. 已知 $\tan\alpha=4$，求 $\dfrac{2\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ 的值.

7. 已知角 α 的终边上有一点 $P(-\sqrt{3},m)$，且 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}m$，求 m，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

三、自我检测

1. 填空题:

(1)已知角 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$,则其终边与单位圆交点的坐标为________.

(2)已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$,且角 α 是第三象限角,则 $\tan\alpha=$________.

(3)化简:$\sqrt{1-\sin^2 30^\circ}=$________.

(4)$\sin^2 60^\circ+$________$=1$,$\cos 15^\circ \tan 15^\circ=$________,$\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=$________.

2. 选择题:

(1)已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,且角 α 是第三象限的角,则 $\tan\alpha$ 的值为(　　).

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $-\frac{3}{4}$　　D. $\pm\frac{3}{4}$

(2)下列结论中,正确的是(　　).

A. $\sin\alpha\cos\alpha=0$　　B. $\sin\alpha\cos\alpha=1$

C. $\sin\alpha\tan\alpha=\cos\alpha$　　D. $\cos\alpha\tan\alpha=\sin\alpha$

(3)角 $-\alpha$ 的终边与单位圆交点的坐标为(　　).

A. $(\sin\alpha,\cos\alpha)$　　B. $(-\sin\alpha,-\cos\alpha)$

C. $(\cos(-\alpha),\sin(-\alpha))$　　D. $(-\sin\alpha,\cos\alpha)$

(4)若 $\cos\alpha>0$,则角 α 的终边在(　　).

A. 第二、三象限　　B. 第二、三象限或 x 轴负半轴

C. 第一、四象限　　D. 第一、四象限或 x 轴正半轴

3. 已知 $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$,且角 α 是第四象限的角,求 $\cos\alpha$,$\tan\alpha$ 的值.

4.已知 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$,且角 α 是第二象限的角,求 $\sin\alpha$,$\tan\alpha$ 的值.

5.已知 $\tan\alpha=-2$,且角 α 是第二象限的角,求 $\sin\alpha$,$\cos\alpha$ 的值.

6.已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{5}$,求下列各式的值:

(1)$\sin\alpha\cos\alpha$;

(2)$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$.

7. 已知 $\tan\alpha=2$,求下列各式的值:

(1)$\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$;

(2)$5\sin\alpha\cos\alpha$.

8. 化简:

(1)$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$;

(2)$\sin^2\alpha\left(1+\dfrac{1}{\tan^2\alpha}\right)$;

(3)$\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\tan^2\alpha-1}$.

第四节　三角函数的诱导公式

一、主要内容

本节主要介绍了三角函数间的诱导公式：

(1)角 α 与 $\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的三角函数间的诱导公式.

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha,$$
$$\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha.$$

(2)角 α 与 $-\alpha$ 的三角函数间的诱导公式.

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha.$$

(3)角 α 与 $\pi\pm\alpha$ 的三角函数间的诱导公式.

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha.$$
$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha.$$

(4)角 α 与 $\pi\pm\frac{\alpha}{2}$ 的三角函数间的诱导公式.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha,$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha}.$$

二、巩固训练

1. 选择题:

(1)如果 $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$,那么 $\sin(6\pi-\alpha)$ 为(   ).

A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)下列各式中,与 $\cos1\,000°$ 的值相等的是(   ).

A. $\cos80°$ B. $-\cos80°$

C. $\sin80°$ D. $-\sin80°$

(3)如果 α,β 满足 $\alpha-\beta=\pi$,那么下列式子正确的是(   ).

A. $\sin\alpha=\sin\beta$ B. $\cos\alpha=\cos\beta$

C. $\tan\alpha=\tan\beta$ D. $\tan\alpha=-\tan\beta$

2. 填空题:

(1)$\sin240°=$________,$\cos120°=$________,$\tan300°=$________.

(2)$\sin210°=$________,$\cos150°=$________,$\tan330°=$________.

(3)$\sin135°=$________,$\cos225°=$________,$\tan315°=$________.

(4) $\sin\dfrac{13\pi}{6}=$________, $\cos\dfrac{22\pi}{3}=$________, $\tan\left(-\dfrac{7\pi}{3}\right)=$________.

(5) $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)=$________, $\cos\dfrac{23\pi}{4}=$________, $\tan\left(-\dfrac{49\pi}{4}\right)=$________.

(6) $\sin\dfrac{11\pi}{3}=$________, $\cos\dfrac{7\pi}{3}=$________, $\tan\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)=$________.

3. 求下列各式的值：

(1) $\dfrac{\tan(-45^\circ)}{\cos(-240^\circ)+\sin 810^\circ}$；

(2) $\dfrac{\cos 585^\circ}{\tan 495^\circ+\sin 690^\circ}$；

(3) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\cdot\tan\dfrac{3\pi}{4}$；

(4) $\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\tan\frac{5\pi}{4}$.

4. 已知 $\sin(\alpha-2\pi)=\frac{4}{5}$,求 $\cos(2\pi+\alpha)\cdot\tan(\alpha-\pi)$.

5. 设 α 为第二象限的角,且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,求 $\frac{\sin(\pi+\alpha)+\cos(7\pi-\alpha)}{\sin(\alpha-4\pi)+2\cos(2\pi+\alpha)}$.

三、自我检测

1. 填空题：

(1)$\sin450°=$________，$\cos720°=$________，$\tan420°=$________.

(2)$\sin330°=$________，$\cos(-30°)=$________，$\tan(-405°)=$________.

(3)$\sin\frac{4\pi}{3}=$________，$\cos\frac{10\pi}{3}=$________，$\tan\frac{5\pi}{6}=$________.

(4)$\sin\frac{3\pi}{4}=$________，$\cos\frac{23\pi}{4}=$________，$\tan\left(-\frac{49\pi}{4}\right)=$________.

2. 计算下列各式的值：

(1)$\sin(-30°)\cos150°\tan210°$；

(2)$\frac{2\sin930°-\cos135°+3\tan2\ 010°}{3\sin(-270°)+\cos315°-\tan1\ 110°}$；

(3)$\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\tan\frac{5\pi}{4}$；

(4)$\dfrac{\cos\dfrac{37\pi}{6}+\sin\left(-\dfrac{17\pi}{3}\right)}{\tan\dfrac{33\pi}{4}}$.

3. 化简：

(1)$\dfrac{\tan(2\pi-\alpha)\cos(3\pi+\alpha)}{\sin(\alpha-2\pi)}$；

(2)$\dfrac{\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}+\dfrac{\cos\left(\dfrac{5}{2}\pi+\alpha\right)}{\sin(-\pi-\alpha)}$；

(3) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)-\tan(-\alpha)-\tan(2\pi+\alpha)}{\tan(\pi+\alpha)+\cos(-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)}$；

(4) $\dfrac{\cos(3\pi+\alpha)\cos^2(\pi+\alpha)\sin^2(-\alpha-3\pi)}{\sin(2\pi+\alpha)\sin(5\pi-\alpha)\cos^2(\pi-\alpha)}$.

4. 已知 $\cos(\alpha-2\pi)=\dfrac{1}{2}$，求$\dfrac{\sin(2\pi+\alpha)}{\tan(\alpha-\pi)}$的值.

5. 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，且角 α 为第二象限角，求 $\sin(-\alpha)$，$\cos(-\alpha)$，$\tan(-\alpha)$ 的值.

6. 已知 $\sin(\alpha-2\pi)=\dfrac{1}{5}$，求 $\cos(3\pi-\alpha)\tan(\alpha-5\pi)$ 的值.

7. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，且角 α 为第一象限角，求 $\dfrac{\sin(\alpha+\pi)+\cos(5\pi-\alpha)}{\sin(\alpha-6\pi)+2\cos(2\pi+\alpha)}$ 的值.

第五节　已知三角函数值求角

一、主要内容

本节主要介绍已知任意角的三角函数值，利用计算器求指定范围的角.

(1)已知正弦函数值，求指定范围的角的步骤是：

①设定角度或弧度计算模式→按 $\boxed{\text{shift}}$ 键 →按 $\boxed{\sin}$ 键→输入正弦函数值→按 $\boxed{=}$ 键显示 $-90°\sim90°\left(\text{或}-\frac{\pi}{2}\sim\frac{\pi}{2}\right)$范围的角；

②利用诱导公式 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ 求出 $90°\sim270°\left(\text{或}\frac{\pi}{2}\sim\frac{3\pi}{2}\right)$范围内的角；

③利用诱导公式 $\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha(k\in\mathbf{Z})$求出指定范围内的角.

(2)已知余弦函数值，求指定范围的角的步骤是：

①设定角度或弧度计算模式→按 $\boxed{\text{shift}}$ 键→按 $\boxed{\cos}$ 键→输入余弦函数值→按 $\boxed{=}$ 键显示 $0°\sim180°$(或 $0\sim\pi$)范围内的角；

②利用诱导公式 $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ 求出 $-180°\sim0°$(或 $-\pi\sim0$)范围内的角；

③利用诱导公式 $\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha(k\in\mathbf{Z})$求出指定范围内的角.

(3)已知正切函数值，求指定范围的角的步骤是：

①设定角度或弧度计算模式→按 $\boxed{\text{shift}}$ 键→按 $\boxed{\tan}$ 键→输入正切函数值→按 $\boxed{=}$ 键显示 $-90°\sim90°\left(\text{或}-\frac{\pi}{2}\sim\frac{\pi}{2}\right)$范围内的角；

②利用诱导公式 $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$ 求出 $90°\sim270°\left(\text{或}\frac{\pi}{2}\sim\frac{3\pi}{2}\right)$范围内的角；

③利用诱导公式 $\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha(k\in\mathbf{Z})$求出指定范围内的角.

二、巩固训练

1. 根据下列三角函数值，求 $0°\sim360°$ 范围内的角(精确到 $0.01°$)：

(1) $\sin x=0.6453$；

(2) $\cos x=-0.0489$；

(3) $\tan x=2.6$；

(4) $\sin x=0.4758$；

(5) $\cos x=0.8908$；

(6) $\tan x=5$.

2. 已知 $\sin x=0.841\,3$，求 $[0,2\pi]$ 范围内的角 x（精确到 $0.000\,1$）.

3. 已知 $\tan x=5.741\,2$，求 $(-\pi,\pi)$ 范围内的角 x（精确到 $0.000\,1$）.

三、自我检测

1. 填空题：

(1) 已知 $\sin x=\frac{1}{2}$，且 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，那么 $x=$________.

(2) 已知 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，那么 $x=$________.

(3) 已知 $\cos x=\frac{1}{2}$，且 $x\in[0,\pi]$，那么 $x=$________.

(4) 已知 $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $x\in[-\pi,\pi]$，那么 $x=$________.

(5) 已知 $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，那么 $x=$________.

(6) 已知 $\tan x=-1$，且 $x\in[0,2\pi]$，那么 $x=$________.

2.已知正弦函数值,求指定范围内的角:

(1)已知 $\sin x=0.34$, $x\in[0,2\pi]$(精确到 0.000 1).

(2)已知 $\sin x=-0.34$, $x\in[0,2\pi]$(精确到 0.000 1).

3.已知余弦函数值,求指定范围内的角:

(1)已知 $\cos x=0.15$, $x\in[-\pi,\pi]$(精确到 $0.01°$).

(2)已知 $\cos x=-0.15$，$x\in[-\pi,\pi]$(精确到 0.01°).

4.已知正切函数值，求指定范围内的角：

(1)已知 $\tan x=-0.4$，$x\in[0,2\pi]$(精确到 0.01°).

(2)已知 $\tan x=3$，$x\in[0,2\pi]$(精确到 0.01°).

5. 已知 $\sin(\pi-x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$x\in[0,4\pi]$,求满足条件的角 x.

6. 已知 $\cos(\pi+x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$x\in[0,2\pi]$,求满足条件的角 x.

第六节　三角函数的图像和性质

一、主要内容

1. 基本概念

(1)**正弦曲线**:正弦函数的图像叫作**正弦曲线**,如图 4-1 所示.

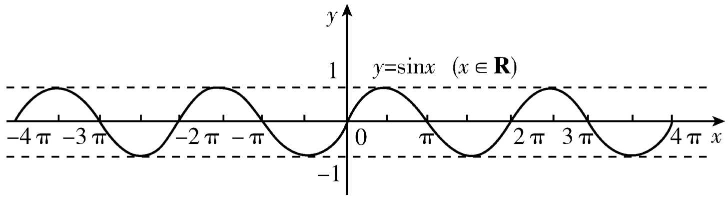

图 4-1

(2)**周期函数、周期、最小正周期**：对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的常数 T，当 x 取定义域 D 内的每一个值时，都有 $x+T\in D$，并且等式 $f(x+T)=f(x)$ 成立，那么函数 $f(x)$ 叫作**周期函数**，常数 T 叫作这个函数的一个**周期**. 如果周期函数的所有周期中存在一个最小的正数，那么就把它叫作**最小正周期**.

(3)**余弦曲线**：余弦函数的图像叫作**余弦曲线**，如图 4-2 所示.

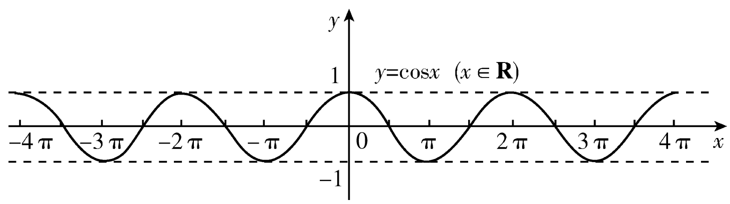

图 4-2

(4)**正切曲线**：正切函数的图像叫作**正切曲线**，如图 4-3 所示.

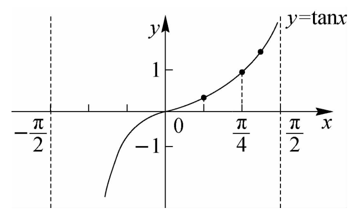

图 4-3

2. 重要知识点

(1)正弦函数的主要性质.

①定义域：正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

②值域：正弦函数 $y=\sin x$ 的值域为 $[-1,1]$. 当 $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，函数取得最大值 1；当 $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，函数取得最小值 -1.

③周期性：正弦函数是周期函数. 它的周期是 $2k\pi(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$，且最小正周期是 2π.

④奇偶性：正弦函数是奇函数.

⑤单调性：正弦函数在每一个区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ 上都是增函数，其值从 -1 增大到 1；在每一个区间 $\left[\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ 上都是减函

数,其值从 1 减小到 -1.

(2)余弦函数的主要性质.

①定义域:余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

②值域:余弦函数 $y=\cos x$ 的值域为 $[-1,1]$. 当 $x=2k\pi, k\in\mathbf{Z}$ 时,函数取得最大值 1;当 $x=(2k+1)\pi, k\in\mathbf{Z}$ 时,函数取得最小值 -1.

③周期性:余弦函数是周期函数. 它的周期是 $2k\pi(k\in\mathbf{Z}, k\neq 0)$,并且最小正周期是 2π.

④奇偶性:余弦函数是偶函数.

⑤单调性:余弦函数在每一个区间 $[(2k-1)\pi, 2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上都是增函数,其值从 -1 增大到 1;在每一个区间 $[2k\pi,(2k+1)\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上都是减函数,其值从 1 减小到 -1.

(3)正切函数的主要性质.

①定义域:正切函数 $y=\tan x$ 的定义域是 $\left\{x \mid x\in k, x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

②值域:正切函数 $y=\tan x$ 的值域为 $\mathbf{R}$. 当 $x<\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 且 x 无限接近于 $\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时,$y=\tan x$ 的函数值无限接近于无穷大;当 $x>\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 且 x 无限接近于 $-\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时,$y=\tan x$ 的函数值无限接近于无穷小.

③周期性:正切函数是周期为 π 的周期函数.

④奇偶性:正切函数是奇函数.

⑤单调性:正切函数在每一个开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上都是增函数,其值从 $-\infty$ 增大到 $+\infty$.

(4)利用“五点法”做正弦函数或余弦函数的图像.

二、巩固训练

1. 选择题:

(1)图像经过点 $(\pi,1)$ 的函数是(　　).

A. $y=\sin x$　　　　B. $y=-\sin x$

C. $y=\cos x$　　　　D. $y=-\cos x$

(2)函数 $y=2\cos x$ 是(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 既是奇函数,又是偶函数　　D. 非奇非偶函数

(3)正弦函数 $y=\sin x$ 与函数 $y=-\sin x$ 的图像(　　).

A. 只关于 x 轴对称　　B. 只关于 y 轴对称

C. 关于原点对称　　D. 关于坐标轴对称

(4)下列各区间为函数 $y=\sin x$ 的增区间的是(　　).

A. $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $(0,\pi)$

C. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$　　D. $(\pi,2\pi)$

(5)下列函数中,周期是$\frac{\pi}{2}$的偶函数是(　　).

A. $y=\sin 4x$　　B. $y=\cos 4x$

C. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $y=\cos 2x$

(6)函数 $y=\frac{1}{2}\cos 3x$ 的最大值和最小值分别为(　　).

A. $3,-3$　　B. $\frac{3}{2},-\frac{3}{2}$

C. $1,-1$　　D. $\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$

(7)下列函数中为奇函数的是(　　).

A. $y=-\sin x$　　B. $y=\sin x-1$

C. $y=\cos x$　　D. $y=\cos x+1$

(8)使得函数 $y=\sin x$ 为减函数,且值为负数的区间为(　　).

A. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

C. $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

(9)若$\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$,则 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的大小关系是(　　).

A. $\sin\alpha>\cos\alpha$　　B. $\sin\alpha<\cos\alpha$

C. $\sin\alpha\geqslant\cos\alpha$　　D. $\sin\alpha\leqslant\cos\alpha$

2. 填空题：

(1)用“五点法”作余弦函数 $y=\cos x$ ($x\in[0,2\pi]$)的简图时，五个关键点是__________.

(2)设函数 $3\sin x=a$，则 a 的取值范围是__________.

(3)函数 $y=\sin 2x$ 与函数 $y=4\cos x$ 都是周期函数，它们的周期分别是__________.

(4)函数 $y=\sin x$ 的定义域为__________，值域为__________.

(5)函数 $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是__________.

(6)函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调减区间是__________.

3. 求使 $3\sin x-a=2$ 成立的 a 的取值范围.

4. 用“五点法”作下列函数的简图：

(1) $y=2\sin x+1$，$x\in[0,2\pi]$； (2) $y=1-3\sin x$，$x\in[0,2\pi]$；

(3) $y=3-2\cos x, x\in[0,2\pi]$；　　(4) $y=2\cos x-1. x\in[0,2\pi]$.

5. 求下列函数的最大值和最小值，并求函数取得最大值和最小值时自变量的集合：

(1) $y=1+2\sin x$；　　(2) $y=1-\frac{1}{3}\cos x$；

(3) $y=\sin x+2$；　　(4) $y=1+\frac{2}{3}\cos x$.

6. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-\cos x}$； (2) $y=\sqrt{\sin x}$.

7. 已知函数 $y=a+b\sin x(b<0)$的最大值为3，最小值为-1，求 a,b 的值.

三、自我检测

1. 填空题：

(1) 正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为________，值域为________，周期为________. 当 $x=$________时，$y_{\max}=$________；当 $x=$________时，$y_{\min}=$________. 由于正弦函数 $y=\sin x$ 的图像关于________对称，故正弦函数是________函数.

(2) 余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为________，值域为________，周期为________. 当 $x=$________时，$y_{\max}=$________；当 $x=$________时，$y_{\min}=$________. 由于余弦函数 $y=\cos x$ 的图像关于________对称，故余弦函数是

________函数.

(3) 正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为________，值域为________，周期为________. 由于正切函数 $y=\tan x$ 的图像关于________对称，故正切函数是________函数.

2. 不求值，比较下列各组中两个函数值的大小：

(1) $\sin 75^\circ$ 和 $\sin 175^\circ$；　　(2) $\cos 130^\circ$ 和 $\cos 170^\circ$；

(3) $\cos 120^\circ$ 和 $\cos(-120^\circ)$；　　(4) $\tan 40^\circ$ 和 $\tan 85^\circ$.

3. 求使 $2\sin x-3a=1$ 成立的 a 的取值范围.

4. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=\sin 3x$；　　　(2) $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

5. 用“五点法”作下列函数在$[0,2\pi]$上的图像：

(1) $y=-2\sin x$；

(2) $y=2\cos x$.

6.求下列函数的最大值及取得最大值时 x 的集合：

(1) $y=1-3\sin x$；

(2) $y=\frac{2}{3}\cos x-5$.

7.当 x 取何值时，函数 $y=1-\frac{1}{2}\cos x$ 取得最大值和最小值？最大值和最小值各是什么？

第七节　反三角函数

一、主要内容

(1)反三角函数一般用“arc＋函数名”的形式表示.

(2)反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的性质：

①反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；

②$\sin\alpha=b,\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Leftrightarrow\arcsin b=\alpha,b\in[-1,1]$.

(3)反余弦函数 $y=\arccos x$ 的性质：

①反正弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$；

②$\cos\alpha=b,\alpha\in[0,\pi]\Leftrightarrow\arccos b=\alpha,b\in[-1,1]$.

(4)反正切函数 $y=\arctan x$ 的性质：

①反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；

②$\tan\alpha=b,\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\arctan b=\alpha,b\in\mathbf{R}$.

(5)反余切函数 $y=\mathrm{arccot}\,x$ 的性质：

①反余切函数 $y=\mathrm{arccot}\,x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,值域为$(0,\pi)$；

②$\cot\alpha=b,\alpha\in(0,\pi)\Leftrightarrow\mathrm{arccot}\,b=\alpha,b\in\mathbf{R}$.

二、巩固训练

1.求下列各式的值：

(1)$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$；　　　　(2)$\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$；

(3) $\arctan(\sqrt{3})$；

(4) $\operatorname{arccot}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$；

(5) $\arcsin\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$；

(6) $\arccos\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}\right)$；

(7) $\arctan\left(\tan\dfrac{11\pi}{6}\right)$；

(8) $\operatorname{arccot}\left(\cot\dfrac{\pi}{6}\right)$.

2.用反正弦函数表示下列各角：

(1)$-\frac{\pi}{6}$；　　(2)$\frac{\pi}{3}$.

3.用反余弦函数表示下列各角：

(1)$\frac{2\pi}{3}$；　　(2)$\frac{\pi}{4}$.

4.用反正切函数表示下列各角：

(1)$\frac{\pi}{4}$；　　(2)$\frac{\pi}{5}$.

5. 用反余切函数表示下列各角：

(1)$\frac{\pi}{2}$；　　　　(2)$\frac{\pi}{5}$.

6. 已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，求 α 的值.

7. 求函数 $y=\arcsin(5-2x)$的定义域和值域.

三、自我检测

1. 判断下列各式是否正确,并说明理由:

(1)$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$;

(2)$\arccos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$;

(3)$\cos(\arccos(\sqrt{2}))=\sqrt{2}$;

(4)$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$;

(5)$\arctan 1=\frac{\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$;

(6)$\operatorname{arccot}\sqrt{3}=\frac{5\pi}{6}$.

2.求下列各式的值：

(1) $\arcsin 0$；

(2) $\arccos 1$；

(3) $\arctan 1$；

(4) $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$；

(5) $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$；

(6) $\cos\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]$；

(7)$\tan\left(\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$；

(8)$\cot\left(\operatorname{arccot}\frac{1}{2}\right)$.

3.求下列函数的反函数：

(1)$\sin x=1, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；

(2)$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}, x\in[0,\pi]$；