第一章　集　　合

第一节　集　　合

一、集合的概念

日常生活中，我们所看到的、听到的、触摸到的、想到的各种各样的实物或一些抽象的符号都可以视作对象，由某些指定的对象集在一起所组成的整体就叫做**集合**，简称**集**. 组成集合的每个对象称为**元素**.

例如，把所有小于 10 的自然数

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

中的各个数都看成对象，所有这些对象汇集在一起就构成了一个集合，其中的每个数即为这个集合中的元素.

集合一般采用大写英文字母 A、B、C、…来表示，它们的元素一般采用小写英文字母 a、b、c、…来表示. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 **a 属于 A**，记作 $a \in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 **a 不属于 A**，记作 $a \notin A$.

一般地，我们把不含任何元素的集合叫做**空集**，记作 $\varnothing$. 例如，方程 $x-2=x-3$ 的解所组成的集合即为空集，因为这个集合不含任何元素.

关于集合的概念有如下说明：

(1)集合的元素具有确定性，即作为一个集合的元素，必须是确定的. 也就是说，给定一个集合，任何一个对象是不是这个集合的元素也就是确定的了.

(2)集合的元素具有互异性，即给定一个集合，则集合的元素一定是互不相同的.

(3)集合的元素具有无序性，即集合中元素间一般不考虑顺序.

例 1　下列语句能否确定一个集合？

(1)一切很大的数；

(2)方程 $x^2=4$ 的所有解；

(3)不等式 $x-5>0$ 的所有解.

解　(1)因为很大的数没有具体的标准，“一切很大的数”所指的对象是不确定的，所以不能构成集合.

(2)方程 $x^2=4$ 的解为 -2 和 2，是确定的对象，所以可以构成集合.

(3)解不等式 $x-5>0$ 可得 $x>5$，它们是确定的对象，所以可以构成集合.

根据集合所含有的元素个数可以将其分为有限集和无限集两类. 含有有限个元素的集合叫做**有限集**，含有无限个元素的集合叫做**无限集**. 例如，上述例 1 中的(2)所构成的集合即为有限集，(3)所构成的集合即为无限集.

在例1的(2)中，集合的元素是-2和2，它们都是方程$x^2=4$的解，像这样，方程的所有解组成的集合叫做这个方程的解集；同样，在例1的(3)中，由不等式的所有解所组成的集合叫做这个不等式的解集.

由数所组成的集合称作**数集**.我们用某些特定的大写英文字母表示常用的一些数集：

所有非负整数所组成的集合叫做**自然数集**，记作$\mathbf{N}$；

所有正整数所组成的集合叫做**正整数集**，记作$\mathbf{N}^*$；

所有整数组成的集合叫做**整数集**，记作$\mathbf{Z}$；

所有有理数组成的集合叫做**有理数集**，记作$\mathbf{Q}$；

所有实数组成的集合叫做**实数集**，记作$\mathbf{R}$.

二、集合的表示方法

如何表示一个集合呢？常用的表示方法有列举法和描述法两种.

1. 列举法

把集合的元素一一列举出来，元素中间用逗号隔开，写在花括号“{}”中用来表示集合，这种方法即为**列举法**.例如，由小于5的自然数所组成的集合可表示为

$$\{0,1,2,3,4\};$$

方程$x^2=4$的所有解组成的集合可表示为

$$\{-2,2\}.$$

当集合为无限集或元素很多的有限集时，可以在花括号内只写出几个元素，其他用省略号表示即可，但所写出的元素必须能让人明白省略号表示哪些元素.例如，自然数集$\mathbf{N}$为无限集，可表示为

$$\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

不大于100的全体自然数所组成的集合为有限集，可表示为

$$\{0,1,2,3,\cdots,100\}.$$

例2　用列举法表示下列集合：

(1)大于1小于10的所有偶数组成的集合；

(2)方程$x^2+x-6=0$的解集.

解　(1)大于1小于10的所有偶数有2、4、6、8，它们所组成的集合可表示为

$$\{2,4,6,8\}.$$

(2)解方程$x^2+x-6=0$得

$$x_1=-3,x_2=2,$$

所以该方程的解集为

$$\{-3,2\}.$$

2. 描述法

有的集合用列举法表示起来是很不方便的，如“由大于2的所有实数组成的集合”，大于2的实数有无穷多个，显然无法用列举法将该集合的元素一一列出，此时用描述法来表示该集合则比较方便.

把描述集合元素的特征性质或表示集合中元素的规律写在花括号内用来表示集合的方

法叫做**描述法**. 例如,上述"由大于 2 的所有实数组成的集合",可以看出该集合的元素都具有如下性质:都是实数,都大于 2. 因此,该集合可用描述法表示为

$$\{x \mid x>2, x\in \mathbf{R}\},$$

花括号内竖线左侧的 x 表示这个集合中的任意一个元素,元素 x 从实数集 $\mathbf{R}$ 中取值,竖线的右侧写出的是元素的特征性质.

如果从上下文可以明显看出集合的元素为实数,则 $x\in \mathbf{R}$ 也可以省略不写,如上述的集合可表示为

$$\{x \mid x>2\}.$$

例 3　用描述法表示下列集合:

(1)$\{-3,3\}$;

(2)大于 3 的全体偶数构成的集合;

(3)不等式 $10x+1\geqslant 0$ 的解集.

解　(1)该集合的一个特征性质可以描述为

绝对值等于 3 的实数,即 $|x|=3$,

所以这个集合可表示为

$$\{x \mid |x|=3\}.$$

(2)该集合的一个性质可描述为

$$x>3,\text{且 } x=2k, k\in \mathbf{N},$$

所以这个集合可表示为

$$\{x \mid x>3,\text{且 } x=2k, k\in \mathbf{N}\}.$$

(3)解不等式 $10x+1\geqslant 0$ 可得 $x\geqslant -\frac{1}{10}$,所以该不等式的解集为

$$\left\{x \mid x\geqslant -\frac{1}{10}\right\}.$$

用列举法表示集合可以明确地看到集合的每个元素,而用描述法表示集合可以很清晰地反映出集合元素的特征性质,因此在具体的应用中要根据实际情况灵活选用.

三、集合之间的关系

1. 子集

观察下列集合:

(1)$A=\{2,4,6\}$,$B=\{2,4,6,8\}$;

(2)$A=\{x \mid x\text{ 是长方形}\}$,$B=\{x \mid x\text{ 是平行四边形}\}$.

可以看出,上述集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 的元素.

一般地,如果集合 A 中的任意一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 就叫做集合 B 的**子集**,记作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A,$$

读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

由上述子集的定义可知,任意一个集合 A 都是它自身的子集,即 $A\subseteq A$.

规定:空集是任意一个集合的子集,即对于任意一个集合 A,都有 $\varnothing\subseteq A$.

如果集合 A 是集合 B 的子集，且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A，那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**，记作

$$A \subsetneqq B \text{ 或 } B \supsetneqq A,$$

读作"A 真包含于 B"或"B 真包含 A"，可用图 1-1 所示图形来直观地表示.

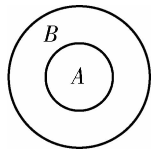


图 1-1

例 4　写出集合 $A=\{1,2,3\}$的所有子集和真子集.

分析　集合 A 中共有三个元素，要想一字不漏地写出其所有的子集，可按以下步骤来写：

(1)因为空集是所有集合的子集，所以首先写出$\varnothing$；

(2)写出由一个元素组成的子集，即$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$；

(3)写出由两个元素组成的子集，即$\{1,2\}$，$\{2,3\}$，$\{1,3\}$；

(4)写出由三个元素组成的子集，即$\{1,2,3\}$.

解　集合 A 的所有子集为

$$\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}.$$

在上述子集中除了集合 A 本身，即$\{1,2,3\}$，其余的全为集合 A 的真子集.

2. **集合的相等**

观察集合

$$A=\{1,2,3\}, B=\{x \mid 0<x<4, x \in \mathbf{N}\},$$

可以看出，集合 A 和集合 B 的元素完全相同，只是两个集合的表达方式不同.

一般地，如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，或者集合 B 的每一个元素都是集合 A 的元素，那么就说**集合 A 等于集合** B.

例 5　判断下列各组集合的关系：

(1)$A=\{2,3\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$；

(2)$M=\{-3,3\}$，$N=\{x \mid x^2-9=0\}$.

解　(1)$A \subsetneqq B$.

(2)由 $x^2-9=0$ 解得 $x_1=3$，$x_2=-3$，所以集合 N 用列举法表示为$\{-3,3\}$，则可看出这两个集合相等，即 $M=N$.

习题 1-1

1. 用符号"$\in$"或"$\notin$"填空：

(1)-3 ____ $\mathbf{N}$；　　(2)3.14 ____ $\mathbf{Q}$；　　(3)π ____ $\mathbf{Q}$；

(4)0.5 ____ $\mathbf{Z}$；　　(5)1.8 ____ $\mathbf{R}$；　　(6)-1 ____ $\mathbf{N}^*$.

2. 判断下列语句是否正确：

(1)由 1，2，4，2 构成一个集合，这个集合共有 4 个元素；

(2)方程 $x^2+1=0$ 的所有解组成的集合为空集.

3. 自然数集、整数集、有理数集、实数集通常用哪几个符号表示？它们分别是有限集还是无限集？

4. 用列举法表示下列集合：

(1)大于 0 小于 6 的整数的全体；

(2)自然数中 3 的公倍数的集合；

(3)方程 $2x-1=0$ 的解集；

(4)方程 $x^2+x-2=0$ 的解集.

5. 用描述法表示下列集合：

(1)自然数中所有偶数的集合；

(2)不等式 $5x+3<0$ 的解集.

6. 用适当的方法表示下列集合：

(1)绝对值等于 5 的全体实数组成的集合；

(2)所有正方形组成的集合；

(3)除以 3 余 1 的所有整数组成的集合；

(4)构成英文单词 mathematics(数学)的全部字母组成的集合.

7. 用适当的符号($\in$、$\notin$、$\subsetneqq$、$\supsetneqq$、$=$)填空：

(1)0 ____ $\varnothing$；　　(2)$\varnothing$ ____ $\{\varnothing\}$；

(3)0 ____ $\{1,2\}$；　　(4)$\{1,2\}$ ____ $\{1,2\}$；

(5)$\{a,c\}$ ____ $\{a,b,c,d\}$；　　(6)$\{x \mid 1<x<7, x\in\mathbf{N}\}$ ____ $\{4,6\}$.

8. 指出下列各组集合之间的关系：

(1)$A=\{x \mid x-1=0\}$，$B=\{1,2\}$；

(2)$M=\{x \mid x>1\}$，$N=\{x \mid x\geqslant 2\}$；

(3)$P=\{x \mid x$ 是等腰三角形$\}$，$Q=\{x \mid x$ 是等边三角形$\}$；

(4)集合 $A=\{x \mid x^2-3x-10=0\}$，$B=\{-2,5\}$.

9. 写出集合$\{a,b,c,d\}$的所有子集和真子集.

第二节　集合的运算

过去我们只对数或式子进行算术运算或代数运算，那么集合与集合之间可以进行运算吗？

由两个已知的集合按照某种指定的法则构造出一个新的集合即为集合的运算.

一、交集

观察集合：

$A=\{0,1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,2,3,6,7,8\}$，$C=\{1,2,3\}$，

可以看出，集合 C 的元素恰好是集合 A 与集合 B 的所有共同元素.

一般地，像上述那样，给定两个集合 A、B，由既属于 A 又属于 B 的所有共同元素构成的

集合叫做集合 A 与 B 的**交集**，记作

$$A \cap B,$$

读作“A 交 B”，可用图 1-2 所示的阴影部分来形象地表示.

例 1　已知 $A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{1,3,5,7\}$，求 $A \cap B$.

解　$A \cap B=\{1,3\}$，可用图 1-3 来表示.

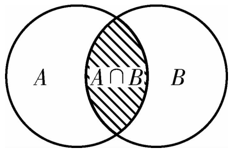


图 1-2

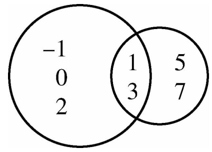


图 1-3

例 2　已知 $A=\{x \mid x$ 是等腰三角形$\}$，$B=\{x \mid x$ 是直角三角形$\}$，求 $A \cap B$.

解　$A \cap B=\{x \mid x$ 是等腰三角形$\} \cap \{x \mid x$ 是直角三角形$\}$

$=\{x \mid x$ 是等腰直角三角形$\}$.

由交集的定义可知，对于任意两个集合 A、B，都有

$$A \cap B=B \cap A;$$

$$A \cap A=A, A \cap \varnothing=\varnothing;$$

$$A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B.$$

练一练

求下列每组集合的交集：

(1) $A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6\}$；

(2) $P=\{1,3,5\}$，$Q=\{2,4,6\}$.

例 3　已知 $A=\{x \mid -2<x \leqslant 1\}$，$B=\{x \mid 0<x<4\}$，求 $A \cap B$.

分析　集合 A、B 是用描述法表示的集合，并且集合的元素没法一一列举出来，因此可以结合数轴来进行解题.

解　在数轴上表示集合 A、B，如图 1-4 所示.

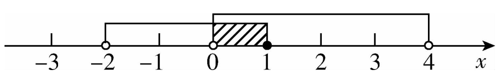


图 1-4

从图中易看出，阴影部分即为集合 A、B 的交集，即

$A \cap B=\{x \mid -2<x \leqslant 1\} \cap \{x \mid 0<x<4\}=\{x \mid 0<x \leqslant 1\}$.

例 4　已知 $A=\{(x,y) \mid 4x+y=6\}$，$B=\{(x,y) \mid x+y=3\}$，求 $A \cap B$.

分析　集合 A、B 的元素是有序实数对 (x,y)，A、B 的交集就是二元一次方程组 $\begin{cases}4x+y=6\\x+y=3\end{cases}$ 的解集.

解　解方程组$\begin{cases}4x+y=6\\x+y=3\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$所以

$$\begin{aligned}A\cap B&=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}\cap\{(x,y)\mid x+y=3\}\\&=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}4x+y=6\\x+y=3\end{cases}\right\}=\{(1,2)\}.\end{aligned}$$

二、并集

观察下面三个集合：

$M=\{-2,-1,0\}$，$N=\{1,2,3,4\}$，$P=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$，

可以看出，集合 P 是集合 M 与集合 N 的所有元素组成的.

一般地，像上述那样，对于两个给定的集合 A、B，由集合 A 和集合 B 的所有元素组成的集合叫做集合 A 和集合 B 的**并集**，记作

$$A\cup B,$$

读作"A 并 B".

例如，集合

$$A=\{-2,0,2\}\text{与 }B=\{0,3,5\}$$

的并集为

$$A\cup B=\{-2,0,2\}\cup\{0,3,5\}=\{-2,0,2,3,5\}.$$

由并集的定义可知，对于任意两个集合 A、B，都有

$$A\cup B=B\cup A;$$
$$A\cup A=A,A\cup\varnothing=A;$$
$$A\subseteq A\cup B,B\subseteq A\cup B.$$

集合 A 和集合 B 的并集可以用图 1-5 中阴影部分来表示.

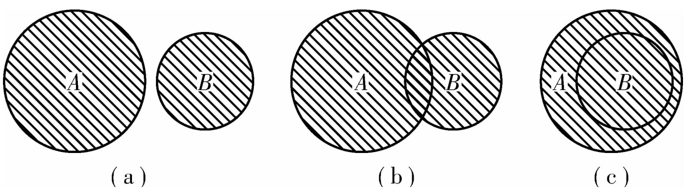


图 1-5

例 5　已知 $A=\{3,4,5,6\}$，$B=\{5,6,7,8\}$，求 $A\cup B$.

解　$A\cup B=\{3,4,5,6\}\cup\{5,6,7,8\}=\{3,4,5,6,7,8\}$.

例 6　已知 $A=\{x\mid -1<x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid 0<x\leqslant 3\}$，求 $A\cup B$.

分析　本题结合数轴进行解题比较直观.

解　将集合 A 和集合 B 在数轴上表示出来，如图 1-6 所示：

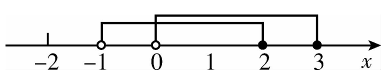


图 1-6

则可看出

$$
\begin{aligned}
A\cup B&=\{x\mid -1<x\leqslant 2\}\cup\{x\mid 0<x\leqslant 3\}\\
&=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}.
\end{aligned}
$$

三、补集

在研究集合与集合的关系时，如果所要研究的集合都是某一给定集合的子集，则称这个给定的集合为**全集**，一般用 U 表示. 例如，在研究数集时，常常把实数集 **R** 作为全集.

如果给定某一集合 A 是全集 U 的一个子集，则 U 中不属于 A 的所有元素组成的集合叫做 A 在全集 U 中的**补集**，记作

$$\complement_U A,$$

读作"A 在 U 中的补集"，即

$$\complement_U A=\{x\mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}.$$

用图形表示集合时，通常用矩形区域表示全集. 全集 U 与它的任意一个真子集 A 之间的关系可用图 1-7 来表示，其中阴影部分表示 A 在 U 中的补集.

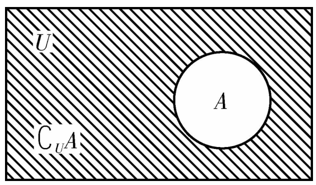


图 1-7

由补集的定义可知，对于任意集合 A，都有

$$A\cup\complement_U A=U,\ A\cap\complement_U A=\varnothing,\ \complement_U(\complement_U A)=A.$$

例 7　已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，集合 $A=\{3,4,5,6\}$，求 $\complement_U A$，$A\cap\complement_U A$，$A\cup\complement_U A$.

解　$\complement_U A=\{1,2,7\}$，$A\cap\complement_U A=\varnothing$，$A\cup\complement_U A=U$.

例 8　已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x>1\}$，求 $\complement_U A$.

解　$\complement_U A=\{x\mid x\leqslant 1\}$.

习题 1-2

1. 已知集合 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，$C=\{4,5,6,7\}$，求：

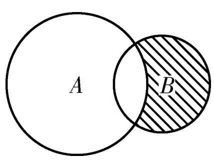
(1) $A\cap B$，$B\cap C$，$A\cap C$；(2) $A\cup B$，$B\cup C$，$A\cup C$.

2. 如果集合 M、N 分别满足下列等式，试写出集合 M、N 之间的关系.

(1) $M\cap N=M$；(2) $M\cup N=M$.

3. 已知全集 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,5,7\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，$\complement_U A\cap\complement_U B$，$\complement_U A\cup\complement_U B$.

4. 用集合语言表示下图中的阴影部分：



第 4 题图

第三节　充 要 条 件

观察下列推论是否成立：

(a)$x=2$，则 $x^2=4$；(b)$xy=0$，则 $x=0$.

显然，由(a)中的"$x=2$"则一定能推断出"$x^2=4$"；由(b)中的"$xy=0$"则不能推断出"$x=0$"，因为有可能 $y=0$.

像上述那样，已知条件 p 和结论 q：

(1)如果由条件 p 成立可推出结论 q 成立，则说条件 p 是结论 q 的**充分条件**，记作"$p\Rightarrow q$". 上述(a)中，条件 p：$x=2$，结论 q：$x^2=4$，即"$x=2$"是"$x^2=4$"的充分条件.

(2)如果由结论 q 成立可推出条件 p 成立，则说条件 p 是结论 q 的**必要条件**，记作"$q\Rightarrow p$(或 $p\Leftarrow q$)". 上述(b)中，条件 p：$xy=0$，结论 q：$x=0$，即"$xy=0$"是"$x=0$"的必要条件.

如果 $p\Rightarrow q$，且 $p\Leftarrow q$，那么 p 是 q 的充分且必要条件，简称**充要条件**，记作"$p\Leftrightarrow q$".

例 1　指出下列各组中的条件 p 是结论 q 的什么条件：

(1)p：$x=3$，q：$(x-1)(x-3)=0$；

(2)p：$x>1$，q：$x>3$；

(3)p：$x=y$，q：$(x-y)^2=0$.

解　(1)由条件 $x=3$ 成立能够推出结论 $(x-1)(x-3)=0$ 成立，因此 p 是 q 的充分条件；而由结论 $(x-1)(x-3)=0$ 成立则不能够推出条件 $x=3$ 成立，因为当 $x=1$ 时，$(x-1)(x-3)=0$ 也成立，所以 p 不是 q 的必要条件.

(2)由条件 $x>1$ 成立不能推出结论 $x>3$ 成立，如 $x=2$ 时，$2>1$ 但 $2<3$，因此 p 不是 q 的充分条件；而由结论 $x>3$ 成立则能够推出条件 $x>1$ 成立，所以 p 是 q 的必要条件.

(3)由条件 $x=y$ 成立能够推出结论 $(x-y)^2=0$ 成立，而由结论 $(x-y)^2=0$ 成立也能够推出条件 $x=y$ 成立，因此 p 是 q 的充要条件.

习题 1-3

1. 用符号"$\Rightarrow$"、"$\Leftarrow$"、"$\Leftrightarrow$"填空：

(1)$x=5$ ____ $|x|=5$；

(2)$x^2>0$ ____ $x>0$；

(3)$a=b$ ____ $a+c=b+c$；

(4)$x=2$ ____ $x^2-3x+2=0$；

(5)x 是 3 的倍数____ x 是 6 的倍数；

(6)$x\in\mathbf{Z}$ ____ $x\in\mathbf{N}$.

2. 指出下列各组中条件 p 是结论 q 的什么条件：

(1)p：$x>0$，$y>0$，q：$xy>0$；

(2)p：$x=y$，q：$|x|=|y|$；

(3)p：$\triangle ABC$ 是等腰三角形，q：$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形；

(4)p：$A\subseteq B$，q：$A\cup B=B$.

第四节　不等式与区间

一、实数大小的比较

如果没有任何度量工具，怎么才能知道高矮差不多的两个同学的身高之间的不等关系呢？我们一般采用的比较方法是让这两个同学背靠背地站在同一高度的地面上，这时两个同学谁高谁低一看便知. 在数学中，我们比较两个实数的大小，只要考察它们的差即可.

对于任意两个实数 a、b，有

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b;$$
$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b;$$
$$a-b=0 \Leftrightarrow a=b.$$

例 1　比较$\frac{1}{2}$与$\frac{2}{3}$的大小.

解　$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{3-4}{6}=-\frac{1}{6}$，因为$-\frac{1}{6}<0$，所以$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$.

二、不等式的基本性质

在初中我们已经学习了不等式的三条基本性质，本小节将进一步阐述并证明不等式的基本性质.

性质 1　如果 $a>b$，且 $b>c$，则 $a>c$.

证明

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0,$$
$$b>c \Leftrightarrow b-c>0,$$

因此，根据两正数之和为正数得

$$(a-b)+(b-c)>0,$$

即

$$a-c>0,$$

所以

$$a>c.$$

性质 1 所描述的不等式的性质称为不等式的**传递性**.

性质 2　如果 $a>b$，则 $a+c>b+c$.

证明　因为 $a>b$，所以 $a-b>0$.

又因为

$$(a+c)-(b+c)=a-b>0,$$

所以

$$a+c>b+c.$$

性质 2 表明，不等式两边都加上(或都减去)同一个数，不等号的方向不变，因此将性质 2 称为不等式的**加法性质**.

性质 3　如果 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$；如果 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$.

性质 3 表明，不等式的两边都乘以(或都除以)同一个正数，不等号的方向不变；不等式的两边都乘以(或都除以)同一个负数，不等号的方向改变，因此将性质 3 称为不等式的**乘法性质**.

例 2　用“$>$”或“$<$”填空，并指出应用了不等式的哪条性质.

(1)已知 $a<b$，则 $a+3$ ____ $b+3$；

(2)已知 $a>b$，则 $2a$ ____ $2b$；

(3)已知 $a>b$，则 $-2a$ ____ $-2b$.

解　(1)$a+3<b+3$，应用了不等式的性质 2.

(2)$2a>2b$，应用了不等式的性质 3.

(3)$-2a<-2b$，应用了不等式的性质 3.

例 3　证明下列不等式：

(1)已知 $a>b$，$c>d$，求证 $a+c>b+d$；

(2)已知 $a>b>0$，$c>d>0$，求证 $ac>bd$.

证明　(1)因为 $a>b$，所以

$$a+c>b+c,$$

又因为 $c>d$，所以

$$b+c>b+d.$$

根据不等式的传递性可得

$$a+c>b+d.$$

(2)因为 $a>b$，$c>0$，所以

$$ac>bc,$$

又因为 $c>d$，$b>0$，所以

$$bc>bd.$$

因此，根据不等式的传递性可得

$$ac>bd.$$

例 4　某工人计划在 15 天里加工 408 个零件，最初三天中每天加工 24 个，问以后每天至少要加工多少个零件，才能在规定的时间内完成任务？

解　设该工人在以后每天至少加工 x 个零件才能在规定的时间内完成任务，则根据题意有

$$24\times3+(15-3)x\geqslant408,$$

解得

$$x\geqslant28,$$

即该工人以后每天至少加工 28 个零件才能在规定的时间内完成任务.

三、区　间

区间是数集的一种表示形式，其表示形式与集合的表示形式相同.

1. 有限区间

我们知道，实数集是与数轴上的点集一一对应的，如集合$\{x \mid 1<x<3\}$可以在数轴上表示如图 1-8 所示.

由数轴上两点之间的所有实数所组成的集合叫做**区间**，这两个点叫做**区间端点**.

不含端点的区间叫做**开区间**，图 1-8 中，集合$\{x \mid 1<x<3\}$即表示的是开区间，记作$(1,3)$，其中 1 表示区间的左端点，3 表示区间的右端点. 在数轴上表示区间时，开区间的两个端

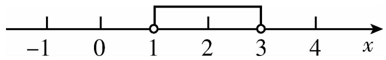


图 1-8

点用空心点表示(见图 1-8).

含有两个端点的区间叫做**闭区间**,如图 1-9 中集合$\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$表示的区间即为闭区间,记作$[1,3]$. 在数轴上表示闭区间时,其两个端点用实心点表示.

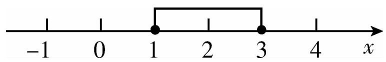


图 1-9

只含左端点的区间叫做**右半开区间**,如集合$\{x \mid 1\leqslant x<3\}$表示的区间即为右半开区间,记作$[1,3)$;只含右端点的区间叫做**左半开区间**,如集合$\{x \mid 1<x\leqslant 3\}$表示的区间即为左半开区间,记作$(1,3]$.

例 5　已知集合 $A=(0,3)$,$B=[1,5)$,求 $A\cup B$,$A\cap B$.

解　集合 A、B 用数轴表示如图 1-10 所示,由图可看出

$$A\cup B=(0,5),A\cap B=[1,3).$$

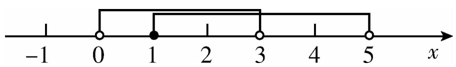


图 1-10

练一练

已知集合 $A=[-1,3)$,$B=(0,5)$,求 $A\cup B$,$A\cap B$.

2. 无限区间

集合$\{x \mid x>3\}$可在数轴上表示如图 1-11 所示.

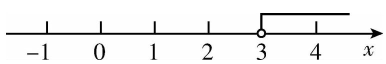


图 1-11

由图可以看出,集合$\{x \mid x>3\}$表示的区间的左端点为 3,没有右端点,这时可将其记作$(3,+\infty)$,其中“$+\infty$”读作“正无穷大”,表示右端点可以没有具体的数,可以任意大. 同样,集合$\{x \mid x<3\}$表示的区间可记作$(-\infty,3)$,其中“$-\infty$”读作“负无穷大”.

集合$\{x \mid x\geqslant 3\}$表示的区间为$[3,+\infty)$,是右半开区间;集合$\{x \mid x\leqslant 3\}$表示的区间为$(-\infty,3]$,是左半开区间.

由上可以看出,一般可以用区间来表示的集合用区间表示会更方便.

例 6　已知全集为实数集 $\mathbf{R}$,集合 $A=(-\infty,4)$,$B=[1,6)$,求:

(1)$A\cup B$,$A\cap B$;(2)$\complement_A$,$\complement_B$;(3)$B\cap \complement_A$.

解　集合 A、B 在数轴上表示如图 1-12 所示.

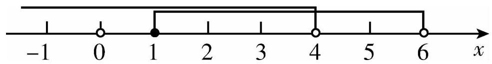


图 1-12

由图可看出：

(1)$A\cup B=(-\infty,6)$,$A\cap B=[1,4)$.

(2)$\complement_A=[4,+\infty)$,$\complement_B=(-\infty,1)\cup[6,+\infty)$.

(3)$B\cap\complement_A=[4,6)$.

习题 1-4

1. 用“$>$”或“$<$”填空：

(1)$\dfrac{5}{6}$____$\dfrac{3}{4}$；

(2)$-\dfrac{3}{4}$____$-\dfrac{2}{3}$；

(3)已知 $a<b$,则$-a$ ____ $-b$；

(4)已知 $a<b$,$c>0$,则 $d+ac$ ____ $d+bc$.

2. 已知李红比王丽大 2 岁,又知李红和王丽年龄之和大于 30 且小于 33,求李红的年龄.

3. 已知 $a>b$,$c>d$,能否判断出 ac 与 bd 的大小呢？试举例说明.

4. 用适当的区间表示下面的集合,并将其填入空格中：

(1)$\{x\mid 3<x<9\}$可以写成________；

(2)$\{x\mid 1\leqslant x<5\}$可以写成________；

(3)$\{x\mid x\leqslant -1\}$可以写成________；

(4)$\{x\mid x>5\}$可以写成________.

5. 已知集合 $A=[-1,2)$,$B=(0,3]$,求 $A\cup B$,$A\cap B$.

6. 已知集合 $A=(-\infty,3)$,$B=(1,+\infty)$,求$A\cup B$,$A\cap B$.

7. 已知全集为实数集 $\mathbf{R}$,集合 $A=(-\infty,-1]$,$B=[-5,+\infty)$,求：

(1)$A\cup B$,$A\cap B$；

(2)$\complement_A$,$\complement_B$；

(3)$A\cap\complement_B$, $B\cap\complement_A$.

第五节　不等式的解法

一、一元一次不等式

观察下面两个不等式：

(1)$x^2-2x+1>0$；

(2)$x^2-3x+10\leqslant 0$.

可以看出,这两个不等式的共同特点是:

(1)都只含一个未知数 x;

(2)未知数 x 的最高次数都是 2.

一般地,像上述那样,含有一个未知数,并且未知数的最高次数是二次的不等式,叫做**一元二次不等式**,它的一般形式为

$$ax^2+bx+c>(\geqslant)0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<(\leqslant)0,$$

其中,a、b、c 为常数,且 $a\neq 0$.

上述一元二次不等式的一般形式的左边恰好是自变量为 x 的一元二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的解析式.下面我们将通过实例来研究一元二次不等式的解法,以及它与相应的函数、方程之间的关系.

例如,求不等式

$$x^2-x-2>0 \text{ 与 } x^2-x-2<0$$

的解集.

首先,解方程 $x^2-x-2=0$ 得 $x_1=-1$,$x_2=2$.

然后,画出函数 $y=x^2-x-2$ 图像,如图 1-13 所示.

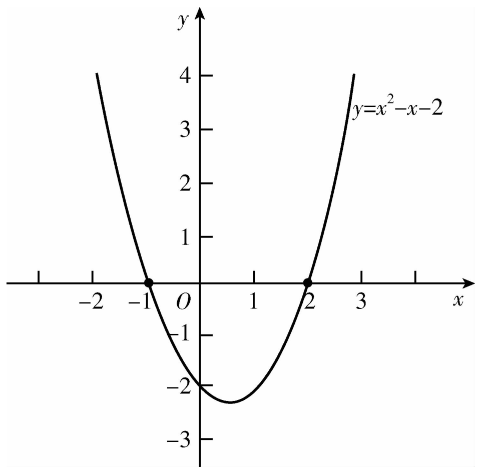


图 1-13

由图 1-13 可看出:

(1)函数 $y=x^2-x-2$ 的图像与 x 轴的交点为$(-1,0)$和$(2,0)$,这两点的横坐标恰好是方程 $x^2-x-2=0$ 的两个解;

(2)当 $x=-1$ 或 $x=2$ 时,函数图像与 x 轴相交,$y=0$;

(3)当 $-1<x<2$ 时,函数图像位于 x 轴下方,$y<0$;

(4)当 $x<-1$ 或 $x>2$ 时,函数图像位于 x 轴上方,$y>0$.

因此,不等式 $x^2-x-2>0$(即 $y>0$)的解集是

$$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty);$$

不等式 $x^2-x-2<0$(即 $y<0$)的解集是

$$(-1,2).$$

由上可知，可以利用一元二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像来解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$，一般可分为如下三种情况：

（ⅰ）当方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根 x_1、$x_2(x_1<x_2)$，此时函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像与 x 轴有两个交点，即 $(x_1,0)$、$(x_2,0)$，如图 1-14(a)所示，则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$；不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 (x_1,x_2).

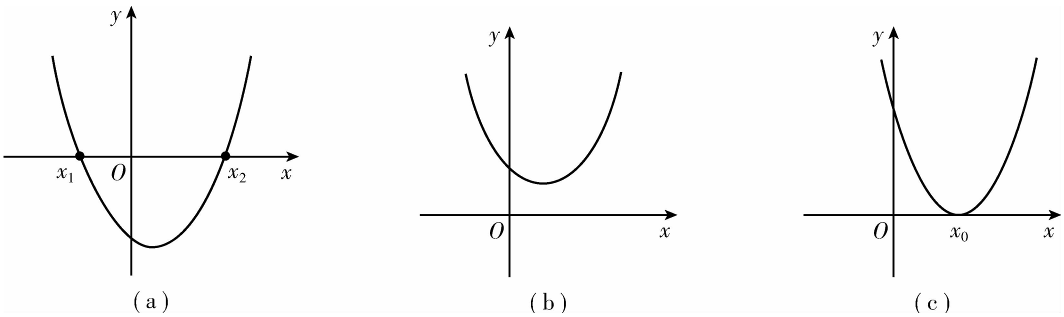


图 1-14

（ⅱ）当方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根，此时函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像与 x 轴没有交点，如图 1-14(b)所示，则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为实数集 $\mathbf{R}$，不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\varnothing$.

（ⅲ）当方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根 x_0，此时函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像与 x 轴只有一个交点，即 $(x_0,0)$，如图 1-14(c)所示，则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-\infty,x_0)\cup(x_0,+\infty)$，不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $\varnothing$.

例 1　解下列一元二次不等式：

(1) $x^2+x-2>0$；　　(2) $x^2+x-2<0$.

解　方程 $x^2+x-2=0$ 的判别式为

$$\Delta=1^2-4\times1\times(-2)=9>0,$$

解方程得

$$x_1=-2, x_2=1.$$

(1)不等式 $x^2+x-2>0$ 的解集为 $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$；

(2)不等式 $x^2+x-2<0$ 的解集为 $(-2,1)$.

例 2　解一元二次不等式 $4x^2-4x+1>0$.

解　方程 $4x^2-4x+1=0$ 的判别式为

$$\Delta=(-4)^2-4\times4\times1=0,$$

解方程得

$$x=\frac{1}{2},$$

所以不等式 $4x^2-4x+1>0$ 的解集为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

例 3　解一元二次不等式 $-x^2-3x-5\geqslant0$.

解　根据不等式的性质,将原不等式两边同乘以-1,整理得

$$x^2+3x+5\leqslant 0.$$

方程$x^2+3x+5=0$的判别式为

$$\Delta=3^2-4\times1\times5=-11<0,$$

所以方程$x^2+3x+5=0$没有实数根,则不等式$x^2+3x+5\leqslant 0$的解集为$\varnothing$.

二、含绝对值的不等式

在初中我们已经学过,对任意实数x,都有$|x|\geqslant 0$,且有

$$|x|=\begin{cases}x, x>0,\\0, x=0,\\-x, x<0.\end{cases}$$

$|x|$的几何意义是在数轴上表示实数x的点到原点的距离.

绝对值符号内含有未知数的不等式叫做**含绝对值的不等式**.

1. $|x|>a$ 或 $|x|<a(a>0)$型不等式

根据绝对值的几何意义,不等式$|x|>1$表示的是数轴上到原点的距离大于1的所有点的集合,在数轴上表示如图1-15(a)所示;$|x|<1$表示的是数轴上到原点的距离小于1的所有点的集合,在数轴上表示如图1-15(b)所示.

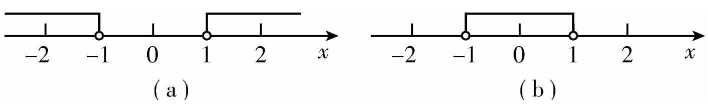


图 1-15

由图1-15(a)可看出,不等式$|x|>1$的解集为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$;由图1-15(b)可看出,不等式$|x|<1$的解集为$(-1,1)$.

一般地,不等式$|x|>a(a>0)$的解集为$(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$,不等式$|x|<a(a>0)$的解集为$(-a,a)$.

例 4　解下列不等式:

(1)$2|x|>1$;　　　　(2)$5|x|-2\leqslant 0$.

解　(1)由$2|x|>1$可得

$$|x|>\frac{1}{2},$$

则原不等式的解集为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(2)由$5|x|-2\leqslant 0$可得

$$|x|\leqslant\frac{2}{5},$$

则原不等式的解集为$\left[-\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right]$.

2. $|ax+b|>c$ 或 $|ax+b|<c(c>0)$型不等式

对于 $|ax+b|>c$ 或 $|ax+b|<c(c>0)$型不等式可以转化为 $|x|>a$ 或 $|x|<a(a>0)$型来求解. 例如,解不等式 $|2x+1|<1$,可先设 $2x+1=m$,则不等式 $|2x+1|<1$ 可化为

$$|m|<1,$$

可解得

$$-1<m<1,$$

即

$$-1<2x+1<1,$$

根据不等式的性质可得

$$-1<x<0,$$

则原不等式 $|2x+1|<1$ 的解集为$(-1,0)$.

像上述那样,将 $|ax+b|>c$ 或 $|ax+b|<c(c>0)$型不等式转化为 $|x|>a$ 或 $|x|<a(a>0)$型不等式来求解的方法称为“变量替换法”或“换元法”,即用新的简单的变量(如上述的“m”)来替换原来的变量(如上述的“$2x+1$”),从而将复杂的问题简单化. 在实际的运算过程中,变量替换的过程可以省略不写.

例 5　解不等式 $|2-x|>5$.

解　由原不等式可得

$$2-x>5 \text{ 或 } 2-x<-5,$$

解得

$$x<-3 \text{ 或 } x>7,$$

所以不等式 $|2-x|>5$ 的解集为$(-\infty,-3)\cup(7,+\infty)$.

例 6　解不等式 $|3x+5|\leqslant 7$.

解　由原不等式可得

$$-7\leqslant 3x+5\leqslant 7,$$

解得

$$-4\leqslant x\leqslant \frac{2}{3},$$

所以不等式 $|3x+5|\leqslant 7$ 的解集为$\left[-4,\frac{2}{3}\right]$.

三、分式不等式

分母中含有未知数的不等式称为**分式不等式**.

下面举例说明形如$\frac{ax+b}{cx+d}>0$ 或 $\frac{ax+b}{cx+d}<0(c\neq 0)$的分式不等式的解法.

例 7　解下列分式不等式:

(1)$\frac{x+2}{x-3}>0$;　　　　(2) $\frac{2x-1}{5-3x}>1$.

解　(1)由商的符号法则,原不等式$\frac{x+2}{x-3}>0$ 可化为两个不等式组:

(Ⅰ)$\begin{cases}x+2>0,\\x-3>0,\end{cases}$　或是(Ⅱ)$\begin{cases}x+2<0,\\x-3<0.\end{cases}$

解不等式组(Ⅰ)得 $x>3$;解不等式组(Ⅱ)得 $x<-2$.

所以原不等式的解集为$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$.

(2)原不等式移项,得$\frac{2x-1}{5-3x}-1>0$,整理,得$\frac{5x-6}{5-3x}>0$.

将不等式两边同乘以-1,得

$$\frac{5x-6}{3x-5}<0$$

由商的符号法则,上述不等式可化为两个不等式组:

$$(\mathrm{I})\begin{cases}5x-6>0,\\3x-5<0,\end{cases}\quad \text{或是}(\mathrm{II})\begin{cases}5x-6<0,\\3x-5>0.\end{cases}$$

解不等式组(Ⅰ),得$\frac{6}{5}<x<\frac{5}{3}$;解不等式组(Ⅱ),无解.

所以原不等式的解集为$\left(\frac{6}{5},\frac{5}{3}\right)$.

习题 1-5

1.完成下面的表格:

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$的根	有两相异实根 x_1、$x_2(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 x_0	无实根
一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图像			
一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集			
一元二次不等式 $ax^2+bx+c\geqslant0$ $(a>0)$的解集			
一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集			
一元二次不等式 $ax^2+bx+c\leqslant0$ $(a>0)$的解集			

2.解下列一元二次不等式:

(1)$x^2+3x-4>0$;(2)$3x^2-x-4<0$;(3)$x^2-2x-3\leqslant0$;

(4)$-2x^2+5x+3\leqslant0$;(5)$4x^2-4x+1\geqslant0$;(6)$x^2-2x+7\leqslant0$.

3.已知关于x的一元二次方程$x^2-(m+2)x+4=0$有两个不相等的正实数根,求实数m的取值范围.

4. 解下列不等式：

(1)$1-|x|\leqslant 0$；(2)$3|x|-2\geqslant 0$.

5. 解下列不等式：

(1) $|3x|<7$；(2) $|3-x|\geqslant 2$；

(3) $|3-5x|<8$；(4)$\left|\frac{2}{3}x+2\right|\geqslant 5$；

(5)$\left|\frac{1}{2}+2x\right|\leqslant 5$；(6) $|2x+6|+1<3$.

6. 解下列不等式：

(1)$\frac{x-6}{x+1}>0$；(2)$\frac{x-2}{1+x}-6>0$；(3)$\frac{3-x}{2x+4}\leqslant 2$；(4)$\frac{1}{2-x}>1-\frac{x}{2-x}$.

复习题1

A　组

1. 用适当的符号($\in$、$\notin$、$\subsetneqq$、$\supsetneqq$、$=$)填空：

(1)a ____ $\{a,b,c,d\}$；

(2)$\{a\}$ ____ $\{a,b,c,d\}$；

(3)0 ____ $\{a,b,c,d\}$；

(4)$\{1\}$ ____ $\{x \mid x^2=1\}$；

(5)$\{-5,5\}$ ____ $\{x \mid x^2-25=0\}$；

(6)$\{x \mid x>1\}$ ____ $\mathbf{R}$.

2. 填空题：

(1)集合$\{x \mid -1<x<3\}$可用区间表示为________，集合$\{x \mid x\geqslant 5\}$可用区间表示为________.

(2)设全集为实数集$\mathbf{R}$，集合$A=(-2,5]$，$B=(0,7)$，则$A\cap B=$__________，$A\cup B=$__________，$\complement A=$__________，$\complement B=$__________.

(3)一元二次不等式$x^2+3x+2\geqslant 0$的解集为________.

(4)一元二次不等式$x^2+4x+4<0$的解集为________.

(5)不等式$|5x|<1$的解集为________.

(6)不等式$|2x-1|>3$的解集为________.

3. 选择题：

(1)设全集为$\mathbf{Z}$，$A=\{$奇数$\}$，$B=\{$偶数$\}$，则(　　).

A. $A\subseteq B$　　B. $A=B$　　C. $A\supseteq B$　　D. $A\cup B=\mathbf{Z}$

(2)集合$\{2,4,6\}$的子集有____个，其中含有元素2的子集有____个.(　　)

A. 6，2　　B. 7，3　　C. 8，4　　D. 9，4

(3)集合$A=\{x \mid 1<x\leqslant 7\}$，$B=\{x \mid 3<x<9\}$，则$A\cup B=$(　　).

A. $\{x \mid 1<x\leqslant 7\}$　　B. $\{x \mid 3<x\leqslant 7\}$

C. $\{x \mid 3<x<9\}$　　D. $\{x \mid 1<x<9\}$

(4)$M\cap P=M$ 是 $M\subseteq P$ 的(　　)条件.

A. 充分　　B. 必要　　C. 充要　　D. 以上都不正确

(5)下列各项中正确的一项是(　　).

A. $a^2>0\Rightarrow a>0$　　B. $a=0\Leftrightarrow ab=0$

C. $a=5\Rightarrow |a|=5$　　D. $ac^2>bc^2\Leftarrow a>b$

(6)设全集为实数集 $\mathbf{R}$,集合 $A=[-5,0)$,$B=(-2,7)$,则 $A\cap B=$(　　).

A. $[-5,-2)$　　B. $(0,-2)$　　C. $(-2,0)$　　D. $[-2,0]$

(7)不等式 $x^2-3x<0$ 的解集为(　　).

A. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　B. $(-\infty,0]\cup(0,+\infty)$

C. $(0,3)$　　D. $[0,3]$

(8)不等式 $x^2-x+1>0$ 的解集为(　　).

A. $\varnothing$　　B. $\mathbf{R}$

C. $(-1,1)$　　D. 以上选项都不正确

(9)不等式 $|2x|\geqslant 1$ 的解集为(　　).

A. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

4. 用适当的方法表示下列集合:

(1)绝对值不大于 5 的所有实数;

(2)小于 6 的所有正整数组成的集合;

(3)方程组$\begin{cases}x-y=3\\x+y=5\end{cases}$的解集.

5. 已知集合 $A=\{-2,-1,0\}$,$B=\{0,1,2\}$,写出 $A\cup B$ 的所有子集和真子集.

6. 设全集 $U=\{-7,-5,-3,-1,0,1,3,5,7\}$,集合 $A=\{-5,-3,-1,0\}$,$B=\{0,1,3\}$,求:(1)$A\cap B$,$A\cup B$;(2)$\complement_U A$,$\complement_U B$.

7. 解下列不等式:

(1)$x^2+x-6<0$;　　(2)$x^2-x+\frac{1}{4}>0$;

(3)$x^2+2x-8\geqslant 0$;　　(4)$-2x^2+x+3<0$.

8. 解下列不等式:

(1) $|x-8|<0$;　　(2)$\left|-x+\frac{1}{3}\right|>0$;

(3) $|3x-2|\geqslant 7$;　　(4) $|-2x-1|+5<10$.

B　组

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$,$A=\{x\mid x\leqslant 7\}$,$B=\{x\mid 0<x\leqslant 5\}$,求:

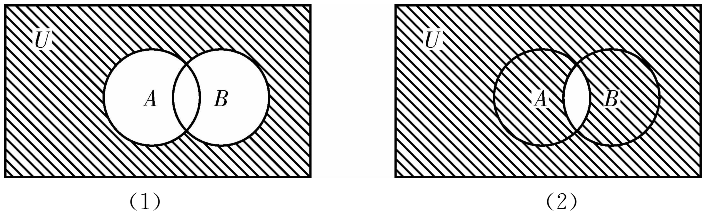
(1)$A\cap B$,$A\cup B$;

(2)$\complement_U A$,$\complement_U B$;

(3) $\complement_U A\cap\complement_U B$, $\complement_U A\cup\complement_U B$;

(4) $\complement_U(A\cap B)$, $\complement_U(A\cup B)$.

2. 下图中的全集为 U, A、B 都是 U 的子集，试用集合语言表示图中的阴影部分.



第 2 题图

3. 已知全集为实数集 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid |3x-2|>4\}$，$B=\{x\mid x^2-2x-8<0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

4. 已知关于 x 的方程 $2x^2-4(m-1)x+m^2+7=0$ 有两个不相等的实数根，求满足该方程的实数 m 的取值范围.

阅读与欣赏

维恩与维恩图

著名教育家苏霍姆林斯基说过“直观是认识的途径，是照亮认识途径的光辉”，数学中的直观往往有助于人们对抽象概念的理解.“集合”是一种抽象的概念，用图形来表示集合则可以有助于大家更直观地理解一些集合问题.

1880 年，英国数学家维恩在《论命题和推理的图表化和机械化表现》一文中首次采用固定位置的交叉环形式再加上阴影来表示逻辑问题(如下图 1 所示)，这种图形即为维恩图. 这一表示方法，不仅让逻辑学家无比激动——以致于 19 世纪后期、整个 20 世纪直到今天，还有许许多多的逻辑学家都对此潜心钻研，在大量逻辑学著作中，维恩图占据着十分重要的位置，而且维恩图还被应用于数学学科中，尤其是被应用于集合论当中.

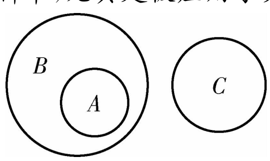


图 1

维恩图既可以表示一个独立的集合，也可以表示集合与集合之间的相互关系，在本章的运用中已经有所体现. 用维恩图解一些有关集合的问题常常可以得到意料之外的效果. 例如，判断：所有勤奋的学生都爱学习，有些爱学习的学生视力不好，那么有些勤奋的学生视力不好. 我们可以令：

A＝{爱学习的学生}，

B＝{勤奋的学生}，

C＝{视力不好的学生}，

上述判断中A、B、C之间的关系有三种可能，用维恩图表示如图2中的(a)、(b)、(c)所示：

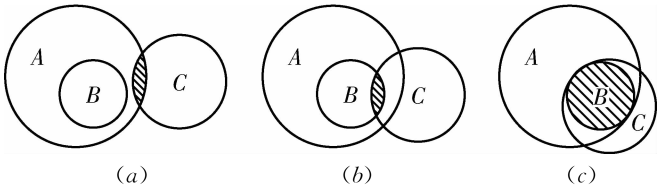


图2

从图中可以很直观地看出，如果A、B、C之间的关系如图2(a)中的情形，则上述判断中的结论“那么有些勤奋的学生视力不好”是不正确的，因为“B=\{勤奋的学生\}”与“C=\{视力不好的学生\}”没有重叠交叉的部分.

利用维恩图可以帮助我们形象而又简捷地解决问题，因此，同学们要逐步地形成利用维恩图解题的意识，提高自己解决问题的能力.

第二章　函　　数

第一节　函数的概念与性质

一、函数的概念

在初中，我们已经学习了变量与函数的概念. 在一个变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果给定了一个 x 值，就有唯一的一个 y 值与其对应，那么我们称 y 是 x 的函数，其中 x 是自变量，y 是因变量.

例如，一辆汽车以 60 千米/小时的速度匀速行驶，则在 t 小时里汽车行驶的路程为

$$s=60t,$$

这里的时间 t 为自变量，路程 s 为因变量，时间 t 在某个范围内变化，路程 s 也相应地在某个范围内变化，路程 s 是时间 t 的函数.

用变量的观点来描述函数，可以形象地描述事物的变化规律，但有一定的局限性. 先看下面的问题：

问题一　$y=1(x\in\mathbf{R})$是一个函数吗？

问题二　函数 $y=x$ 与函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$是同一个函数吗？

初中学过的函数概念很难回答这些问题，于是，我们从新的角度给出函数的定义：

设集合 D 是一个非空集合，如果按照某个对应法则 f，对于 D 中的任意一个数 x，都有唯一确定的数 y 与之对应，则这种对应关系叫做集合 D 上的一个**函数**，记作

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 x 叫做**自变量**，自变量 x 的取值范围(集合 D)叫做函数 $f(x)$的**定义域**，所有函数值构成的集合$\{y \mid y=f(x),x\in D\}$叫做函数 $f(x)$的**值域**.

当 $x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$对应的值 y_0 叫做函数在点 x_0 处的**函数值**，记作 $y_0=f(x_0)$.

该定义使用了集合语言确切地刻画了函数，更具有一般性. 从中我们还可以看出，函数的值域是由函数的定义域和对应法则所确定的，因此一个函数的确定只需要两个要素：定义域和对应法则.

在实际问题中，函数的定义域是根据所研究的问题的实际意义确定的；对于用解析式表示的函数，如果不考虑问题的实际意义，则函数的定义域就是能够使函数式有意义的所有实数的集合.

例 1　确定下列函数的定义域：

(1)$f(x)=\sqrt{x-5}$；　　　　(2)$f(x)=\dfrac{1}{x+3}$.

解　(1)要使函数有意义,必须使 $x-5\geqslant 0$,所以函数的定义域为 $x\geqslant 5$,即

$$[5,+\infty).$$

(2)当 $x+3\neq 0$,即 $x\neq -3$ 时,函数有意义,所以函数的定义域为

$$(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty).$$

例 2　已知 $f(x)=3x^2-5x+2$,求 $f(3)$, $f(-\sqrt{2})$, $f(a+1)$.

解

$$f(3)=3\times 3^2-5\times 3+2=14.$$

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{2})&=3\times(-\sqrt{2})^2-5\times(-\sqrt{2})+2\\ &=8+5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a+1)&=3\times(a+1)^2-5\times(a+1)+2\\ &=3a^2+a. \end{aligned}$$

例 3　下列哪个函数与函数 $y=x$ 是同一个函数:

(1) $y=(\sqrt{x})^2$;　　(2) $y=\sqrt[3]{x^3}$;

(3) $y=\sqrt{x^2}$;　　(4) $y=\dfrac{x^2}{x}$.

解　(1)函数 $y=(\sqrt{x})^2=x(x\geqslant 0)$ 与 $y=x(x\in\mathbf{R})$ 虽然对应法则相同,但是定义域不同,所以不是同一个函数.

(2)函数 $y=\sqrt[3]{x^3}=x(x\in\mathbf{R})$ 与 $y=x(x\in\mathbf{R})$ 定义域、对应法则都相同,所以是同一个函数.

(3)函数 $y=\sqrt{x^2}=|x|\ (x\in\mathbf{R})$ 与 $y=x(x\in\mathbf{R})$ 定义域相同,但是对应法则不同,所以不是同一个函数.

(4)函数 $y=\dfrac{x^2}{x}=x(x\neq 0)$ 与 $y=x(x\in\mathbf{R})$ 虽然对应法则相同,但是定义域不同,所以不是同一个函数.

二、函数的表示方法

1. 函数的三种表示方法

上一节我们已经明确了函数的概念,那么怎样表示一个函数呢?例如,商店里面所售练习本的单价为 0.8 元,买练习本的本数 x(本)与付款款额 y(元)的函数关系如何表示?

首先,我们做一个表格(表 2-1):

表 2-1

x/本	1	2	3	4	5	…
y/元	0.8	1.6	2.4	3.2	4.0	…

列出表格可以很直观地反映出练习本的本数 x 与付款款额 y 之间的关系,像这种通过列出自变量与对应函数值的表格来表示函数关系的方法叫做**列表法**.

但这种表示方法一般不完整,如要买 80 本练习本,则所需付的款额表中就没有,那么还可以用什么方式表示呢?

我们可以用一个数学式子 $y=0.8x$ 来表示.像这种在函数 $y=f(x)(x\in D)$ 中,$f(x)$ 是

用代数式或解析式$(0.8x)$来表达的方法叫做**解析法**. 这种方法严谨、完整,但不够直观.

另外,描绘函数的图像,也可以直观形象地表示一个函数,如图 2-1 所示. 像这种利用图像表示函数的方法叫做**图像法**.

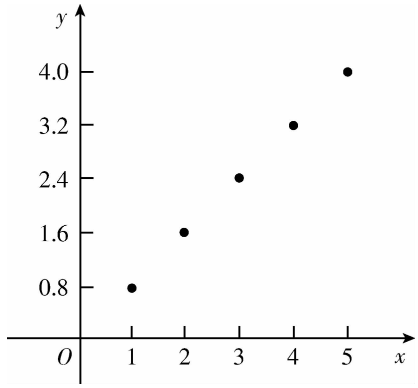


图 2-1

例 4　某工厂的一名普通工人每天的基本工资是 20 元,每加工完成一个合格零件日收入增加 5 元,一名工人的日收入 y 是他每天完成的合格零件数 x 的函数,当一名工人每天完成的合格零件数在 5 件以内(含 5 件)时,请用三种方法表示这个函数.

解　(1)按照题意,分别计算出一名工人每天完成合格零件数 x 在 1～5 件时的日薪 y(元),列成表格,因此函数用列表法表示如表 2-2 所示:

表 2-2

x/件	1	2	3	4	5
y/元	25	30	35	40	45

(2)根据题意,函数的解析式为 $y=20+5x$,因此函数的解析法表示为

$$y=5x+20, x\in\{1,2,3,4,5\}.$$

(3)以表 2-2 中的 x 值为横坐标,对应的 y 值为纵坐标,在直角坐标系中画出各个相应的点. 因此,函数的图像法表示如图 2-2 所示.

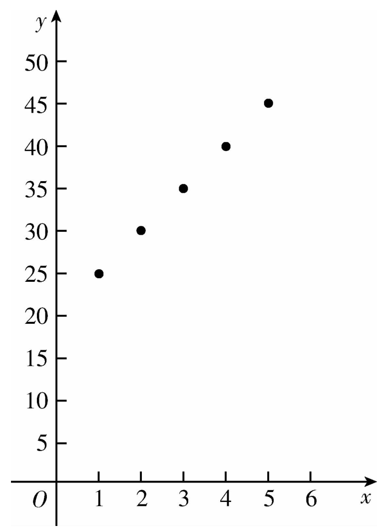


图 2-2

例 5　作函数 $y=2\sqrt{x}+1$ 的图像.

解　用描点法作函数 $y=2\sqrt{x}+1$ 的图像.

函数的定义域为$[0,+\infty)$，所以应从零和正数中适当地选取若干个 x 的值，并计算出相应的 y 值，列表(见表 2-3)：

表 2-3

x	0	1	2	3	4	…
y	1	3	3.88	4.46	5	…

以表中各组对应值作为点的坐标，在直角坐标系中画出各个相应的点，并以光滑的曲线把它们连结起来就得到函数 $y=2\sqrt{x}+1$ 的图像，如图 2-3 所示.

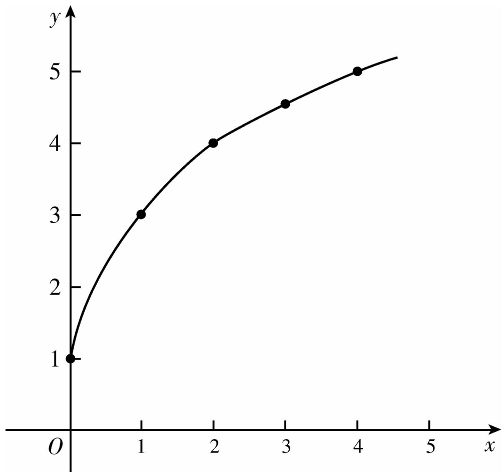


图 2-3

2. 分段函数

例 6　国内跨省市之间邮寄信函，每封信函的质量 m(克)和对应的邮资 M(元)如表 2-4 所示：

表 2-4

m/克	$0<m\leqslant20$	$20<m\leqslant40$	$40<m\leqslant60$	$60<m\leqslant80$	$80<m\leqslant100$
M/元	0.80	1.60	2.40	3.20	4.00

请用解析法和图像法表示该函数.

解　(1)函数的解析式为

$$M(m)=\begin{cases}0.80, 0<m\leqslant20,\\1.60, 20<m\leqslant40,\\2.40, 40<m\leqslant60,\\3.20, 60<m\leqslant80,\\4.00, 80<m\leqslant100.\end{cases}$$

(2)函数的图像如图 2-4 所示.

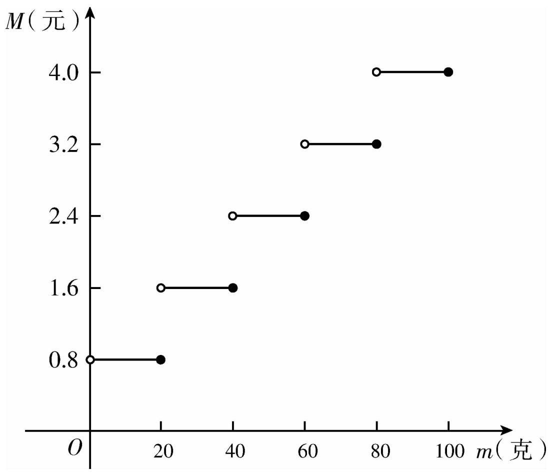


图 2-4

这种在定义域的不同部分有不同对应法则的函数叫做**分段函数**.

例 7　已知函数 $f(x)=\begin{cases} x-2, 0\leqslant x<2, \\ 3x, 2\leqslant x<4. \end{cases}$

(1)写出函数的定义域;(2)求 $f(0)$,$f(1)$,$f(2)$,$f(3)$;(3)作出函数图像.

解　(1)该函数的定义域为$[0,2)\cup[2,4)$,即$[0,4)$.

(2)因为 $0,1\in[0,2)$,这时 $f(x)=x-2$,所以

$$f(0)=0-2=-2,$$
$$f(1)=1-2=-1.$$

因为 $2,3\in[2,4)$,这时 $f(x)=3x$,所以

$$f(2)=3\times2=6,$$
$$f(3)=3\times3=9.$$

(3)在同一直角坐标系中,用描点法在$[0,2)$内作出$f(x)=x-2$ 的图像,在$[2,4)$内作 $f(x)=3x$ 的图像,如图2-5所示.

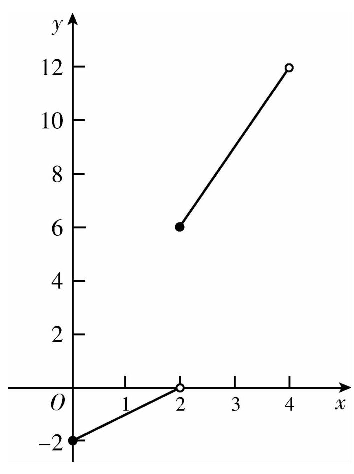


图 2-5

三、函数的性质

1. 函数的单调性

图 2-6 为某地区 2008 年元旦这一天 24 小时内的气温变化图.

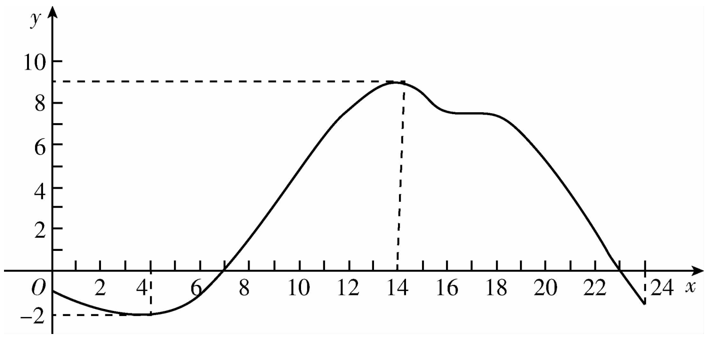


图 2-6

从上图中可以看到,在 4 点到 14 点这个时间段内,气温是逐步升高的;在 0 点到 4 点和 14 点到 24 点的时间段内,气温是逐步下降的.

像这种,函数图像的“上升”、“下降”反映了函数的一个基本性质——单调性.

一般地,设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subseteq D$. 如果取区间 I 中的任意两点 x_1、x_2,则

(1)当 $x_1<x_2$ 时,都有$f(x_1)<f(x_2)$成立,那么函数$y=f(x)$叫做区间 I 上的**增函数**(或**单调递增函数**),区间 I 叫做函数 $y=f(x)$的**增区间**. 观察图 2-7,函数 $y=f(x)$是区间(a,b)上的增函数,区间(a,b)是该函数的增区间.

(2)当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$成立,那么函数 $y=f(x)$叫做区间 I 上的**减函数**(或**单调递减函数**),区间 I 叫做函数 $y=f(x)$的**减区间**. 观察图 2-8,函数 $y=f(x)$是区间(a,b)上的减函数,区间(a,b)是该函数的减区间.

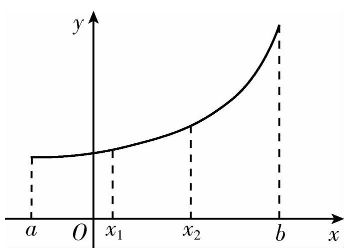


图 2-7

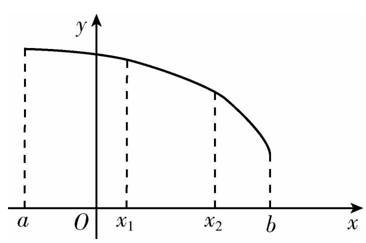


图 2-8

在某一区间上单调递增或单调递减的函数叫做在这个区间上的**单调函数**,该区间叫做这个函数的**单调区间**.

例 8　图 2-9 是函数 $y=f(x)$的图像,其定义域为区间$[-8,12]$,根据图像写出函数的单调性.

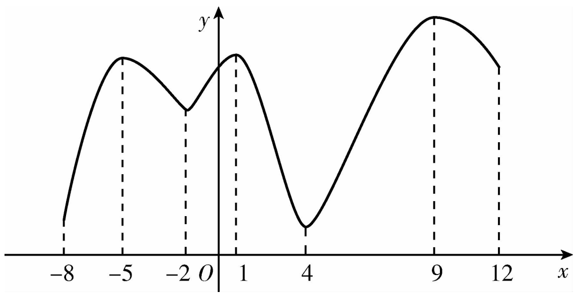


图 2-9

解　由图像可看出：自变量 x 在$(-8,-5)$内，函数是单调递增的，因此函数在区间$(-8,-5)$上是增函数；自变量 x 在$(-5,-2)$内，函数是单调递减的，因此在区间$(-5,-2)$上是减函数. 类似地可看出，函数在区间$(-2,1)$和$(4,9)$上是增函数，在区间$(1,4)$和$(9,12)$上是减函数.

例 9　讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上的单调性.

解　在$(0,+\infty)$内任意取 x_1、x_2，设 $x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}.$$

由于 $0<x_1<x_2$，故 $x_1x_2>0$，$x_1-x_2<0$，于是

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0,$$

即 $f(x_1)>f(x_2)$. 因此 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上是减函数.

2. 函数的奇偶性

在初中平面几何中，我们学习了关于轴对称图形和中心对称图形的知识. 知道点 $M(a,b)$关于 y 轴的对称点为$M'(-a,b)$，关于原点的对称点为 $M''(-a,-b)$.

引例一　已知函数 $y=x^2$，则

$$f(-2)=f(2)=4,$$
$$f(-1)=f(1)=1,$$
$$f(-x)=(-x)^2=f(x).$$

可以看出，函数 $y=x^2$ 的图像上的任意点 $M(x,f(x))$关于 y 轴的对称点 $N(-x,f(x))$也在 $y=x^2$ 的图像上，所以函数 $y=x^2$ 的图像关于 y 轴对称，如图 2-10 所示.

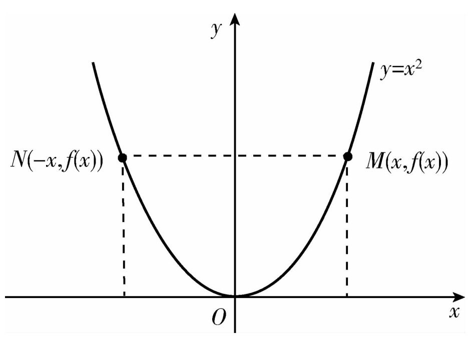


图 2-10

引例二　已知函数 $y=x^3$，有

$$f(-2)=-8,\quad f(2)=8,$$
$$f(-1)=-1,\quad f(1)=1,$$
$$f(-x)=(-x)^3=-f(x).$$

可以看出，函数 $y=x^3$ 图像上的任意点 $M(x,f(x))$ 关于原点的对称点 $N(-x,-f(x))$ 也在 $y=x^3$ 图像上，所以函数 $y=x^3$ 图像关于原点对称，如图 2-11 所示.

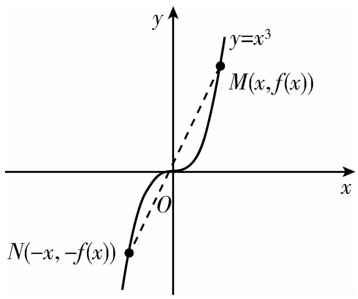


图 2-11

上述两个例子中的函数所表现出的性质即为函数的奇偶性，其定义如下：

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果对 D 内的任意 x，都有 $-x\in D$，且

$$f(-x)=f(x),$$

则这个函数叫做**偶函数**，其图像关于 y 轴对称. 上述引例一中的函数 $y=x^2$ 即为偶函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果对 D 内的任意 x，都有 $-x\in D$，且

$$f(-x)=-f(x),$$

则这个函数叫做**奇函数**，其图像关于原点对称. 上述引例二中的函数 $y=x^3$ 即为奇函数.

例 10　判断下列函数是否具有奇偶性：

(1) $f(x)=x+x^7$；(2) $f(x)=x^8-2$；(3) $f(x)=x^2$，$x\in[2,5]$；(4) $f(x)=x-1$.

解　(1) 函数 $f(x)=x+x^7$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$-x\in\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=(-x)+(-x)^7=-f(x),$$

因此函数 $f(x)=x+x^7$ 是奇函数.

(2) 函数 $f(x)=x^8-2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$-x\in\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=(-x)^8-2=f(x),$$

所以函数 $f(x)=x^8-2$ 是偶函数.

(3) 函数 $f(x)=x^2$ 的定义域 $[2,5]$ 不关于原点对称，如存在 $4\in[2,5]$，而 $-4\notin[2,5]$，所以函数 $f(x)=x^2$，$x\in[2,5]$ 既不是偶函数也不是奇函数.

(4) 函数 $f(x)=x-1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$-x\in\mathbf{R}$，但是 $f(-x)\neq f(x)$，$f(-x)\neq -f(x)$，所以函数 $f(x)=x-1$ 既不是偶函数也不是奇函数.

四、函数的实际应用举例

本节通过举例来说明函数在实际中的应用.

例 11　弹簧挂上物体后会伸长，测得某一弹簧的长度 y(cm) 与悬挂物体的质量 x(kg) 有下面一组对应值(见表 2-5)：

表 2-5

x/kg	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y/cm	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5	16

根据上述对应值回答：

(1)弹簧不挂物体时长度是多少？

(2)当所挂的物体质量每增加 1 kg 时，弹簧怎样变化？

(3)求弹簧总长度 y(cm)与所挂物体质量 x(kg)的函数解析式.

解　(1)根据对应值表，当 $x=0$ 时，$y=12$，所以弹簧不挂物体时长度为 12 cm.

(2)观察对应值表，当所挂物体的质量每增加 1 kg 时，弹簧伸长 0.5 cm.

(3)根据(1)、(2)得，函数的解析式为

$$y=0.5x+12.$$

例 12　因特网的费用由两部分组成：电话费和上网费. 某地区电话费为 0.16 元/3 分钟，上网费每月不超过 60 小时，以 4 元/小时计算，超过 60 小时部分，以 8 元/小时计算. 试将每月因特网的费用表示为上网时间(小时)的函数.

解　设上网 x 小时的费用为 $f(x)$元.

当 $0<x\leqslant 60$ 时，$f(x)=0.16\times 20x+4x=7.2x$；

当 $x>60$ 时，$f(x)=0.16\times 20x+4\times 60+(x-60)\times 8=11.2x-240$.

所以函数的解析式为

$$f(x)=\begin{cases}7.2x, 0<x\leqslant 60,\\ 11.2x-240, x>60.\end{cases}$$

例 13　某质点在 30 s 内运动速度 v (cm/s)是时间 t(s)的函数，它的图像如图 2-12 所示.

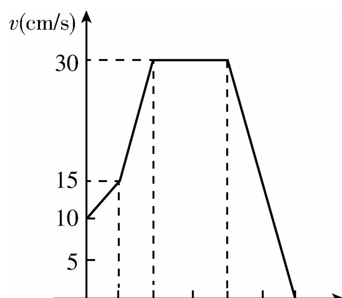


图 2-12

(1)用解析法表示出这个函数；(2)求出 9 s 时质点的速度.

解　(1)函数的解析式为

$$v(t)=\begin{cases}t+10, 0\leqslant t<5,\\ 3t, 5\leqslant t<10,\\ 30, 10\leqslant t<20,\\ -3t+90, 20\leqslant t\leqslant 30.\end{cases}$$

(2)因为 $9\in[5,10)$，所以 $v(9)=3\times 9=27$(cm/s).

习题 2-1

1.求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=2x-5$；(2) $f(x)=\dfrac{1}{2x-5}$；(3) $f(x)=\sqrt{x-1}$；(4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

2.已知函数 $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x+2}$,求：

(1) $f(-3)$，$f(\dfrac{2}{3})$；(2)当 $a>0$ 时，$f(a)$，$f(a-1)$的值.

3.判断下列两组中的函数是否相同,并说明理由.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$；(2) $f(x)=x+1$，$g(t)=t+1$.

4.作函数 $f(x)=2,x\in\mathbf{R}$ 的图像,并求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(4)$的值.

5.作函数 $y=-\dfrac{1}{x}$的图像.

6.如果一辆汽车匀速行驶,2 h 行驶 110 km,这辆汽车行驶的路程 s 是时间 t 的函数,请用解析法和图像法表示这个函数.

7.设函数

$$f(x)=\begin{cases}2x, x<0,\\ x^2, x\geqslant 0.\end{cases}$$

(1)求函数的定义域；

(2)求 $f(-2)$,$f(0)$,$f(1)$；

(3)作出函数的图像.

8. 画出下列函数的图像,根据图像说出它们的单调区间：

(1) $f(x)=-x^2$；　　　(2) $f(x)=x^2+2$.

9. 判断函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(-\infty,0)$上的单调性并证明你的结论.

10.判断下列函数是否具有奇偶性：

(1) $f(x)=2$；　　　(2) $f(x)=-2x^3$；

(3) $f(x)=x^3+33$；　　　(4) $f(x)=x(x^2-4)$；

(5) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-2}$；　　　(6) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+2}$,$x\in[-4,2]$.

11.某汽车油箱中能盛油 80 升,汽车每行驶 40 千米耗油 6 升.求加满油后,油箱中剩余油量 y(升)与汽车行驶路程 x(千米)之间的函数解析式.

12.学生甲每小时走 3 千米,出发 1.5 小时后,学生乙以每小时 4.5 千米的速度追赶甲,设乙行走的时间为 t 小时.写出甲、乙两学生走的路程 s_1、s_2 与时间 t 的函数解析式.

13.大气温度 y(℃)随着离开地面的高度 x (km)增大而降低,到上空 11 km 为止,大约每上升 1 km,气温降低 6℃,而在更高的上空气温却几乎没变(设地面温度为 22℃).求：

(1) y 与 x 的函数解析式；

(2) $x=3.5$ km 以及 $x=12$ km 处的气温.

第二节　反　函　数

一、反函数的定义

函数 $y=f(x)$ 反映了 y 是怎样随 x 变化而变化的，但是变量间的关系往往是相互制约的，y 的变化也常会引起 x 的变化.

例如，圆的半径 r 与面积 y 的关系为

$$y=\pi r^2(r>0)$$

其中 r 为自变量，y 为 r 的函数. 定义域 D 为 $(0,+\infty)$，值域 M 为 $(0,+\infty)$.

如果已知圆面积 y，求半径 r，就必须用 y 来表示 r，由 $y=\pi r^2$ 得

$$r=\sqrt{\frac{y}{\pi}}$$

由上式可以看出，对于每一个 $y\in M$，存在唯一确定的 $r\in D$ 与之对应. 根据函数的定义，$r=\sqrt{\frac{y}{\pi}}$ 也是 y 的函数，它的定义域为 M，值域为 D. 这时称函数 $r=\sqrt{\frac{y}{\pi}}$ 为函数 $y=\pi r^2$ 的反函数，而称 $y=\pi r^2$ 为函数 $r=\sqrt{\frac{y}{\pi}}$ 的原函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中每一个元素 y 都可由关系式 $y=f(x)$ 唯一确定出元素 x，则得到一个定义在 M 上的新函数，称它为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y),y\in M$$

对反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**原函数**.

通常我们用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，故我们常将 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in M$. 显然，反函数的定义域等于原函数的值域，反函数的值域等于原函数的定义域，且 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

由反函数的定义可得，求反函数的步骤如下：

(1)从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$；

(2)交换字母 x 与 y 的位置，并注意到反函数的定义域为原函数的值域.

例 1　求下列函数的反函数：

(1) $y=5x-2$；　　　　(2) $y=\sqrt{x+3}-1$.

解　(1)先从 $y=5x-2$ 解出 x，得

$$x=\frac{1}{5}(y+2),$$

再交换 x 与 y 的位置，得所求的反函数为

$$y=\frac{1}{5}(x+2),x\in(-\infty,+\infty).$$

(2)从 $y=\sqrt{x+3}-1$ 解出 x，得

$$x=y^2+2y-2,$$

再交换 x 与 y 的位置,得所求的反函数为

$$y=x^2+2x-2, x\in[-1,+\infty)$$

注意 不是每个函数在其定义域内都有反函数,只有当从函数 $y=f(x)$的解析式中单值地能解出 x 来(称为反对应关系是单值的),函数 $y=f(x)$才有反函数.

例如,函数 $y=x^2$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,由表达式解得 $x=\pm\sqrt{y}$,说明从这个函数解出的 x 不是单值的,所以函数 $y=x^2$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内没有反函数.

二、互为反函数的函数图像间的关系

先看下面的例子:

例 2 求函数 $y=2x-2$ 的反函数,并在同一平面直角坐标系中作出它们的图像.

解 从 $y=2x-2$ 解出 x,得 $x=\dfrac{1}{2}y+1$,从而得所求的反函数为 $y=\dfrac{1}{2}x+1$.

在同一平面直角坐标系中作出 $y=2x-2$ 与 $y=\dfrac{1}{2}x+1$ 的图像(如图 2-13 所示),可以看出,$y=2x-2$ 与 $y=\dfrac{1}{2}x+1$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

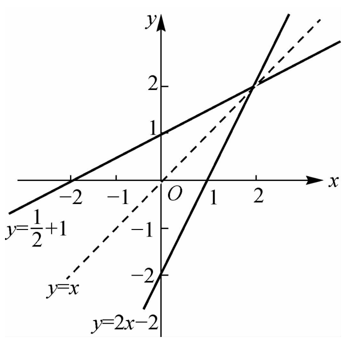


图 2-13

一般地,有如下结论:

函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

我们可以利用上述互为反函数的函数图像间的对称性,由函数 $y=f(x)$的图像直接作出反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像.

例 3 求函数 $y=x^3$ 的反函数,并由函数 $y=x^3$ 的图像作出它的反函数图像.

解 由函数 $y=x^3$ 解出 x,得 $x=\sqrt[3]{y}$,从而得反函数为 $y=\sqrt[3]{x}$.

因为函数 $y=x^3$ 与其反函数 $y=\sqrt[3]{x}$的图像关于直线 $y=x$ 对称。所以先画出 $y=x^3$ 的图像,再画出直线 $y=x$,根据其对称性可画出 $y=\sqrt[3]{x}$的图像如图 2-14 所示.

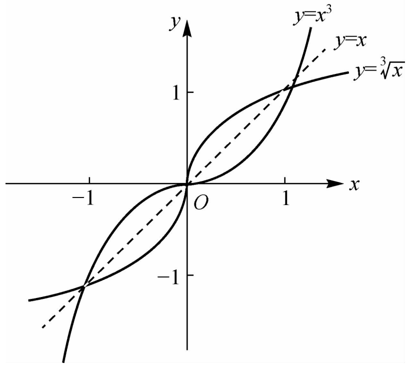


图 2-14

习题 2-2

1. 下列函数是否有反函数？如果有，求出其反函数，并写出定义域：

(1) $y=4-3x$；　　　　(2) $y=x^2, x\in[0,+\infty)$；

(3) $y=x^2+2x+1$；　　　　(4) $y=\dfrac{3x+1}{2x-5}$.

2. 求下列函数的反函数，并在同一平面坐标系中作出它们的图像.

(1) $y=5-4x$；　　　　(2) $y=\dfrac{2}{x}$；

(3) $y=(x-1)^2, x\in[1,+\infty)$.

第三节　实数指数幂

一、有理数指数幂

在初中我们学习了整数指数幂，知道当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}},$$

并且规定当 $a\neq0$ 时，

$$a^0=1, a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

在初中我们还学习过平方根和立方根的概念. 如果 $x^2=a(a\geqslant0)$，那么 x 叫做 a 的平方根，如 $(\pm3)^2=9$，则 ±3 就是 9 的平方根；如果 $x^3=a$，那么 x 叫做 a 的立方根，如 $(-3)^3=-27$，则 -3 就是 -27 的立方根.

一般地，如果有

$$x^n=a(a\in\mathbf{R}, n>1, n\in\mathbf{N}^*),$$

则 x 叫做 a 的 n 次**方根**.

当 n 是奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数，都表示为

$$\sqrt[n]{a}\text{（}n\text{ 为奇数）}.$$

例如，$\sqrt[5]{32}=2$，$\sqrt[3]{-27}=-3$.

当 n 是偶数时，正数的 n 次方根有两个，它们互为相反数，分别表示为

$$\sqrt[n]{a},-\sqrt[n]{a}\text{（}a>0,n\text{ 为偶数）}.$$

例如，81 的 4 次方根分别为 $\sqrt[4]{81}=3$，$-\sqrt[4]{81}=-3$.

正数 a 的正 n 次方根叫做 a 的 n 次**算术根**. 当 $\sqrt[n]{a}$ 有意义的时候，$\sqrt[n]{a}$ 叫做**根式**，n 叫做**根指数**，a 叫做**被开方数**.

现在将整数指数幂的概念进行推广. 为避免讨论，如不特别说明，我们约定底数 $a>0$. 于是，正分数指数幂定义为

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\text{（}a>0,m、n\in\mathbf{N}^*,n>1\text{）；}$$

负分数指数幂的意义与负整数指数幂的意义相同，定义为

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\text{（}a>0,m、n\in\mathbf{N}^*,n>1\text{）}.$$

至此，我们已经把整数指数幂推广到有理数指数幂.

例 1　将下列有理指数幂表示为根式的形式：

（1）$a^{\frac{3}{4}}$；　　　　（2）$x^{-\frac{3}{5}}$.

解　（1）由于 $m=3$，$n=4$，于是 $a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}$.

（2）由于 $m=3$，$n=5$，于是 $x^{-\frac{3}{5}}=\dfrac{1}{x^{\frac{3}{5}}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$.

例 2　将下列根式表示为有理数指数幂的形式：

（1）$\sqrt[3]{a^5}$；　　　　（2）$\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$.

解　（1）由于 $m=5$，$n=3$，于是 $\sqrt[3]{a^5}=a^{\frac{5}{3}}$.

（2）由于 $m=2$，$n=3$，于是 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}=\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}}=a^{-\frac{2}{3}}$.

我们知道整数指数幂的运算法则，该法则对于有理数指数幂也同样适用，即对任意有理数 α、β，有

（1）$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{(\alpha+\beta)}$，

（2）$(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$，

（3）$(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}$，

其中 $a>0$，$b>0$.

二、实数指数幂及其运算法则

有理指数幂还可以推广到实数指数幂. 一般地，当 $a>0$，α 为任意实数时，实数指数幂 a^{α} 都是有意义的.

可以证明，对任意实数 α、β，上述运算法则仍然成立.

例 3　计算下列各式：

(1)$27^{\frac{2}{3}}$；　　(2)$4^{-\frac{1}{2}}$；　　(3)$\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt[8]{2}}$.

解　(1)$27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^{3\cdot\frac{2}{3}}=3^2=9$.

(2)$4^{-\frac{1}{2}}=(2^2)^{-\frac{1}{2}}=2^{2\cdot(-\frac{1}{2})}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$.

(3)$\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt[8]{2}}=\dfrac{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{8}}}=2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{-\frac{1}{8}}=2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}=2^{\frac{13}{8}}$.

例 4　化简下列各式：

(1)$(p^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{3}{8}})^8$；

(2)$(-xy^{\frac{1}{3}})\cdot(2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}})\div(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{5}{3}})$；

(3)$\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a}}\div\sqrt[3]{a}$.

解　(1)$(p^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{3}{8}})^8=(p^{\frac{1}{4}})^8\cdot(q^{-\frac{3}{8}})^8=p^2\cdot q^{-3}=\dfrac{p^2}{q^3}$.

(2)$(-xy^{\frac{1}{3}})\cdot(2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}})\div(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{5}{3}})$

$=(-xy^{\frac{1}{3}})\cdot(2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}})\cdot x^{-\frac{1}{3}}\cdot y^{-\frac{5}{3}}$

$=-2x^{1+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}}$

$=-2x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{5}{6}}$.

(3)$\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a}}\div\sqrt[3]{a}=(a^{-1}b^2)^{\frac{1}{3}}\div a^{\frac{1}{3}}$

$=(a^{-1})^{\frac{1}{3}}\cdot(b^2)^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}$

$=a^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}$

$=a^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$

$=a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$.

三、幂函数举例

注意观察我们已经学习过的函数

$$y=x,y=x^2,y=\frac{1}{x},$$

可将其变为

$$y=x=x^1,y=\frac{1}{x}=x^{-1},$$

于是可发现这些函数的表达式有着共同的特征：幂的底数是自变量，指数是常数，即这三个函数都可以写成 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$的形式.

一般地，形如

$$y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$$

的函数叫做**幂函数**,其中 α 为常数.

下面我们通过举例来简单认识一下这类函数.

例 5　指出下列函数的定义域,并作出它们的图像:

(1) $y=x$;　　(2) $y=x^2$;

(3) $y=x^3$;　　(4) $y=x^{\frac{1}{2}}$;

(5) $y=x^{-1}$;　　(6) $y=x^{-2}$.

解　(1)函数 $y=x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$;

(2)函数 $y=x^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$;

(3)函数 $y=x^3$ 的定义域为 $\mathbf{R}$;

(4)函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$;

(5)函数 $y=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

(6)函数 $y=x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

接下来采用描点法作这 6 个函数的图像.分别在其定义域中取一些值,如表 2-6～表 2-9 所示:

表 2-6

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=x$	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=x^2$	…	4	1	0	1	4	…
$y=x^3$	…	-8	-1	0	1	8	…

表 2-7

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9	…
$y=x^{\frac{1}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	…

表 2-8

x	…	-3	-2	-1	1	2	3	…
$y=x^{-1}$	…	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	…

表 2-9

x	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	…
$y=x^{-2}$	…	$\frac{1}{4}$	1	4	4	1	$\frac{1}{4}$	…

它们的图像如图 2-15 所示.

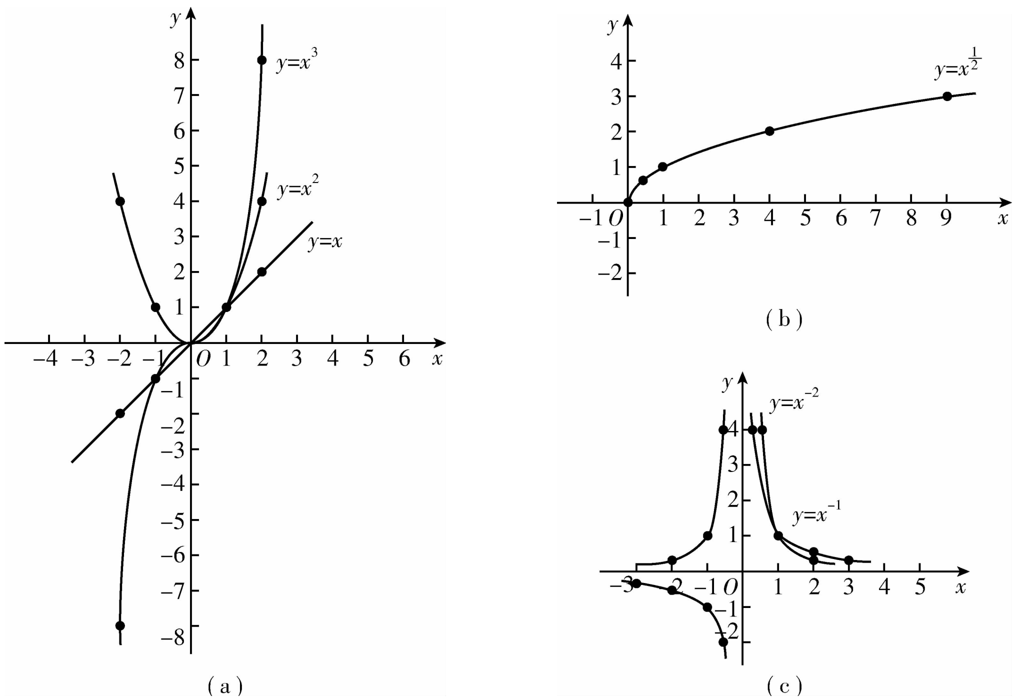


图 2-15

习题 2-3

1. 将下列有理数指数幂表示为根式的形式：

(1)$x^{\frac{4}{7}}$；　　(2)$x^{-\frac{1}{2}}$；　　(3)$2.5^{\frac{5}{2}}$.

2. 将下列根式表示为有理数指数幂的形式：

(1)$\sqrt[11]{x^6}$；　　(2)$\dfrac{1}{\sqrt[9]{x^8}}$；　　(3)$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y^3}}$.

3. 计算下列各式：

(1)$100^{\frac{1}{2}}$；

(2)$\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$；

(3)$125^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}-\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

4. 化简下列各式：

(1)$(x^{0.3}y^{-6})^0\cdot(x^{-2}y)^{\frac{1}{2}}\div\sqrt{y}$；

(2)$\dfrac{(x\sqrt[3]{xy})^3\sqrt[3]{x^4y}}{\sqrt[3]{xy^4}}$；

(3)$\sqrt[6]{\left(\dfrac{8x^3}{125y^3}\right)^4}$.

第四节　指 数 函 数

一、指数函数及其图像和性质

先看下面的问题，研究问题中两个变量之间的依赖关系.

问题一　某种细胞分裂时，由 1 个分裂成 2 个，2 个分裂成 4 个，4 个分裂成 8 个，…. 一个这样的细胞分裂 x 次后，得到的细胞个数 y 与 x 的函数关系式为

$$y=2^x.$$

问题二　一根 1 米长的绳子从中间剪一次剩下 $\frac{1}{2}$ 米，再从中间剪一次剩下 $\frac{1}{4}$ 米，若这绳子剪 x 次剩下 y 米，则 y 与 x 的函数关系式为

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

在这两个函数中，自变量 x 出现在指数的位置上，而底数为常数.

一般地，函数

$$y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$$

叫做**指数函数**，其定义域为 **R**.

下面研究指数函数的图像和性质.

例 1　作指数函数 $y=2^x$ 和 $y=3^x$ 的图像.

解　列出 x、y 的对应值，如表 2-10 所示：

表 2-10

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=2^x$	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	…
$y=3^x$	…	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	…

用描点法，在同一坐标系中作出它们的图像，如图 2-16 所示.

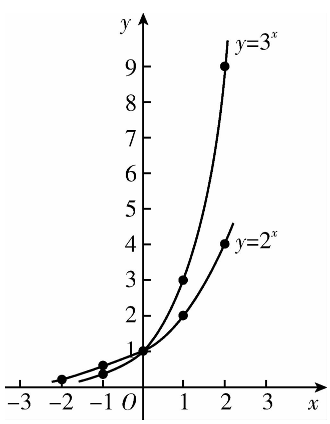


图 2-16

例 2　作指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图像.

解　列出 x、y 的对应值,如表 2-11 所示:

表 2-11

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	…
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	…	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	…

用描点法,在同一坐标系中作出它们的图像,如图 2-17 所示.

从例 1、例 2 所画出的函数的图像可以看出:

(1) 这 4 个函数的图像都在 x 轴上方,且它们的图像都经过点(0,1);

(2) $y=2^x$ 和 $y=3^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是增函数,当 x 逐渐减小时,其图像从 x 轴上方逐渐逼近 x 轴;$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$在$(-\infty,+\infty)$上是减函数,当 x 逐渐增大时,其图像从 x 轴上方逐渐逼近 x 轴.

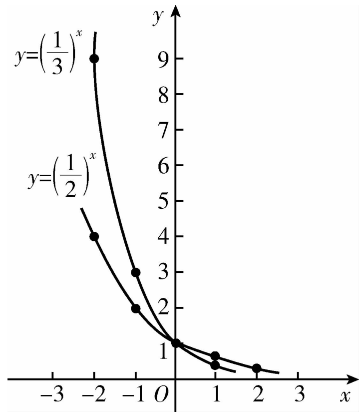


图 2-17

由以上实例,我们可以归纳出指数函数

$$y=a^x(a>0,a\neq 1)$$

具有下列性质:

(1)定义域为 **R**,值域为$(0,+\infty)$;

(2)函数图像均经过点(0,1);

(3)当 $a>1$ 时,该函数是增函数,如图 2-18(a)所示,当$0<a<1$时,该函数是减函数,如图 2-18(b)所示.

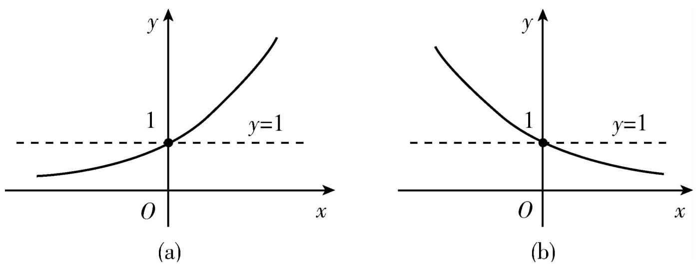


图 2-18

例 3　判断下列函数在$(-\infty,+\infty)$上的单调性:

(1)$y=0.7^x$;　　(2) $y=0.3^{-x}$;　　(3) $y=4^{\frac{x}{2}}$.

解　(1)因为底数 $a=0.7<1$,所以函数 $y=0.7^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数.

(2)因为 $y=0.3^{-x}=(0.3^{-1})^x=\left(\frac{10}{3}\right)^x$,底数 $a=\frac{10}{3}>1$,所以函数 $y=0.3^{-x}$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数.

(3)因为 $y=4^{\frac{x}{2}}=(4^{\frac{1}{2}})^x=(\sqrt{4})^x=2^x$，底数 $a=2>1$，所以函数 $y=4^{\frac{x}{2}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数.

例 4　比较下列各组中两个数值的大小：

(1) $5^{0.4}$ 与 $5^{0.6}$；

(2) 0.8^{-3} 与 $0.8^{-1.5}$；

(3) $10^{\frac{2}{3}}$ 与 1.

解　(1)函数 $y=5^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数. 由于 $0.4<0.6$，所以 $5^{0.4}<5^{0.6}$.

(2)函数 $y=0.8^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数. 由于 $-3<-1.5$，所以 $0.8^{-3}>0.8^{-1.5}$.

(3)函数 $y=10^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数. 由于 $\frac{2}{3}>0$，所以 $10^{\frac{2}{3}}>10^0$，即 $10^{\frac{2}{3}}>1$.

二、指数函数应用举例

指数函数有着非常广泛的应用，下面举例说明.

例 5　有一种储蓄按复利计算利息，本金为 a 元，每期利率为 r，设本利和为 y，存期为 x.

(1)写出本利和 y 随存期 x 变化的函数解析式；

(2)如果存入本金 1 000 元，每期利息为 2.25%，试计算 5 期后的本利和.

解　(1)1 期后的本利和为

$$y_1=a+a\cdot r=a(1+r)；$$

2 期后的本利和为

$$y_2=a(1+r)+a(1+r)\cdot r=a(1+r)^2；$$

3 期后的本利和为

$$y_3=a(1+r)^2+a(1+r)^2\cdot r=a(1+r)^3；$$

……

x 期后的本利和为

$$y=a(1+r)^x.$$

(2) 当 $a=1\ 000$，$r=2.25\%$，$x=5$ 时，

$$y=1\ 000\cdot(1+2.25\%)^5\approx 1\ 117.68\ (\text{元}).$$

答：5 期后的本利和约为 1 117.68 元.

例 6　某厂购进一台机器，总价 10 万元，每年的折旧率是 10%，3 年后它的残值(剩余的价值)是多少万元？

解　设该机器 x 年后的残值为 y 万元. 由于机器下一年的残值是上一年的 $1-10\%=0.9$ 倍，因此

$$y=10\cdot(0.9)^x.$$

故 3 年后它的残值为

$$y=10\cdot(0.9)^3=7.29(\text{万元}).$$

答：3 年后该机器的残值为 7.29 万元.

习题 2-4

1. 判断下列函数在$(-\infty,+\infty)$上的单调性：

(1)$y=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x}$；　　　　(2)$y=(0.3)^{-2x}$.

2. 利用指数函数的性质，比较下列各题中两个指数幂的大小：

(1)0.8^{a} 与 0.8^{a+1}；　　　　(2)$2.2^{2.2}$与 $2.2^{0.2}$；

(3)0.7^{-3}与 $0.7^{2.4}$.

3. 求下列函数的定义域：

(1)$y=5^{x}-3$；　　　　(2)$y=\sqrt{3^{x}}$.

第五节　对　　数

一、对数的概念

在上节中，我们学习了指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq1)$，当 x、a 已知时，我们能求出 y. 例如，给定指数函数 $y=2^{x}$，当$x=2$时，$y=2^{2}=4$. 反过来，如果我们知道了 a、y，怎样求 x? 也就是说，已知底数和幂的值，怎样求指数?

为了解决这个问题，我们引入一个新的概念——对数.

一般地，如果 $a^{b}=N(a>0,a\neq1)$，数 b 就叫做以 a 为底 N 的**对数**，记作

$$b=\log_{a}N,$$

其中 a 叫做**底数**，N 叫做**真数**，读作“b 等于以 a 为底 N 的对数”.

式子 $\log_{a}N=b$ 叫做**对数式**，式子 $a^{b}=N$ 叫做**指数式**.

例如，$2^{3}=8$，所以 3 是以 2 为底 8 的对数，即 $\log_{2}8=3$；$9^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$，所以$-\dfrac{1}{2}$是以 9 为底 $\dfrac{1}{3}$的对数，即 $\log_{9}\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}$. 同样，我们也能把对数式转化为指数式.

根据对数的定义，对数具有如下性质：

(1)0 和负数没有对数，即 $N>0$；

(2)1 的对数为 0，即 $\log_{a}1=0$；

(3)底数的对数等于 1，即 $\log_{a}a=1$.

例 1　将下列指数式写成对数式：

(1)$3^{4}=81$；　　(2)$2^{-5}=\dfrac{1}{32}$；　　(3)$(0.7)^{0}=1$；　　(4)$9^{\frac{1}{2}}=3$.

解　根据对数式与指数式的关系得

(1)$\log_{3}81=4$.　　(2)$\log_{2}\dfrac{1}{32}=-5$.　　(3)$\log_{0.7}1=0$.　　(4)$\log_{9}3=\dfrac{1}{2}$.

例 2　把下列对数式写成指数式：

(1) $\log_6 36=2$；　(2) $\log_2 \frac{1}{8}=-3$；　(3) $\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$；　(4) $\log_{10} 100=2$.

解　根据对数式与指数式的关系得

(1) $6^2=36$.　(2) $2^{-3}=\frac{1}{8}$.　(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$.　(4) $10^2=100$.

例 3　求下列各式的值：

(1) $\log_{0.5} 0.5$；　(2) $\log_3 1$.

解　根据对数的性质得

(1) $\log_{0.5} 0.5=1$.　(2) $\log_3 1=0$.

通常我们将以 10 为底的对数叫做**常用对数**，把 $\log_{10} N$ 记作 $\lg N$.

在科学技术中，常使用以无理数 e=2.718 28…为底的对数. 以 e 为底的对数叫做**自然对数**，把 $\log_e N$ 记作 $\ln N$.

二、积、商、幂的对数

我们知道

$$a^p \cdot a^q=a^{p+q},$$

设

$$M=a^p, N=a^q, \tag{1}$$

则

$$M \cdot N=a^p \cdot a^q=a^{p+q}. \tag{2}$$

把式(1)和(2)写成对数式，得

$$\log_a(M \cdot N)=p+q=\log_a M+\log_a N,$$

从而得到对数的一个运算法则

$$\log_a(M \cdot N)=\log_a M+\log_a N.$$

类似地，当 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ 时，我们可以得到如下对数运算法则：

(1) $\log_a(M \cdot N)=\log_a M+\log_a N$；

(2) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(3) $\log_a M^n=n\log_a M\,(n\in \mathbf{R})$.

例 4　用 $\log_a x$、$\log_a y$、$\log_a z$ 表示下列各式：

(1) $\log_a(xyz)$；　(2) $\log_a \frac{xy}{z}$；　(3) $\log_a \frac{x^3\sqrt{y}}{\sqrt{z}}$.

解　(1) $\log_a(xyz)=\log_a x+\log_a y+\log_a z$.

(2) $\log_a \frac{xy}{z}=\log_a(xy)-\log_a z=\log_a x+\log_a y-\log_a z$.

(3)
$$\begin{aligned}\log_a \frac{x^3\sqrt{y}}{\sqrt{z}}&=\log_a(x^3\sqrt{y})-\log_a\sqrt{z}\\&=\log_a x^3+\log_a\sqrt{y}-\log_a\sqrt{z}\\&=3\log_a x+\frac{1}{2}\log_a y-\frac{1}{2}\log_a z.\end{aligned}$$

例 5　求下列各式的值：

(1)$\log_3(27\times9)$；　(2)$\lg4+\lg25$；　(3)$\log_3 5-\log_3 15$.

解　(1)$\log_3(27\times9)=\log_3(3^3\times3^2)=\log_3 3^{3+2}=5$.

(2) $\lg4+\lg25=\lg(4\times25)=\lg100=\lg10^2=2$.

(3) $\log_3 5-\log_3 15=\log_3 \dfrac{5}{15}=\log_3 3^{-1}=-1$.

一般地，下面的换底公式成立

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

证明　设 $\log_b N=x$，则

$$b^x=N.$$

于是

$$\log_a b^x=\log_a N,$$

由此得

$$x=\frac{\log_a N}{\log_a b},$$

即

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

例 6　求 $\log_5 4\cdot\log_8 5$.

解　$\log_5 4\cdot\log_8 5=\dfrac{\lg4}{\lg5}\cdot\dfrac{\lg5}{\lg8}=\dfrac{\lg2^2}{\lg5}\cdot\dfrac{\lg5}{\lg2^3}=\dfrac{2\lg2}{\lg5}\cdot\dfrac{\lg5}{3\lg2}=\dfrac{2}{3}$.

习题 2-5

1.将下列指数式写成对数式：

(1)$3^a=7$；　(2)$5^{-2}=\dfrac{1}{25}$；　(3)$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=4$.

2.将下列对数式写成指数式：

(1)$\lg10=1$；　(2)$\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2}$；　(3)$\log_{\sqrt{2}}8=6$.

3.求下列各式的值：

(1)$\log_{\frac{1}{10}}1$；　(2)$\lg10^{-1}$；　(3)$\ln\sqrt{e}-\ln e^3$.

第六节　对 数 函 数

一、对数函数及其图像和性质

通过上一节的学习，回顾第四节中的两个实例：

问题一：1 个细胞经过 y 次分裂后得到 x 个细胞，则 x 与 y 的函数关系式为 $x=2^y$，写成对数式为 $y=\log_2 x$.

问题二：1 米长的绳子剪 y 次剩下 x 米，则 x 与 y 的函数关系式为 $x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^y$，写成对数式为 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

在上面这两个函数里，自变量 x 出现在真数的位置上.

一般地，我们把函数

$$y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$$

叫做**对数函数**，其定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $\mathbf{R}$.

下面研究对数函数的图像和性质.

例 1　作对数函数 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_3 x$ 的图像.

解　分别列出两个函数 x、y 的对应值，如表 2-12，表 2-13 所示：

表 2-12

x	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	…
$y=\log_2 x$	…	-2	-1	0	1	2	…

表 2-13

x	…	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	…
$y=\log_3 x$	…	-2	-1	0	1	2	…

用描点法，在同一坐标系中作出它们的图像，如图 2-19所示.

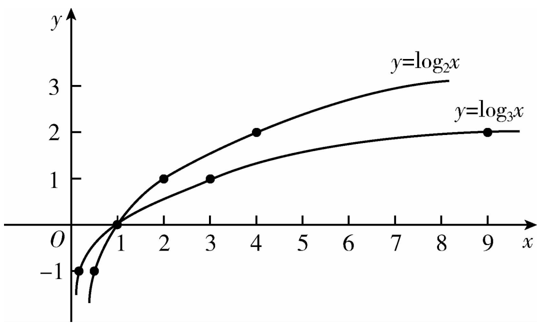


图 2-19

例 2　作对数函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图像.

解　分别列出这两个函数 x、y 的对应值，如表 2-14，表 2-15所示：

表 2-14

x	…	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	…
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$	…	-2	-1	0	1	2	…

表 2-15

x	…	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	…
$y=\log_{\frac{1}{3}} x$	…	-2	-1	0	1	2	…

用描点法，在同一坐标系中作出它们的图像，如图 2-20 所示.

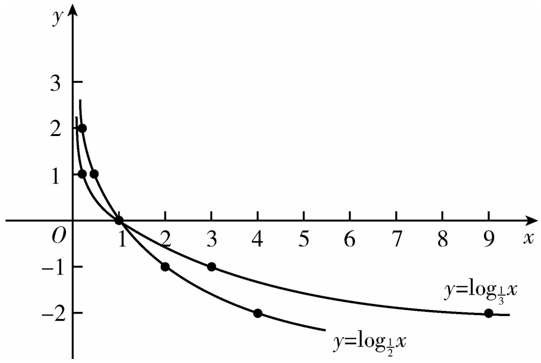


图 2-20

从函数的图像可以看出：

(1)这 4 个函数的图像都在 y 轴的右边，且均过点(1,0)；

(2)函数 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_3 x$ 在$(0,+\infty)$上是增函数；函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 在$(0,+\infty)$上是减函数.

由以上实例，我们可以归纳出对数函数

$$y=\log_a x\,(a>0, a\neq 1)$$

具有下列性质：

(1)定义域是$(0,+\infty)$，值域是 **R**；

(2)图像都经过点(1,0)；

(3)在定义域内，当 $a>1$ 时是增函数，如图 2-21(a)所示；当 $0<a<1$ 时是减函数，如图 2-21(b)所示.

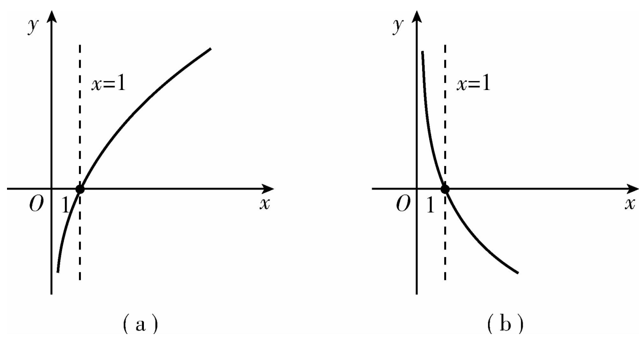


图 2-21

例 3　求下列函数的定义域：

(1)$y=\lg x^3$；　　　　(2)$y=\log_2(1-2x)$.

解　(1)要使函数有意义，需 $x^3>0$，即 $x>0$，所以函数$y=\lg x^3$ 的定义域为$(0,+\infty)$.

(2)要使函数有意义，需 $1-2x>0$，即 $x<\frac{1}{2}$，所以函数$y=\log_2(1-2x)$的定义域为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

例 4　比较下列各题中两个值的大小：

(1)ln5 与 ln7；　　(2)$\log_{\frac{1}{2}}0.3$ 与 $\log_{\frac{1}{2}}2.3$.

解　(1)函数 $y=\ln x$ 在$(0,+\infty)$上是增函数.因为$5<7$,所以 $\ln 5<\ln 7$.

(2)函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在$(0,+\infty)$上是减函数.因为$0.3<2.3$,所以 $\log_{\frac{1}{2}}0.3>\log_{\frac{1}{2}}2.3$.

二、对数函数应用举例

对数函数有着广泛的应用,下面举例说明.

例 5　一台机器的价值为 50 万元,如果每年的折旧率是 4.5%,则经过几年它的价值降为 20 万元(精确到 0.1)?

解　设经过 x 年它的价值降为 20 万元,则

$$50\cdot(1-4.5\%)^x=20,$$

即

$$(1-4.5\%)^x=\frac{2}{5}.$$

于是

$$x=\log_{0.955}\frac{2}{5}\approx 19.9(\text{年}).$$

答:约经过 19.9 年该机器的价值降为 20 万元.

例 6　截止 1999 年,我国人口约为 13 亿.如果在这之后能将人口平均增长率控制在 1%,那么经过多少年,我国人口数量将超过 16 亿(精确到 0.1)?

解　设经过 x 年我国人口数量将超过 16 亿,则

$$13\cdot(1+1\%)^x=16,$$

即

$$(1+1\%)^x=\frac{16}{13}.$$

于是

$$x=\log_{1.01}\frac{16}{13}\approx 20.9(\text{年}).$$

答:经过 20.9 年后,我国人口数量将超过 16 亿.

习题 2-6

1.判断下列函数在$(0,+\infty)$内的单调性:

(1)$y=\log_{\frac{1}{5}}x$;　　(2)$y=\lg x$;　　(3)$y=\ln x$.

2.求下列函数的定义域:

(1)$y=\log_{0.3}(x-1)$;　　(2)$y=\dfrac{5}{2\lg x}$;

(3)$y=\sqrt{\ln x}$.

3.比较下列各题中两个值的大小:

(1)ln3 与 ln3.56;　　(2)$\log_{0.3}5$ 与 $\log_{0.3}8$;

(3)lg0.35 与 lg0.33.

复习题2

A　组

1.填空题：

(1)某型号的收音机每台302元，买 x 台这样型号收音机的函数为 $f(x)=302x$，此时 x 的定义域为________.

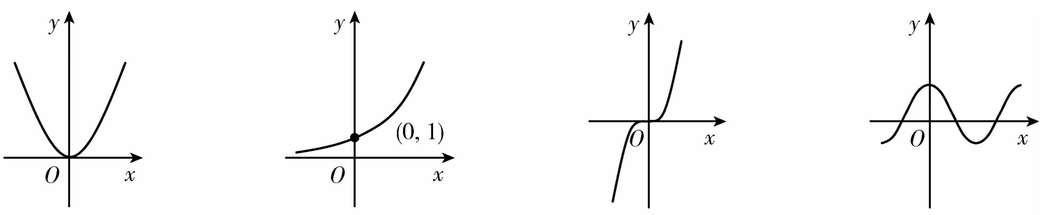
(2)已知 $y=-3x^2+x-2$，则 $f(-2)=$________，$f(2x)=$________.

(3)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, x>1,\\ x+1, x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(2)$ 为________.

(4)函数 $y=x^2+2$ 的减区间为________.

(5)偶函数的图像关于________对称；奇函数的图像关于________对称.

(6)根据下列函数的图像判断，是偶函数的有________，是奇函数的有________.



(a)　(b)　(c)　(d)

(7)所有指数函数的图像都通过点________；所有对数函数的图像都通过点________.

(8)函数 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 的定义域为________，值域为________.

(9)函数 $y=\log_7(1+4x)$ 的定义域为________，值域为________.

(10)设 $x>0, y>0$，则 $\ln(xy)=$________，$\ln\frac{x}{y}=$________.

(11)如果 $a^{\frac{1}{2}}=b(a>0$ 且 $a\neq 1)$，则其对数式为________.

(12)比较下列各数大小：

$\log_{0.3}0.7$ ________ $\log_{0.3}0.3$；$\log_2 2^{-1}$ ________ $\log_3 1$.

(13)若 $\log_a 2=m$，$\log_a 3=n$，则 $a^{2m+n}=$________.

(14)已知 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，用 a、b 表示 $\lg\sqrt{45}=$________.

2.选择题：

(1)函数 $y=\sqrt[3]{x-4}$ 的定义域是(　　).

A. $(4,+\infty)$　　B. $(-\infty,4)$　　C. $\mathbf{R}$　　D. $[4,+\infty)$

(2)下列函数在 $(0,+\infty)$ 上为单调增加的是(　　).

A. $y=-3x+2$　　B. $y=\frac{1}{x}$　　C. $y=-2x^2+x$　　D. $y=x^2$

(3)已知函数 $y=x^2-2x+11$，则此函数在(　　)上单调递减.

A. $(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $(-1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1]$

(4)已知函数 $y=f(x)$在定义域上为单调递减函数,且$f(x_1)<f(x_2)$,则(　　).

A. $x_1<x_2$　　B. $x_1>x_2$　　C. $x_1=x_2$　　D. 以上都可能

(5)函数的定义域关于原点对称的是(　　).

A. $y=\dfrac{1}{x+1}$　　B. $y=\sqrt{x+1}$

C. $y=x^2+1,x\in[-1,1)$　　D. $y=x^3$

(6)下列函数中为偶函数的是(　　).

A. $y=-x^2+3x-1$　　B. $y=-3|x|$　　C. $y=x^3$　　D. $y=\sqrt{x}$

(7)下列函数中为奇函数的是(　　).

A. $y=x+1$　　B. $y=x^2+1$　　C. $y=\dfrac{1}{x}$　　D. $y=\dfrac{1}{x+1}$

(8)若函数 $y=f(x)$的图像关于原点对称,且 $f(5)=-8$,则 $f(-5)$为(　　).

A. -8　　B. 8　　C. -5　　D. 5

(9)下列说法中正确的是(　　).

A. 16 的四次方根是 2　　B. 正数的 n 次方根有两个

C. $(\sqrt[n]{a})^n=a$　　D. $\sqrt[n]{a^n}=a$

(10)下列函数中,在$(0,+\infty)$内单调递增的是(　　).

A. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　　B. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$　　C. $y=\lg x$　　D. $y=3^{-x}$

(11)已知 $a>0$ 且 $a\neq1$,下列式子中错误的是(　　).

A. $\sqrt[7]{a^3}=a^{\frac{3}{7}}$　　B. $a^{-\frac{6}{7}}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{a^7}}$　　C. $\log_a\dfrac{1}{a^2}=-2$　　D. $\log_a1=0$

(12)下列运算中,错误的是(　　).

A. $3^{\frac{5}{3}}\cdot3^{\frac{4}{3}}=27$　　B. $8^{\frac{2}{3}}=4$　　C. $2^{\frac{3}{4}}\div2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{4}}$　　D. $(3^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}}=3$

(13)下列函数中,为指数函数的是(　　).

A. $y=\lg x$　　B. $y=x^3$　　C. $y=3^x$　　D. $y=\log_3x$

(14)已知 $\log_a5<\log_a4$,则 a 的取值范围是(　　).

A. $a<1$　　B. $a<0$　　C. $a>1$　　D. $0<a<1$

(15)$\log_a\dfrac{2}{3}<1$,则 a 的取值范围是(　　).

A. $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$　　B. $\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$

C. $\left(\dfrac{2}{3},1\right)$　　D. $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$

(16)下列各式中正确的个数是(　　).

①$\log_a(b^2-c^2)=2\log_ab-2\log_ac$;②$(\log_a3)^2=2\log_a3$;

③$\dfrac{\lg15}{\lg3}=\lg5$;④$\log_ax^2=2\log_a|x|$.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{x-1}{2}$；(2) $f(x)=\dfrac{3}{x-4}$；

(3) $f(x)=-\sqrt{x-5}$；(4) $f(x)=\begin{cases} x^2, 0<x<2, \\ x+2, 2\leqslant x<4. \end{cases}$

4. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x-2, x\geqslant 1, \\ x^2-2, -1<x<1, \\ -1, x\leqslant -1. \end{cases}$$

(1) 写出函数的定义域；

(2) 求 $f(2)$，$f(0)$，$f(-2)$；

(3) 作出函数 $f(x)$ 的图像.

5. 证明函数 $y=-5x+2$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

6. 设某种电报收费标准是每个字 0.1 元，电报费 y(元)是字数 x(个)的函数，请用三种方法表示这个函数.

7. 某市出租车的起步价为 10 元(3 km 以内). 如果超过3 km，那么超过部分为 1.5 元/km. 如果超过 5 km，那么超过部分为 2 元/km. 试写出租车费 y (元)与路程数 x (km)之间的函数解析式，并作出函数的图像.

8. 求下列各式的值：

(1) $27^{-\frac{1}{3}}$；

(2) $\sqrt{5}\times\sqrt[3]{25}\times\sqrt[6]{25}$；

(3) $4^{-1}\times(2-\sqrt{5})^{0}+16^{\frac{1}{2}}\times 3^{-2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}-\sqrt{2}$；

(4) $(\lg 2)^2+(\lg 5)^2+2\lg 2\times\lg 5$.

9. 化简下列各式：

(1) $\left(x^{\frac{1}{2}}\times y^{-\frac{3}{4}}\right)^{12}$；

(2) $3x^{-\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}\right)$；

(3) $\left(\dfrac{b}{3a^{\frac{1}{3}}}\right)^{3}\div\left(\dfrac{b^2+a^{-1}}{ab}\right)^{0}\times\left(-\dfrac{b}{a}\right)^{-3}$.

10. 某市 2000 年国内生产总值为 60.24 亿元，到 2009 年底国内生产总值达到 800.05 亿元，求这 9 年的平均增长率(精确到 0.01).

B 组

1. 求函数 $y=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域.

2. 判断函数 $y=x^2+2x$ 在$(-1,+\infty)$的单调性，并证明.

3. 某产品每件定价 80 元，每天可售出 30 件. 若每件定价 120 元，则每天可售出 20 件. 如果售出件数是定价的一次函数，求这个函数的解析式.

4. 计算下列各式的值:

(1) $\lg 5\times\lg 8\,000+(\lg 2^{\sqrt{3}})^2+\lg\frac{1}{6}+\lg 0.06$;

(2) $\log_{15}5\times\log_{15}45+(\log_{15}3)^2$;

(3) $\frac{\lg 8+\lg 125-\lg 2-\lg 5}{\lg\sqrt{10}\times\lg 0.1}$;

(4) $(\log_3 2+\log_9 2)\times(\log_4 3+\log_8 3)$.

5. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{2^{-x^2-1}-\frac{1}{4}}$; (2) $y=\log_2(x^2+2x+5)$;

(3) $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2+4x+5)$; (4) $y=\sqrt{\log_{0.5}(3x-2)}$.

阅读与欣赏

函数概念的发展历史

17 世纪,科学家们致力于运动的研究,如计算天体的位置、远距离航海中对经度和纬度的测量、炮弹的速度对于高度和射程的影响等,诸如此类的问题都需要探究两个变量之间的关系,并根据这种关系对事物的变化规律作出判断,如根据炮弹的速度推测它能达到的高度和射程. 这正是函数产生和发展的背景.

函数概念的发展主要经历了以下几个历史时期:

1. 早期函数概念——几何观念下的函数

1673 年,德国数学家莱布尼兹(G. W. Leibniz,1646—1716)首次使用“function”(函数)表示“幂”,后来他用该词表示曲线上点的横坐标、纵坐标、切线等随曲线的变化而改变的几何量.

2. 18 世纪的函数概念——代数观念下的函数

1718 年瑞士数学家约翰·伯努利(Johann Bernoulli,1667—1748)在莱布尼兹函数概念的基础上对函数概念进行了定义:“由任一变量和常数的任一形式所构成的量.”他强调函数要用公式来表示. 1755 年,瑞士数学家欧拉(L. Euler,1707—1783)把函数定义为“如果某些变量,以某一种方式依赖于另一些变量,即当后面这些变量变化时,前面这些变量也随着变化,我们把前面的变量称为后面变量的函数.”他把约翰·伯努利给出的函数定义称为解析函数,并进一步把它区分为代数函数和超越函数,还考虑了“随意函数”.

3. 19 世纪的函数概念——对应关系下的函数

1821 年,法国数学家柯西(Cauchy,1789—1857)从定义变量起给出了定义:“在某些变数间存在着一定的关系,当一经给定其中某一变数的值,其他变数的值可随着而确定时,则将最初的变数叫自变量,其他各变数叫做函数.”在柯西的定义中,首先出现了自变量一词,同时指出对函数来说不一定要有解析表达式,不过他仍然认为函数关系可以用多个解析式来表示,这是一个很大的局限. 1837 年,德国数学家狄利克雷(Dirichlet,1805—1859)拓广了函数概念,指出:“对于在某区间上的每一个确定的 x 值,y 都有一个或多个确定的值,那么 y 叫做 x 的函数.”这个定义避免了函数定义中对依赖关系的描述,以清晰的方式被所有数学

家接受，这就是人们常说的经典函数定义.

4. 现代函数概念——集合论下的函数

1914 年德国数学家豪斯道夫（F. Hausdorff，1868—1942）在他的《集论基础》（《Grundzügeder Mengenlehre》）中用不明确的概念“序偶”来定义函数，其避开了意义不明确的“变量”、“对应”概念. 1921 年，波兰数学家库拉托夫斯基（Kuratowski，1896—1980）用集合概念来定义“序偶”，使豪斯道夫的定义更严谨了. 1930 年，新的现代函数定义为“若对集合 M 的任意元素 x，总有集合 N 确定的元素 y 与之对应，则称在集合 M 上定义一个函数，记为 $y=f(x)$. 元素 x 称为自变元，元素 y 称为因变元.”

函数概念的发展与生产、生活以及科学发展的实际需要紧密相关，而且随着研究的深入，函数概念不断得到严谨化、精确化的表达，这与我们学习函数的过程是一样的.

第三章　三 角 函 数

第一节　任意角的概念与弧度制

一、角的概念的推广

我们知道,角可以看成是平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形. 如图 3-1(a)所示,射线的端点是 O,它从位置 OA 旋转到另一位置 OB 形成的图形叫做**角**. 旋转位置开始的射线 OA 叫做角的**始边**,终止位置的射线 OB 叫做角的**终边**,端点 O 叫做角的**顶点**.

规定:按逆时针方向旋转所形成的角叫做**正角**,如图3-1(a)所示;按顺时针方向旋转所形成的角叫做**负角**,如图3-1(b)所示. 当射线没有做任何旋转时,我们称它形成一个**零角**,零角的始边与终边重合.

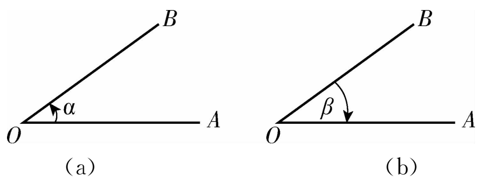


图 3-1

在以前所学的知识中,我们只研究了 0°～360°范围的角,但在现实生活中我们还会遇到更大范围的角. 例如,游乐场的摩天轮,当它一圈又一圈地转动着的时候,其转动的角度不是只限于 0°～360°. 为了描述这种现实状况,我们把角的概念加以推广,即推广到任意角,包括正角、负角和零角. 如图 3-2 所示,正角 $\alpha=210°$,负角 $\beta=-150°$.

为了方便研究,我们经常在平面直角坐标系中研究角. 将角的顶点与坐标原点重合,始边与 x 轴的正半轴重合.

坐标平面被直角坐标系分为四个部分,如图 3-3 所示,分别叫做第一象限、第二象限、第三象限、第四象限. 坐标轴上的点不属于任何象限. 此时,角的终边在第几象限,就把这个角叫做**第几象限的角**,或者说**这个角在第几象限**.

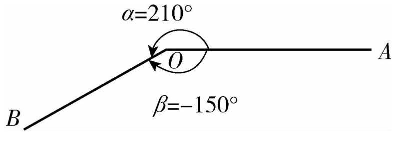


图 3-2

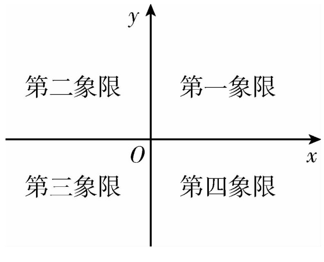


图 3-3

例 1　如图 3-4 所示，$60°$、$420°$、$-300°$角都是第一象限的角，见图 3-4(a)；$150°$角是第二象限的角，$-150°$角是第三象限的角，见图 3-4(b)；$-30°$、$330°$角都是第四象限的角，见图 3-4(c).

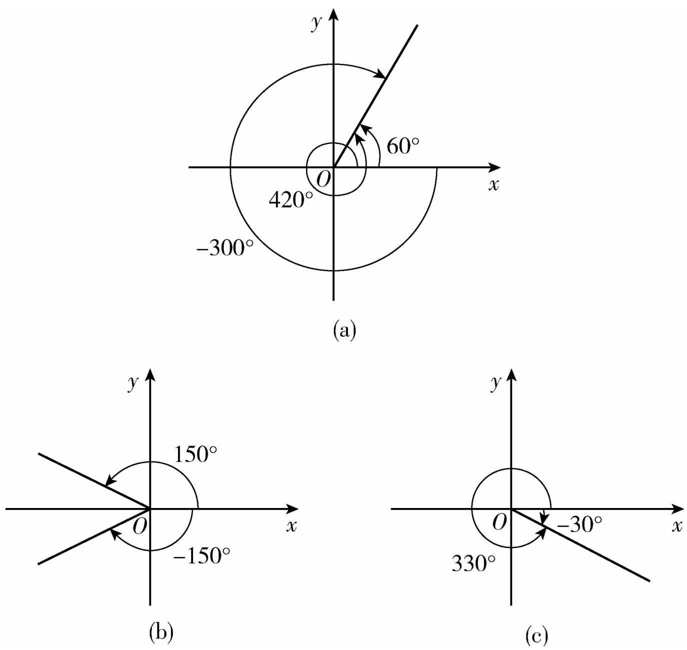


图 3-4

终边在坐标轴上的角叫做**界限角**，如 $0°$、$90°$、$180°$、$270°$、$360°$、$-90°$、$-180°$角都是界限角.

从图 3-4(a)可以看出 $420°$、$-300°$角都与 $60°$角的终边相同，并且都可以表示成 $60°$与 k 个周角的和，其中的 k 为整数，即

$$420°=60°+k\times360°(k=1),$$
$$-300°=60°+k\times360°(k=-1),$$

它们是角的始边绕坐标原点旋转到 $60°$角的终边位置后，分别继续按逆时针或顺时针方向再旋转一周所形成的角，其终边都相同，因此将其叫做**终边相同的角**. 与 $60°$角的终边相同的角有无限多个，用集合表示为

$$\{\alpha \mid \alpha=60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}.$$

一般地，与角 α 终边相同的角有无限多个，并且它们(包括角 α 在内)都可以写成 $\beta=\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$的形式，所以它们所组成的集合为

$$\{\beta \mid \beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}. \tag{3-1}$$

例 2　写出与下列各角终边相同的角的集合，把其中在 $0°\sim360°$范围内的角写出来，并判断下列各角是第几象限的角：

(1)$470°$；　　　　　　(2)$-80°$.

解　(1)与角 $470°$的终边相同的角的集合是

$$\{\beta \mid \beta=470°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}.$$

当 $k=-1$ 时，$470°+(-1)\times360°=110°$，并且 $110°$在$0°\sim360°$的范围内，所以在 $0°\sim360°$范围内与 $470°$角的终边相同的角为 $110°$；$470°$角是第二象限的角.

(2)与$-80°$角的终边相同的角的集合是

$$\{\beta \mid \beta=-80^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}.$$

当 $k=1$ 时，$-80^\circ+1\times360^\circ=280^\circ$，并且 280°在$0^\circ\sim360^\circ$的范围内，所以在 $0^\circ\sim360^\circ$范围内与-80°角的终边相同的角为 280°；-80°角是第四象限的角.

例 3　写出终边在 y 轴上的角的集合.

解　在 $0^\circ\sim360^\circ$范围内，终边在 y 轴正半轴上的角为 90°，终边在 y 轴负半轴上的角为 270°，因此，终边在 y 轴正半轴、负半轴上所有的角分别是

$$90^\circ+k\cdot360^\circ=90^\circ+2k\cdot180^\circ,$$

$$270^\circ+k\cdot360^\circ=90^\circ+(2k+1)\cdot180^\circ,$$

其中 $k\in\mathbf{Z}$，可以将上面的两个式子进行合并，即终边在 y 轴上的角的集合为

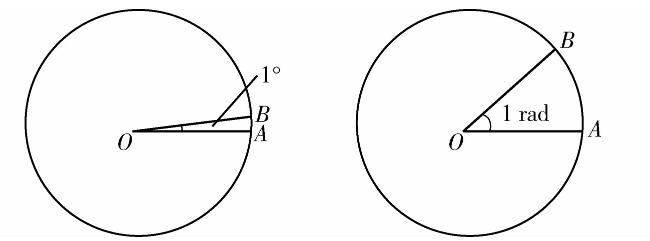
$$\{\beta \mid \beta=90^\circ+n\cdot180^\circ, n\in\mathbf{Z}\}.$$

当 n 取偶数时，角的终边在 y 轴的正半轴上；当 n 取奇数时，角的终边在 y 轴的负半轴上.

二、弧度制

初中我们研究过角的度量，即将圆周的$\frac{1}{360}$所对的圆心角叫做 1 **度角**，记作 1°，如图3-5(a)所示. 这种用“度”做单位来度量角度的单位制叫做**角度制**. 现在我们来学习另外一种度量角的单位制——弧度制.

把等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 **弧度的角**，记作 1 弧度或 1 rad，如图3-5(b)所示.



(a)劣弧$\overset{\frown}{AB}$的弧长为$\frac{1}{360}$周长　　(b)劣弧$\overset{\frown}{AB}$的弧长为半径长

图 3-5

一般地，正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是 0. 这种以弧度为单位来度量角的单位制叫做**弧度制**.

由定义可知，当角 α 用弧度表示时，其绝对值等于圆弧长 l 与半径 r 的比，即

$$|\alpha|=\frac{l}{r}(\text{rad}). \tag{3-2}$$

这里，角 α 的正负由其终边的旋转方向决定.

半径为 r 的圆的周长为 $2\pi r$，故周角的弧度为

$$\frac{2\pi r}{r}(\text{rad})=2\pi(\text{rad}).$$

用角度制和弧度制来度量零角，单位虽然不同，但量数相同，都是 0；用角度制和弧度制度量任一非零角，单位不同，量数也不用. 例如，周角的弧度数是 2π，而它在角度制下的度数

是 $360°$.

由此得到两种单位制之间的换算关系：

$$360°=2\pi(\text{rad}),$$
$$180°=\pi(\text{rad}).$$

因此，角度与弧度的换算公式为

$$1°=\frac{\pi}{180}(\text{rad})\approx 0.01745(\text{rad}), \tag{3-3}$$

$$1\ \text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57.30°=57°18'. \tag{3-4}$$

例 4　将下列各角由角度换算为弧度：

(1)$15°$；　　　(2)$105°$；　　　(3)$-200°$.

解　(1)$15°=15\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{12}$；

(2)$105°=105\times\frac{\pi}{180}=\frac{7\pi}{12}$；

(3)$-200°=(-200)\times\frac{\pi}{180}=-\frac{10\pi}{9}$.

例 5　将下列各角由弧度换算为角度：

(1)$\frac{7\pi}{6}$；　　　(2)$-\frac{4\pi}{9}$；　　　(3)3.2.

解　(1)$\frac{7\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=210°$；

(2)$-\frac{4\pi}{9}=-\frac{4\pi}{9}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=-80°$；

(3)$3.2=3.2\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}=\left(\frac{576}{\pi}\right)^{\circ}$.

表 3-1 中给出了一些特殊角的弧度与角度之间的换算.

表 3-1

度	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

采用弧度制之后，每一个角都对应唯一的一个实数；反之，每一个实数都对应唯一的一个角. 这样，角与实数之间就建立了一一对应的关系.

习题 3-1

1. 下列各角分别是第几象限的角：

(1)$150°$；　　　(2)$225°$；

(3)$310°$；　　　(4)$-580°$.

2. 写出与下列各角终边相同的角的集合，并把其中在 $0°\sim 360°$内的角写出来：

(1)$-65°$；　　　(2)$485°$；

(3)$1190°$.

3.将下列各角由角度换算为弧度：

(1)$78°$；　　(2)$-125°$；

(3)$735°$；　　(4)$1\ 800°$.

4.将下列各角由弧度换算为角度：

(1)$\frac{5\pi}{8}$；　　(2)$\frac{8\pi}{9}$；

(3)6.5；　　(4)7.8.

5.用弧度表示：

(1)终边在 x 轴上的角的集合；

(2)终边在 y 轴上的角的集合.

第二节　任意角的三角函数

一、任意角的正弦函数、余弦函数和正切函数的概念

在初中我们已经学过了锐角的正弦、余弦和正切函数，并且在前边的内容中也已经推广了角的概念，现在利用直角坐标系把这三种三角函数推广到任意角的情况.

如图 3-6 所示，设 α 是平面直角坐标系中的一个任意角，点 $P(x,y)$ 为角 α 终边上的任意一点，点 P 到坐标原点$O(0,0)$的距离为 $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$，那么

(1)比值$\frac{y}{r}$叫做α 的正弦，记作 $\sin\alpha$，即 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$；

(2)比值$\frac{x}{r}$叫做α 的余弦，记作 $\cos\alpha$，即 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$；

(3)比值$\frac{y}{x}$叫做α 的正切，记作 $\tan\alpha$，即 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

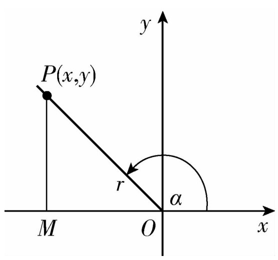


图 3-6

可以看出，当角 α 的终边在 y 轴上时，$\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，终边上任意一点的横坐标 x 的值都等于 0，此时$\tan\alpha=\frac{y}{x}$无意义，即对于每一个确定的 α 值，其正弦、余弦及正切(当$x\neq0$时)都分别对应一个确定的比值.

因此，正弦、余弦及正切都是以 α 为变量的函数，分别叫做正弦函数、余弦函数及正切函数，它们都是三角函数. 表3-2所示为正弦函数、余弦函数和正切函数的定义域.

表 3-2

三角函数	定义域
$\sin\alpha$	$\mathbf{R}$
$\cos\alpha$	$\mathbf{R}$
$\tan\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$

例 1　已知角 α 的终边经过点 $P(3,4)$，求角 α 的正弦、余弦和正切值.

解　如图 3-7 所示，因为 $x=3$，$y=4$，所以 $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$.

在直角坐标系中，以原点为圆心，单位长度为半径的圆叫做**单位圆**. 如图 3-8 所示，设任意角 α 的终边与单位圆相交于点 $P(x,y)$，根据三角函数的定义，可得

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=y,\cos\alpha=\frac{x}{r}=x.$$

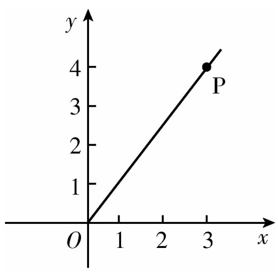


图 3-7

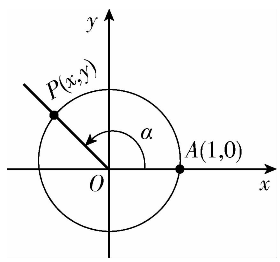


图 3-8

这就是说，角 α 的正弦值和余弦值分别等于其终边与单位圆相交点 P 的纵坐标 y 和横坐标 x.

练一练

已知角 α 终边上的点 P 的坐标如下，分别求出它的正弦值、余弦值和正切值：

(1) $P(1,\sqrt{3})$；　　(2) $P(-6,8)$；　　(3) $P(-1,-2)$.

二、任意角的正弦函数、余弦函数和正切函数在各象限的正负号

由于 $r>0$，所以三角函数值的正负由终边上点 P 的坐标来确定. 因此由三角函数的定义以及各象限内的点的坐标的符号可知：

(1) 正弦值 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，对于第一、二象限的角来说是正的($y>0$)；对于第三、四象限的角来说是负的($y<0$).

(2) 余弦值 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$，对于第一、四象限的角来说是正的($x>0$)；对于第二、三象限的角

来说是负的($x<0$).

(3)正切值 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$,对于第一、三象限的角来说是正的(x、y 同号);对于第二、四象限的角来说是负的(x、y 异号).

为了便于记忆,我们将三角函数的正负号标在各个象限内,如图3-9所示.

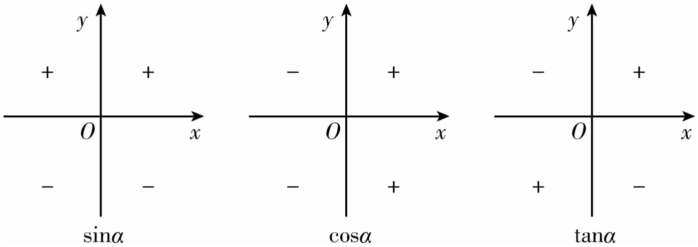


图 3-9

例 2　判断下列各角的三角函数的正负号:

(1)$525°$;　　　　(2)$-\frac{3\pi}{4}$.

解　(1)因为 $525°=165°+360°$,所以 $525°$角为第二象限的角,所以

$$\sin525°>0,\quad \cos525°<0,\quad \tan525°<0.$$

(2)因为$-\frac{3\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}-2\pi$,所以角$-\frac{3\pi}{4}$为第三象限的角,故

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)<0,\quad \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)<0,\quad \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)>0.$$

练一练

判断下列各角的三角函数的正负号:

(1)$-100°$;　　　　(2)$\frac{13\pi}{5}$.

三、界限角的正弦值、余弦值和正切值

由于零角的终边与 x 轴的正半轴重合,并且 r 为点 P 到原点的距离,所以对于角终边上的任意点 $P(x,y)$都有 $r=x$,$y=0$. 因此根据三角函数的定义,有

$$\sin0=\frac{y}{r}=\frac{0}{r}=0,$$

$$\cos0=\frac{x}{r}=\frac{r}{r}=1,$$

$$\tan0=\frac{y}{x}=\frac{0}{r}=0.$$

同样,我们还可以得到$\frac{\pi}{2}$、π、$\frac{3\pi}{2}$、2π 等界限角的三角函数值的情况,如表 3-3 所示:

表 3-3

角度 / 三角函数	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	不存在	0	不存在	0

例 3　计算 $\cos\pi+\tan 0-2\tan\pi+\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}$.

解　　$\cos\pi+\tan 0-2\tan\pi+\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}$

$=-1+0-2\times 0+(-1)+0$

$=-2$.

练一练

计算 $4\sin 90°-2\sin 0°+6\tan 180°+\cos 270°$.

习题 3-2

1. 选择题：

(1)已知角 α 的终边经过点$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 $\tan\alpha$ 的值是(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D. $-\sqrt{2}$

(2)下列各三角函数值中为负值的是(　　).

A. $\sin 1\ 100°$　　　　B. $\cos(-3\ 000°)$

C. $\tan(-115°)$　　　　D. $\tan\frac{5\pi}{4}$

2. 判断下列各角的三角函数值的正负号：

(1)$\frac{5\pi}{7}$；　　(2)$-26°$；　　(3)$-950°$.

3. 计算 $6\sin 270°+2\cos 180°-3\cos 90°+5\tan 0°$.

4. 根据条件判断角 α 是第几象限的角：

(1)$\sin\alpha<0$，$\tan\alpha>0$；　　(2)$\cos\alpha<0$，$\tan\alpha>0$.

5. 利用计算器求下列各三角函数值：

(1)$\tan 6.5$；　　(2)$\cos\frac{11\pi}{4}$；　　(3)$\sin(-950°)$.

第三节　同角三角函数的基本关系

根据三角函数的定义，下面我们研究同角三角函数间的一些基本关系.

由定义 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$（$r^2=x^2+y^2$）可知

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{r^2}=1,$$

当 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，有

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\dfrac{y}{r}}{\dfrac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\alpha.$$

于是，我们得到同角三角函数的基本关系式：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \tag{3-5}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z}). \tag{3-6}$$

例　已知 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，且 α 是第三象限的角，求 $\sin\alpha$、$\tan\alpha$ 的值.

解　由同角三角函数的基本关系 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可得

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

又因为 α 是第三象限的角，所以 $\sin\alpha<0$，则

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5},$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\dfrac{4}{5}}{-\dfrac{3}{5}}=\frac{4}{3}.$$

习题 3-3

1. 选择题：

(1)已知角 α 的终边上的一点的坐标为$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 α 在(　　).

A. 第一象限　　　　B. 第二象限

C. 第三象限　　　　D. 第四象限

(2)已知角 α 是第二象限的角，则点 $P(\tan\alpha,\sin\alpha)$在(　　).

A. 第一象限　　　　B. 第二象限

C. 第三象限　　　　D. 第四象限

2. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，且 α 是第二象限的角，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

3. 已知 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$，且 α 是第四象限的角，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的值.

第四节　三角函数的诱导公式

一、角 α 与 $\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的三角函数间的诱导公式

由第一节可知，在直角坐标系中，角 α 与 $\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的终边相同. 根据三角函数的定义，它们的三角函数值相等，即

$$\begin{cases}\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha,\\ \cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha,\\ \tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha.\end{cases}\tag{3-7}$$

利用上述公式，我们就可以把求任意角的三角函数的值转化为求 $0°\sim360°$ 的三角函数的值.

例 1　求下列三角函数的值：

(1) $\sin\dfrac{13\pi}{2}$；　　(2) $\cos\dfrac{19\pi}{3}$；　　(3) $\tan405°$.

解　(1) $\sin\dfrac{13\pi}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+6\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$；

(2) $\cos\dfrac{19\pi}{3}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+6\pi\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$；

(3) $\tan405°=\tan(45°+360°)=\tan45°=1$.

练一练

求下列三角函数的值：

(1) $\sin\dfrac{7\pi}{3}$；　　(2) $\cos\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)$；　　(3) $\tan750°$.

二、角 α 与 $-\alpha$ 的三角函数间的诱导公式

下面我们再研究任意角 α 与 $-\alpha$ 的三角函数值之间的关系. 如图 3-10 所示，设单位圆与角 α 和 $-\alpha$ 的终边的交点分别为 P 和 P'，则点 P 的坐标是 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$，点 P' 的坐标是 $(\cos(-\alpha),\sin(-\alpha))$. 容易看出，点 P 和点 P' 关于 x 轴对称，则点 P' 的坐标也可以写为 $(\cos\alpha,-\sin\alpha)$，所以可得

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

由同角三角函数的关系式可知

$$\tan(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha.$$

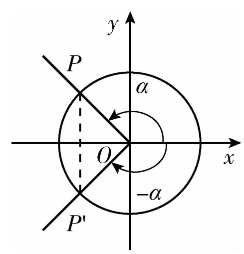


图 3-10

于是，我们得到角 α 与 $-\alpha$ 的三角函数值之间的关系：

$$\begin{cases}\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha,\\ \tan(-\alpha)=-\tan\alpha.\end{cases} \tag{3-8}$$

利用上述公式，我们就可以把负角的三角函数转化为正角的三角函数.

例 2　求下列三角函数的值：

(1)$\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$；　(2)$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$；　(3)$\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

解　(1)$\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$；

(2)$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

(3)$\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

练一练

求下列三角函数的值：

(1)$\sin\left(-\dfrac{7\pi}{3}\right)$；　(2)$\cos\left(-\dfrac{19\pi}{3}\right)$；　(3)$\tan\left(-\dfrac{13\pi}{3}\right)$.

三、角 α 与 $\pi\pm\alpha$ 的三角函数间的诱导公式

如图 3-11 所示，已知任意角 α 的终边与单位圆相交于点 P，由于角 $\pi+\alpha$ 的终边就是角 α 的终边的反向延长线，所以角 $\pi+\alpha$ 的终边与单位圆的交点 P' 与点 P 关于原点对称. 点 P 的坐标为$(\cos\alpha,\sin\alpha)$，点 P' 的坐标为$(\cos(\pi+\alpha),\sin(\pi+\alpha))$，又由于点 P' 与点 P 关于原点对称，则点 P' 的坐标又可以写为$(-\cos\alpha,-\sin\alpha)$，所以可得

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha.$$

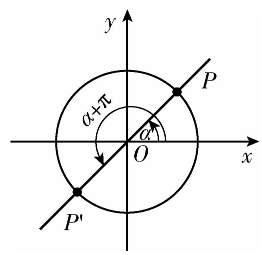


图 3-11

由同角三角函数的关系式可知

$$\tan(\pi+\alpha)=\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\tan\alpha.$$

于是，我们得到角 α 与 $\pi+\alpha$ 的三角函数值之间的关系：

$$\begin{cases}\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\\ \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha.\end{cases} \tag{3-9}$$

如图 3-12 所示，设单位圆与角 α、$\pi+\alpha$、$\pi-\alpha$ 的终边分别相交于点 P、P'、P''. 从图中可以看出，点 P' 与点 P'' 关于 x 轴对称，由此可以得到

$$\sin(\pi-\alpha)=-\sin(\pi+\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\cos(\pi-\alpha)=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha.$$

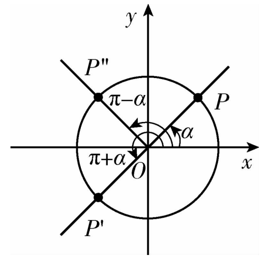


图 3-12

由同角三角函数的关系式可知

$$\tan(\pi-\alpha)=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha.$$

于是，我们得到角 α 与 $\pi-\alpha$ 的三角函数值之间的关系：

$$\begin{cases}\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\\ \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha.\end{cases}\tag{3-10}$$

公式(3-7)、(3-8)、(3-9)、(3-10)统称为**诱导公式**，利用诱导公式可以把任意角的三角函数转化为锐角的三角函数，用以求三角函数式的值或化简三角函数式.

例 3　求下列三角函数的值：

(1) $\sin\frac{7\pi}{6}$；　(2) $\cos\frac{2\pi}{3}$.

解　(1) $\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$；

(2) $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

练一练

求下列三角函数的值：

(1) $\sin\frac{3\pi}{4}$；　(2) $\cos\frac{5\pi}{6}$；　(3) $\tan\frac{2\pi}{3}$.

习题 3-4

1. 求下列各正弦函数的值：

(1) $\sin\frac{19\pi}{6}$；　(2) $\sin\left(-\frac{27\pi}{4}\right)$；　(3) $\sin(-210°)$.

2. 求下列各余弦函数的值：

(1) $\cos\frac{31\pi}{6}$；　(2) $\cos\left(-\frac{79\pi}{6}\right)$；　(3) $\cos135°$.

3. 求下列正切函数的值：

(1) $\tan\frac{14\pi}{3}$；　(2) $\tan\frac{21\pi}{4}$；　(3) $\tan(-675°)$.

第五节　三角函数的图像和性质

一、正弦函数的图像和性质

下面研究三角函数的时候，按照惯例采用字母 x 来表示角(自变量).

在平面直角坐标系中，可以利用描点法得到正弦函数的图像. 一般地，作图时自变量 x 应采用弧度制.

现在利用描点法画出正弦函数的图像. 把区间$[0,2\pi]$分为 8 等份，分别求得函数 $y=\sin x$ 在各分点及区间端点的函数值，列表如表 3-4 所示：

表 3-4

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$y=\sin x$	0	0.71	1	0.71	0	-0.71	-1	-0.71	0

以表中每组(x,y)的值作为点的坐标，在直角坐标系内作出对应的点，把它们依次连结成光滑的曲线，就得到了正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$[0,2\pi]$上的图像，如图 3-13 所示. 因为终边相同的角有相同的三角函数值，所以将函数$y=\sin x$在$[0,2\pi]$上的图像向左或向右平移(每次移动 2π 个单位长度)，这样就得到正弦函数 $y=\sin x$ 在 **R** 上的图像，如图 3-14 所示. 正弦函数的图像叫做**正弦曲线**.

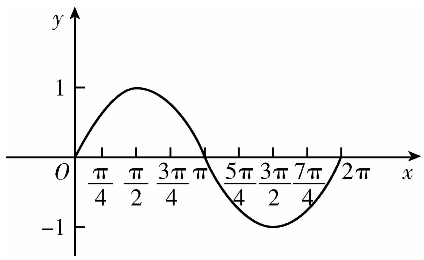


图 3-13

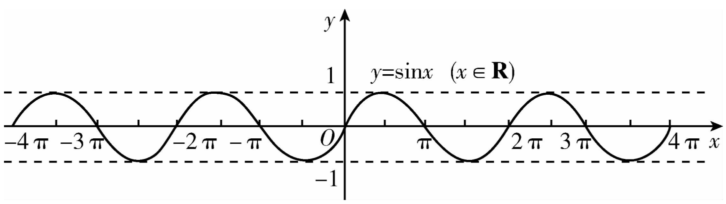


图 3-14

观察发现，正弦函数 $y=\sin x$ 在$[0,2\pi]$上的图像有五个关键点：

$$(0,0),\left(\frac{\pi}{2},1\right),(\pi,0),\left(\frac{3\pi}{2},-1\right),(2\pi,0).$$

在直角坐标系中，描出这五个点后，正弦函数 $y=\sin x$ 在$[0,2\pi]$上的图像的形状就基本上确定了. 因此在精确度要求不高时，经常先找出这五个关键点，然后用光滑的曲线把它们连结起来，就得到了正弦函数在$[0,2\pi]$上的简图. 这种作图的方法叫做“**五点法**”.

下面我们研究正弦函数的主要的性质.

(1)定义域

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域是 **R**.

(2)值域

正弦函数 $y=\sin x$ 的值域为$[-1,1]$. 当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$时，函数取得最大值 1；当 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，函数取得最小值-1.

(3)周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的常数 T，当 x 取定义域 D 内的每一个值时，都有 $x+T\in D$，并且等式 $f(x+T)=f(x)$ 成立，那么函数 $f(x)$ 叫做**周期函数**，常数 T 叫做这个函数的一个**周期**.

正弦函数的定义域是 $\mathbf{R}$，对 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $x+2k\pi\in\mathbf{R}(k\in\mathbf{Z})$，并且由诱导公式 $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ 可知，正弦函数是周期函数.

周期函数的周期不止一个，如 $2\pi,4\pi,6\pi,\cdots,-2\pi,-4\pi,-6\pi,\cdots$都是正弦函数的周期. 事实上，任何一个常数$2k\pi(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$都是正弦函数的周期.

如果周期函数的所有周期中存在一个最小的正数，那么就把它叫做**最小正周期**. 一般在不引起混淆的情况下，我们所说的函数的周期都是指它的最小正周期. 例如，正弦函数的周期是 2π.

(4)奇偶性

观察正弦曲线，可以看到正弦曲线关于原点 O 对称，即正弦函数是奇函数.

(5)单调性

由正弦曲线可以看出，当 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 时，曲线逐渐上升，$\sin x$ 的值由 -1 增大到 1；当 x 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，曲线逐渐下降，$\sin x$ 的值由 1 减小到 -1.

根据正弦函数的周期性可知：

正弦函数在每一个区间 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ 上都是增函数，其值从 -1 增大到 1；在每一个区间 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ 上都是减函数，其值从 1 减小到 -1.

例 1　利用"五点法"作函数 $y=1+\sin x$ 在区间$[0,2\pi]$上的图像.

解　按五个关键点列表，如表 3-5 所示：

表 3-5

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=1+\sin x$	1	2	1	0	1

以表中每组(x,y)的值作为点的坐标，描点并将它们用光滑的曲线连结起来，就得到函数 $y=1+\sin x$ 在区间$[0,2\pi]$上的图像，如图 3-15 所示.

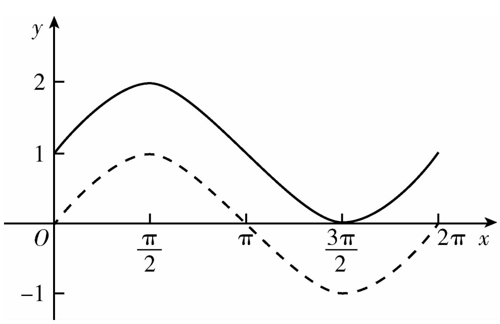


图 3-15

例 2　已知 $\sin\alpha=3-a$，求 a 的取值范围.

解　因为 $\sin\alpha$ 的值域为$[-1,1]$，所以

$$-1\leqslant 3-a\leqslant 1,$$

解得

$$2\leqslant a\leqslant 4.$$

例 3　求下列函数的周期：

(1) $y=\sin x+2, x\in\mathbf{R}$；　　(2) $y=\sin 4x, x\in\mathbf{R}$.

解　(1)因为 $\sin(x+2\pi)+2=\sin x+2$，所以由周期函数的定义可知，函数 $y=\sin x+2$ 的周期为 2π.

(2)因为 $\sin 4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(4x+2\pi)=\sin 4x$，所以由周期函数的定义可知，函数 $y=\sin 4x$ 的周期为$\frac{\pi}{2}$.

练一练

1. 利用“五点法”作函数 $y=2\sin x$ 在区间$[0,2\pi]$上的图像.
2. 已知 $\sin\alpha=a+2$，求 a 的取值范围.
3. 求下列函数的周期：

(1) $y=2\sin\frac{x}{4}, x\in\mathbf{R}$；　　(2) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right), x\in\mathbf{R}$.

二、余弦函数的图像和性质

现在利用描点法画出余弦函数的图像. 把区间$[0,2\pi]$分为 8 等份，分别求得函数 $y=\cos x$ 在各分点及区间端点的函数值，列表如表 3-6 所示：

表 3-6

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$y=\cos x$	1	0.71	0	-0.71	-1	-0.71	0	0.71	1

以表中每组(x,y)的值作为点的坐标，在直角坐标系内作出对应的点，把它们依次连结成光滑的曲线，就得到了余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,2\pi]$上的图像，如图 3-16 所示.

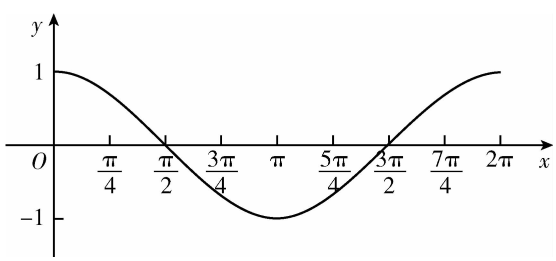


图 3-16

因为终边相同的角有相同的三角函数值，所以将函数$y=\cos x$在$[0,2\pi]$上的图像向左或

向右平移(每次移动 2π 个单位长度)，这样就得到余弦函数 $y=\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图像，如图3-17所示. 余弦函数的图像叫做**余弦曲线**.

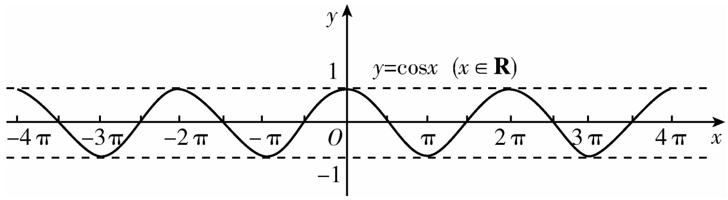


图 3-17

下面我们研究余弦函数的主要的性质.

(1)定义域

余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

(2)值域

余弦函数 $y=\cos x$ 的值域为$[-1,1]$. 当 $x=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，函数取得最大值 1；当 $x=(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时，函数取得最小值-1.

(3)周期性

余弦函数的定义域是 $\mathbf{R}$，对 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $x+2k\pi\in\mathbf{R}(k\in\mathbf{Z})$，并且由诱导公式 $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ 可知，与正弦函数相同，余弦函数也是周期函数，它的周期是 $2k\pi(k\in\mathbf{Z},k\neq 0)$，并且最小正周期是 2π.

(4)奇偶性

观察余弦曲线，可以看到余弦曲线关于 y 轴对称，即余弦函数是偶函数.

(5)单调性

由余弦曲线可以看出，当 x 由 0 增大到 π 时，曲线逐渐下降，$\cos x$ 的值由 1 减小到-1；当 x 由 π 增大到 2π 时，曲线逐渐上升，$\cos x$ 的值由-1 增大到 1.

根据余弦函数的周期性可知：

余弦函数在每一个区间$[(2k-1)\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上都是增函数，其值从$-1$ 增大到 1；在每一个区间$[2k\pi,(2k+1)\pi](k\in\mathbf{Z})$上都是减函数，其值从 1 减小到$-1$.

例 4　利用“五点法”作出函数 $y=-\cos x$ 在区间$[0,2\pi]$上的图像.

解　按五个关键点列表如表 3-7 所示：

表 3-7

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$-\cos x$	-1	0	1	0	-1

以表中每组(x,y)的值作为点的坐标，描点并将它们用光滑的曲线连结起来，就得到函数 $y=-\cos x$ 在区间$[0,2\pi]$上的图像，如图 3-18 所示.

例 5　求使函数 $y=\cos 2x$ 取得最小值的 x 的集合，并指出最小值.

解　设 $u=2x$，则使函数 $y=\cos u$ 取得最小值-1 的角的集合是

$$\{u\mid u=(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}.$$

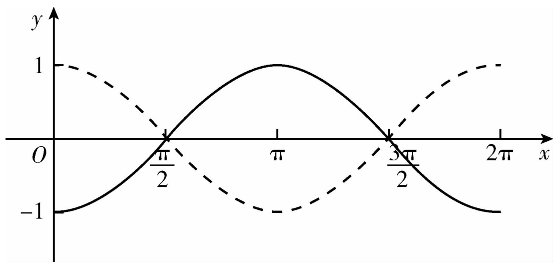


图 3-18

由 $2x=u=(2k+1)\pi$ 得

$$x=\frac{(2k+1)\pi}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}.$$

故所求的集合为$\left\{x \mid x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$，函数 $y=\cos2x$ 的最小值为-1.

练一练

1. 利用“五点法”作出函数 $y=2-\cos x$ 在区间$[0,2\pi]$上的图像.
2. 求下列函数的周期：
(1)$y=3\cos x+1, x\in\mathbf{R}$；　　(2)$y=\cos2x, x\in\mathbf{R}$.
3. 求使函数 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$取得最大值的 x 的集合，并指出最大值.

三、正切函数的图像与性质

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为$\left\{x \middle| x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为 $\mathbf{R}$，下面先用描点法作出它在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内的图像，列表如表 3-8 所示：

表 3-8

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y=\tan x$	-1.7	-1	-0.68	0	0.58	1	1.7

描点并连线，可以得到 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内的图像如图 3-19 所示.

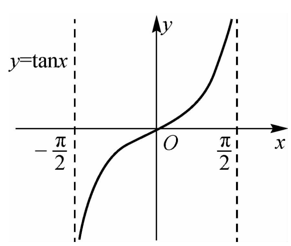


图 3-19

由公式 $\tan(x+\pi)=\tan x$，可知 $y=\tan x$ 是周期为 π 的周期函数. 因此，只要把 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内的图像分别向左、右平移 $k\pi(k\in\mathbf{Z})$个单位，就可以得到 $y=\tan x$ 的图像如图 3-20 所示. 正切函数的图像称为正切曲线.

由图 3-20 可以看出，正切曲线是由相互平行的直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 所隔开的无穷多支曲线所构成的.

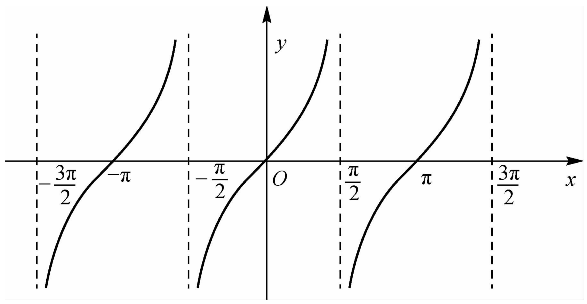


图 3-20

由正切函数的图像可知，正切函数有如下的性质.

(1)定义域

函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$

(2)值域

函数 $y=\tan x$ 的值域为 $\mathbf{R}$，因此，它是无界的.

(3)周期性

函数 $y=\tan x$ 是周期函数，周期为 π.

(4)奇偶性

由公式 $\tan(-x)=-\tan x$ 可知，$y=\tan x$ 是奇函数，它的图像关于原点对称.

(5)单调性

函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 内是单调递增的.

四、余切函数的图像与性质

用类似于正切函数的作图方法，可以作出余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$ 内的图像如图 3-21 所示. 余切函数的图像称为余切曲线.

由图 3-21 可以看出，正切曲线是由相互平行的直线 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 所隔开的无穷多支曲线所构成的.

由余切函数的图像可知，余切函数有如下的性质.

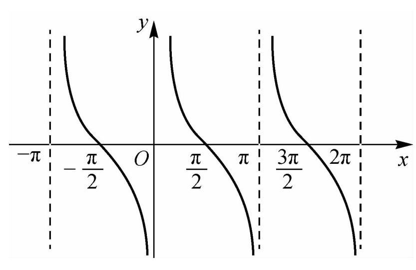


图 3-21

(1)定义域

函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

(2)值域

函数 $y=\cot x$ 的值域为，因此，它是无界的.

(3)周期性

函数 $y=\cot x$ 是周期函数，周期为 π.

(4)奇偶性

由公式 $\cot(-x)=-\cot x$ 可知,$y=\cot x$ 是奇函数,它的图像关于原点对称.

(5)单调性

函数 $y=\cot x$ 在$(k\pi,\pi+k\pi)(k\in\mathbf{Z})$内是单调递减的.

例 6　比较下列各组函数值的大小:

(1)$\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$与 $\cos\left(\dfrac{19\pi}{8}\right)$;　　　(2)$\tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$与 $\tan\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)$

解　(1)因为 $\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)=\cos\dfrac{\pi}{8}$,$\cos\left(\dfrac{19\pi}{8}\right)=\cos\left(2\pi+\dfrac{3\pi}{8}\right)=\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$,且 $0<\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{3\pi}{8}<\pi$,而 $y=\cos x$ 在$(0,\pi)$内是减函数,所以 $\cos\dfrac{\pi}{8}>\cos\dfrac{3\pi}{8}$,即

$$\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)>\cos\left(\frac{19\pi}{8}\right)$$

(2)因为 $\tan\dfrac{6\pi}{5}=\tan\left(\pi+\dfrac{\pi}{5}\right)=\tan\dfrac{\pi}{5}$,且$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{5}<\dfrac{2\pi}{5}<\dfrac{\pi}{2}$,而 $\tan\dfrac{2\pi}{5}>\tan\dfrac{\pi}{5}$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内是增函数,所以 $\tan\dfrac{2\pi}{5}>\tan\dfrac{\pi}{5}$,即

$$\tan\frac{2\pi}{5}>\tan\frac{6\pi}{5}.$$

例 7　求函数 $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的定义域.

解　令 $u=x-\dfrac{\pi}{3}$,则 $y=\tan u$,从而有 $u\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

由 $u=x-\dfrac{\pi}{3}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$,得

$$x\neq\frac{5\pi}{6}+k\pi$$

所以,函数 $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$的定义域为$\left\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

第六节　正弦型曲线

一、正弦型函数的概念和性质

我们已经学习了正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$. 在物理学和电学中,我们经常会遇到形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的函数,这类函数称为**正弦型函数**. 它与正弦函数 $y=\sin x$ 有着密切的关系.

我们先来讨论正弦型函数的周期. 在正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$中,令 $z=\omega x+\varphi$,则

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)=A\sin z.$$

我们已经知道正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,周期为 2π,值域为$[-1,1]$. 因此,函数

$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的定义域为$\mathbf{R}$,并且

$$\begin{aligned}y&=A\sin(\omega x+\varphi)=A\sin z=A\sin(z+2\pi)\\&=A\sin[(\omega x+\varphi)+2\pi]=A\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right],\end{aligned}$$

即 $A\sin(\omega x+\varphi)=A\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right](A>0,\omega>0)$.

设 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$,则 $f(x)=f\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)$. 因此,正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$也是周期函数,其周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

由于正弦函数 $y=\sin x$ 的值域为$[-1,1]$,所以$y=A\sin z(A>0)$的值域为$[-A,A]$,即正弦型函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的最大值为 A,最小值为$-A$.

综上所述,正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$主要有以下性质:

(1)定义域为 $\mathbf{R}$;

(2)周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$;

(3)值域为$[-A,A]$,即最大值为 A,最小值为$-A$.

例 1　求正弦型函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$和 $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)$的周期.

解　根据正弦型函数的周期公式 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,可知 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi;$$

$y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)$的周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi.$$

例 2　求函数 $y=3\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$的周期和最大值、最小值,并求在什么情况下函数取得最大值和最小值.

解　根据正弦型函数的性质,我们可得函数 $y=3\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$的周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

设 $z=4x+\frac{\pi}{3}$,即 $x=\frac{z}{4}-\frac{\pi}{12}$,则

当 $z=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,即 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$时,函数 $y=3\sin z$ 有最大值,最大值为 3;

当 $z=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,即 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$时,函数 $y=3\sin z$ 有最小值,最小值为-3.

所以,当 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$时,函数 $y=3\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$取得最大值 3;当 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$时,

函数 $y=3\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$ 取得最小值 -3.

一般地,研究函数 $y=a\sin x+b\cos x(a>0,b>0)$ 时,首先要把函数转化为正弦型函数 $y=A\sin(x+\theta)$ 的形式. 如图 3-22 所示,考察以 (a,b) 为坐标的点 P,设以 OP 为终边的角为 θ,则

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\tan\theta=\frac{b}{a},$$

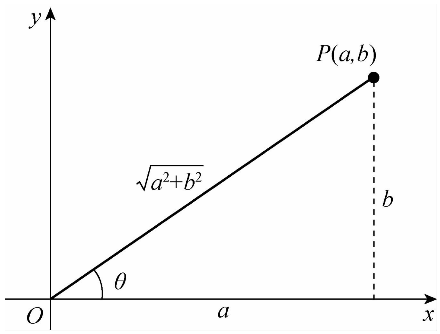


图 3-22

于是

$$\begin{aligned}a\sin x+b\cos x&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta),\end{aligned}$$

即 $A=\sqrt{a^2+b^2}$,角 θ 的值可以由 $\tan\theta=\frac{b}{a}$ 确定(角 θ 所在的象限与点 P 所在的象限相同).

例 3　求函数 $y=\cos x+\sin x$ 的最大值和最小值.

解　因为

$$\begin{aligned}y&=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)\\&=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

故函数 $y=\cos x+\sin x$ 的最大值为 $\sqrt{2}$,最小值为 $-\sqrt{2}$.

练一练

1. 求下列函数的最大值、最小值和周期:

(1) $y=8\sin 2x$;　　(2) $y=3\sin\frac{x+\pi}{3}$.

2. 求下列函数的最大值和最小值,并求出在什么情况下函数取得最大值和最小值:

(1) $y=13\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$;

(2) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

二、正弦型函数的图像

在研究正弦函数 $y=\sin x$ 的图像时，我们介绍过"五点法"作图，即选取 $(0,0)$，$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$，$(\pi,0)$，$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$，$(2\pi,0)$ 作为五个特殊点来作图. 正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的图像与正弦函数的图像类似，我们一般也采用"五点法"来作正弦型函数的图像. 正弦型函数的图像称为**正弦型曲线**.

在 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中，令 $z=\omega x+\varphi$，我们分别取 $z=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$，求出对应的 x 的值和函数值 y，构成五组 (x,y). 分别以每组的 (x,y) 为坐标描点，描出对应的五个关键点，然后用光滑的曲线连接各点，即可以得到正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 在一个周期内的图像.

下面我们以具体的题为例，用"五点法"作出几个正弦型函数在一个周期内的简图，然后观察正弦型曲线的特征.

例 4　利用"五点法"作出正弦型函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在一个周期内的简图.

解　在函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 中 $\omega=2$，因此周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

为求出图像上的五个关键点的横坐标，令 $z=2x+\frac{\pi}{3}$，分别取 $z=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$，我们找出一个周期 π 内五个特殊的点，求出对应的 x 的值与函数 y 的值，见表 3-9.

表 3-9

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$z=2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	-1	0

以表中每组 (x,y) 为坐标描点，如图 3-23 所示，在直角坐标系中比较精确地描出对应的五个关键点：$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$，$\left(\frac{\pi}{12},1\right)$，$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$，$\left(\frac{7\pi}{12},-1\right)$，$\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$.

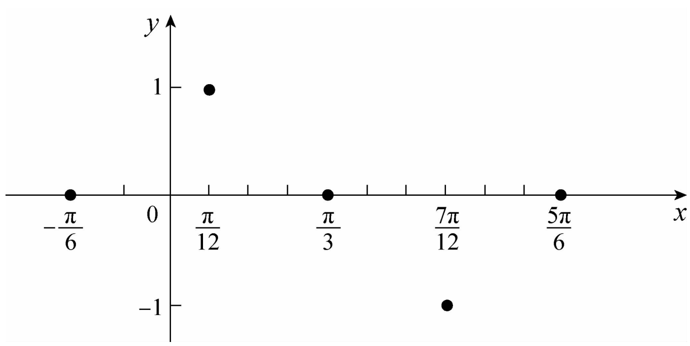


图 3-23

用光滑的曲线连接各点，得到函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$在一个周期内的图像，如图 3-24 所示.

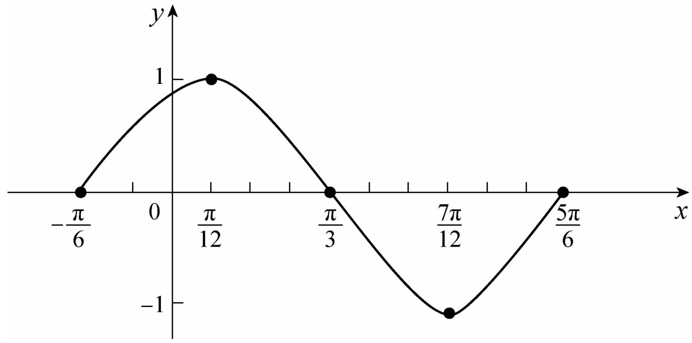


图 3-24

一般地，为了作出正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的图像，可令 $z=\omega x+\varphi$，然后利用上面的方法，即求得一个周期内的正弦型曲线的五个关键点的坐标，依次为

$$\left(-\frac{\varphi}{\omega},0\right),\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{4},A\right),\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{2},0\right),\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{3T}{4},-A\right),\left(-\frac{\varphi}{\omega}+T,0\right),$$

其中 T 为函数的周期.

例 5　利用"五点法"作出函数 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$在一个周期内的图像.

解　这里 $\omega=\frac{1}{2}$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$，故函数 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$的周期为

$$T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi,$$

且 $-\frac{\varphi}{\omega}=-\frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}}=-\frac{\pi}{3}$，所以五个关键点的坐标分别为

$$\left(-\frac{\pi}{3},0\right),\left(\frac{2\pi}{3},2\right),\left(\frac{5\pi}{3},0\right),\left(\frac{8\pi}{3},-2\right),\left(\frac{11\pi}{3},0\right).$$

描出这五个关键点，然后用光滑的曲线连接各点，即得到函数 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$在一个周期内的图像，如图 3-25 所示.

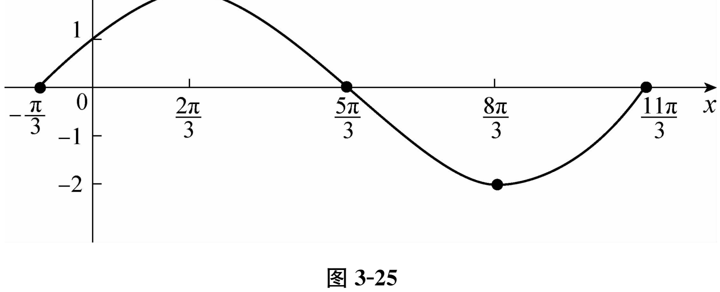


图 3-25

练一练

利用“五点法”作出下列函数在一个周期内的图像：

(1) $y=4\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$；(2) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

三、正弦型函数的应用

在电学中，电流强度的大小和方向都随时间变化的电流称为**交变电流**，简称**交流电**. 最简单的是简谐交流电，其电流强度的大小和方向随时间而变化，可以用如下函数来表示：

$$I=I_m\sin(\omega t+\varphi_0)\ (I_m>0,\omega>0,-\pi\leqslant\varphi_0\leqslant\pi),$$

其中 I_m 是电流强度的最大值，称为简谐交流电的**峰值**；ω 称为**角频率**，单位为 rad/s；$\omega t+\varphi_0$ 称为**相位**，φ_0 称为**初相位**，简称初相；$T=\frac{2\pi}{\omega}$称为简谐交流电的**变化周期**，表示交流电完成一次周期性变化所需要的时间，单位为 s；单位时间内，交流电完成周期性变化的次数称为**频率**，用 f 表示，$f=\frac{1}{T}$，单位为 Hz(赫兹).

峰值、频率和初相位是简谐交流电的三要素，它们从不同的方面描述了简谐交流电的物理特征.

在物理学中，用 $s=A\sin(\omega t+\varphi)$ $(t\in[0+\infty),A>0,\omega>0)$表示简谐振动，其中 t 表示振动的时间，s 表示位移，A 表示振动时离开平衡位置的最大距离，通常将 A 称为**振幅**，故函数的最大值 $s_{\max}=A$，最小值 $s_{\min}=-A$，$T=\frac{2\pi}{\omega}$称为简谐振动的**变化周期**，$f=\frac{1}{T}$称为简谐振动的**变化频率**，$\omega t+\varphi$ 称为**相位**，φ 称为**初相位**.

一般地，正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0)$中，A 称为**振幅**(或峰值)，ω 称为**角频率**，φ 称为**初相位**.

例 6　已知简谐交流电的电流强度随时间 t 的变化规律为 $I=26\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$，求出它的峰值、周期、初相位和频率.

解　峰值 $I_m=26$ A；

周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{100\pi}=0.02$ s；

初相位 $\varphi_0=\frac{\pi}{3}$；

频率 $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.02}=50$ Hz.

例 7　已知简谐交流电的电流强度 I(单位:A)随时间 t(单位:s)变化的部分曲线如图 3-26 所示，试写出 I 与 t 的函数关系.

解　电流强度 I 随时间 t 的变化满足正弦型函数关系，故设所求的函数关系式为

$$I=I_m\sin(\omega t+\varphi_0).$$