第四章　三 角 函 数

第一节　角的概念推广和弧度制

一、角的概念推广

我们知道,角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形. 如图 4-1(a)所示,射线的端点是 O,它从位置 OA 旋转到另一位置 OB 形成的图形叫作**角**. 旋转位置开始的射线 OA 叫作角的**始边**,终止位置的射线 OB 叫作角的**终边**,端点 O 叫作角的**顶点**.

规定:按逆时针方向旋转所形成的角叫作**正角**,如图4-1(a)所示;按顺时针方向旋转所形成的角叫作**负角**,如图4-1(b)所示. 当射线没有做任何旋转时,我们称它形成一个**零角**,零角的始边与终边重合.

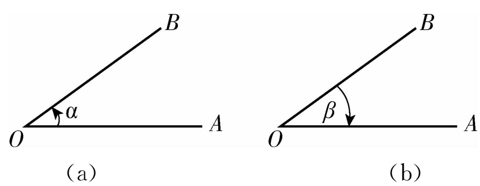


图 4-1

想一想

钟表上时针现在指向 8 点,问再过 27 小时,时针指向几点? 这段时间中时针走过的角度是多少?

在以前所学的知识中,我们只研究了 0°～360°范围的角,但在现实生活中我们还会遇到更大范围的角. 例如,游乐场的摩天轮,当它一圈又一圈地转动着的时候,

其转动的角度不是只限于 $0°\sim360°$. 为了描述这种现实状况，我们把角的概念加以推广，即推广到任意角，包括正角、负角和零角. 如图 4-2 所示，正角 $\alpha=210°$，负角 $\beta=-150°$.

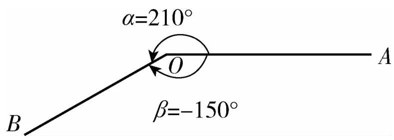


图 4-2

为了方便研究，我们经常在平面直角坐标系中研究角. 将角的顶点与坐标原点重合，始边与 x 轴的正半轴重合.

坐标平面被直角坐标系分为四个部分，如图 4-3 所示，分别叫作第一象限、第二象限、第三象限、第四象限. 坐标轴上的点不属于任何象限. 此时，角的终边在第几象限，就把这个角叫作第几象限的角，或者说这个角在第几象限.

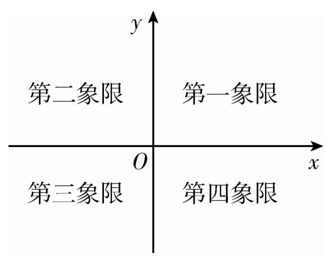


图 4-3

例 1 如图 4-4 所示，$60°$、$420°$、$-300°$角都是第一象限的角，见图 4-4(a)；$150°$角是第二象限的角，$-150°$角是第三象限的角，见图 4-4(b)；$-30°$、$330°$角都是第四象限的角，见图 4-4(c).

终边在坐标轴上的角叫作**界线角**，如 $0°$、$90°$、$180°$、$270°$、$360°$、$-90°$、$-180°$角都是界线角.

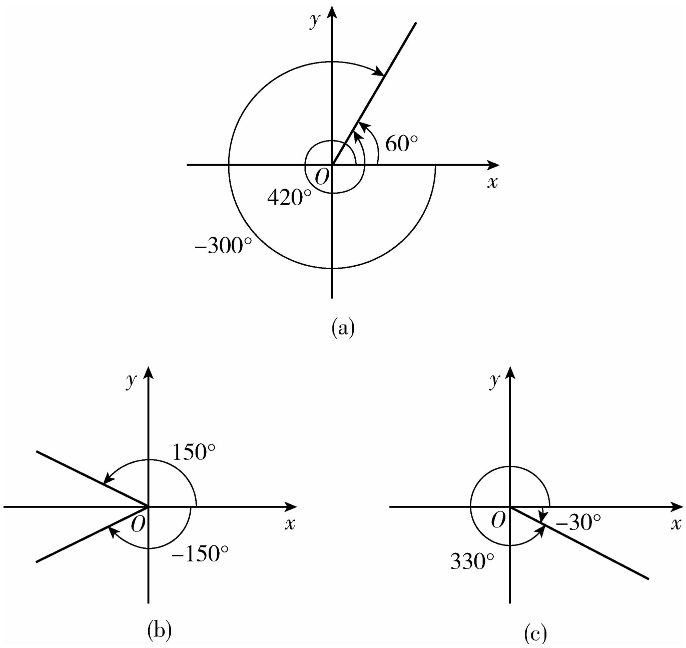


图 4-4

课堂练习

指出下列角分别是第几象限的角：

(1)80°；　　(2)210°；

(3)-200°；　　(4)-50°.

从图 4-4(a)可以看出 420°、-300°角都与 60°角的终边相同，并且都可以表示成 60°与 k 个周角的和，其中 k 为整数，即

$$420^\circ=60^\circ+k\times360^\circ(k=1),$$

$$-300^\circ=60^\circ+k\times360^\circ(k=-1),$$

它们是角的始边绕坐标原点旋转到 60°角的终边位置

想一想

锐角是第几象限的角？第一象限的角一定是锐角吗？

后,分别继续按逆时针或顺时针方向再旋转一周所形成的角,其终边都相同,因此将其叫作**终边相同的角**.与$60°$角的终边相同的角有无限多个,用集合表示为

$$\{\alpha \mid \alpha=60°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}.$$

一般地,与角α终边相同的角有无限多个,并且它们(包括角α在内)都可以写成$\alpha=60°+k\cdot 360°(k\in \mathbf{Z})$的形式,所以它们所组成的集合为

$$\{\beta \mid \beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}. \qquad (4\text{-}1)$$

例2 写出与下列各角终边相同的角的集合,把其中在$0°\sim360°$范围内的角写出来,并判断下列各角是第几象限的角:

(1)$470°$; (2)$-80°$.

解 (1)与角$470°$的终边相同的角的集合是

$$\{\beta \mid \beta=470°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}.$$

当$k=-1$时,$470°+(-1)\times 360°=110°$,并且$110°$在$0°\sim360°$的范围内,所以在$0°\sim360°$范围内与$470°$角的终边相同的角为$110°$;$470°$角是第二象限的角.

(2)与角$-80°$的终边相同的角的集合是

$$\{\beta \mid \beta=-80°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}.$$

当$k=1$时,$-80°+1\times 360°=280°$,并且$280°$在$0°\sim360°$的范围内,所以在$0°\sim360°$范围内与$-80°$角的终边相同的角为$280°$;$-80°$角是第四象限的角.

例3 写出终边在y轴上的角的集合.

解 在$0°\sim360°$范围内,终边在y轴正半轴上的角为$90°$,终边在y轴负半轴上的角为$270°$,因此,终边在y轴正半轴、负半轴上所有的角分别是

$$90°+k\cdot 360°=90°+2k\cdot 180°,$$

$$270°+k\cdot 360°=90°+(2k+1)\cdot 180°,$$

其中$k\in \mathbf{Z}$,可以将上面的两个式子进行合并,即终边在y轴上的角的集合为

想一想

终边在x轴上的角的集合如何表示?

$\{\beta \mid \beta=90^\circ+n\cdot 180^\circ, n\in \mathbf{Z}\}$.

当 n 取偶数时，角的终边在 y 轴的正半轴上；当 n 取奇数时，角的终边在 y 轴的负半轴上.

课堂练习

1. 下列说法正确的是(　　).

A. 第二象限的角一定是钝角

B. 终边在 y 轴正半轴的角是直角

C. 第四象限的角一定是负角

D. 若 $\beta=\alpha+k\cdot 360^\circ(k\in Z)$，则 α 与 β 的终边相同

2. 与 120° 角终边相同的角为(　　).

A. 420°　　　　B. -240°

C. -540°　　　　D. 600°

3. 钟表的时针每小时转过____度，分针每小时转过____度，秒针每小时转过____度.

二、弧度制

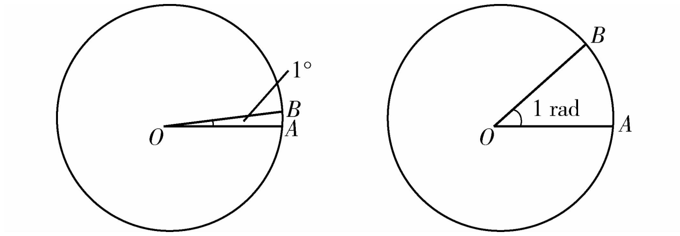
初中我们研究过角的度量，即将圆周的 $\frac{1}{360}$ 所对的圆心角叫作 1 **度角**，记作 1°，如图4-5(a)所示. 这种用“度”做单位来度量角度的单位制叫作**角度制**. 现在我们来学习另外一种度量角的单位制——弧度制.

把等于半径长的圆弧所对的圆心角叫作 1 **弧度的角**，记作 1 弧度或 1 rad，如图4-5(b)所示.

一般地，正角的弧度数是一个正数，负角的弧度数是一个负数，零角的弧度数是 0. 这种以弧度为单位来度量角的单位制叫作**弧度制**.

由定义可知，当角 α 用弧度表示时，其绝对值等于圆弧长 l 与半径 r 的比，即

$$|\alpha|=\frac{l}{r}(\text{rad}). \qquad (4\text{-}2)$$



(a)劣弧$\overset{\frown}{AB}$的弧长为$\frac{1}{360}$周长　　(b)劣弧$\overset{\frown}{AB}$的弧长为半径长

图 4-5

这里,角 α 的正负由其终边的旋转方向决定.

半径为 r 的圆的周长为 $2\pi r$,故周角的弧度为

$$\frac{2\pi r}{r}(\text{rad})=2\pi(\text{rad}).$$

用角度制和弧度制来度量零角,单位虽然不同,但量数相同,都是0;用角度制和弧度制度量任一非零角,单位不同,量数也不用.例如,周角的弧度数是 2π,而它在角度制下的度数是 $360°$.

由此得到两种单位制之间的换算关系:

$$360°=2\pi(\text{rad}),$$
$$180°=\pi(\text{rad}).$$

因此,角度与弧度的换算公式为

$$1°=\frac{\pi}{180}(\text{rad})\approx 0.01745(\text{rad}), \tag{4-3}$$

$$1\ \text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx 57.30°=57°18'. \tag{4-4}$$

例 4　将下列各角由角度换算为弧度:

(1)$15°$;　　(2)$105°$;　　(3)$-200°$.

解　(1)$15°=15\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{12}$;

(2)$105°=105\times\frac{\pi}{180}=\frac{7\pi}{12}$;

(3)$-200°=(-200)\times\frac{\pi}{180}=-\frac{10\pi}{9}$.

例 5　将下列各角由弧度换算为角度:

(1)$\frac{7\pi}{6}$；　　(2)$-\frac{4\pi}{9}$；　　(3)3.2.

解　(1)$\frac{7\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=210^\circ$；

(2)$-\frac{4\pi}{9}=-\frac{4\pi}{9}\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=-80^\circ$；

(3)$3.2=3.2\times\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ=\left(\frac{576}{\pi}\right)^\circ$.

表4-1中给出了一些特殊角的弧度与角度之间的换算.

表4-1

度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

采用弧度制之后，每一个角都对应唯一的一个实数；反之，每一个实数都对应唯一的一个角. 这样，角与实数之间就建立了一一对应的关系.

课堂练习

1. 将下列各角由角度转换为弧度.

(1)$67^\circ30'$；(2)390°；(3)-125°；(4)15°.

2. 将下列各角由弧度转换为角度.

(1)$\frac{7}{12}\pi$；(2)$\frac{3}{5}\pi$；(3)$-\frac{5}{9}\pi$；(4)$\frac{5}{6}\pi$.

软件练习

计算器使用与软件链接

利用计算工具可以轻松地完成弧度制与角度制的换算.

(1)利用 CASIO fx—82ES 型科学计算器.

首先进行计算器的设定,除了设定计算状态与精确度之外,还要设定角度计算模式或弧度计算模式.方法是依次按键 $\boxed{\text{SHIFT}}$、$\boxed{\text{MOOE}}$,继续按键数字 $\boxed{3}$ 选择角度制,按键数字 $\boxed{4}$ 选择弧度制.

角度单位的输入使用 $\boxed{{}^{\circ\,\prime\,\prime\prime}}$ 键,如输入 $5°2'3''$ 时依次按键 $\boxed{5}$、$\boxed{{}^{\circ\,\prime\,\prime\prime}}$、$\boxed{2}$、$\boxed{{}^{\circ\,\prime\,\prime\prime}}$、$\boxed{3}$、$\boxed{{}^{\circ\,\prime\,\prime\prime}}$.

利用 $\boxed{{}^{\circ\,\prime\,\prime\prime}}$ 键,还可以进行度的小数部分与分、秒间的换算.如前面输入 $5°2'3''$ 按键 $\boxed{=}$,显示 $5°2'3''$,再按 $\boxed{{}^{\circ\,\prime\,\prime\prime}}$ 键,显示 5.034 2,表示 $5.034\,2°$,再按 $\boxed{{}^{\circ\,\prime\,\prime\prime}}$ 键,又显示 $5°2'3''$.

利用 $\boxed{\text{Ans}}$ 键可以非常方便地进行角度制与弧度制的转换.

由角度转换成弧度时,首先将计算器设为弧度状态,设置精确角,并输入角度,然后依次按键 $\boxed{\text{SHIFT}}$、$\boxed{\text{Ans}}$、$\boxed{1}$、$\boxed{=}$.如输入 $55°18'46''$,依步骤可转换为 0.965 4 弧度(精确度设为 0.000 1).

将弧度转换成角度时,首先将计算器设为角度状态,设置精确度,并输入弧度,然后依次按键 $\boxed{\text{SHIFT}}$、$\boxed{\text{Ans}}$、$\boxed{2}$、$\boxed{=}$.如输入 $\frac{3\pi}{5}$,依步骤可转换为 $105°$.

(2)使用 Windows 计算器.

先点“查看”,设为“科学型”.要将角度换算成弧度,可以先输入角度数,再依次按键 $\boxed{*}$、$\boxed{\text{pi}}$、$\boxed{/}$、180、$\boxed{=}$ 即可得到结果.比如,输入 60,再依次按键 $\boxed{*}$、

$\boxed{\text{pi}}$、$\boxed{/}$、180、$\boxed{=}$，显示结果为 1.047 197 55…，即为 60°的弧度数.要将弧度换算成角度，可以先输入弧度数，再依次按键$\boxed{*}$、180、$\boxed{/}$、$\boxed{\text{pi}}$、$\boxed{=}$即可得到结果.比如，输入 2，再依次按键$\boxed{*}$、180、$\boxed{/}$、$\boxed{\text{pi}}$、$\boxed{=}$，显示结果为 114.591 559 02…，即为 2 的角度数；再比如，想求$\frac{3\pi}{5}$的角度数，按键 3、$\boxed{*}$、$\boxed{\text{pi}}$、$\boxed{/}$、5，再依次按键$\boxed{*}$、180、$\boxed{/}$、$\boxed{\text{pi}}$、$\boxed{=}$，显示结果为 180°，即为$\frac{3\pi}{5}$的角度数.

练习题 4-1

1.下列各角分别是第几象限的角：

(1)150°；　　(2)225°；

(3)310°；　　(4)$-580°$.

2.写出与下列各角终边相同的角的集合，并把其中在 0°～360°内的角写出来.

(1)$-65°$；　　(2)485°；

(3)1 190°.

3.将下列各角由角度换算为弧度：

(1)78°；　　(2)$-125°$；

(3)735°；　　(4)1 800°.

4.将下列各角由弧度换算为角度：

(1)$\frac{5\pi}{8}$；　　(2)$\frac{8\pi}{9}$；

(3)6.5；　　(4)7.8.

5.用弧度表示：

(1)终边在 x 轴上的角的集合；

(2)终边在 y 轴上的角的集合.

第二节　任意角的三角函数

一、任意角的正弦函数、余弦函数和正切函数

在初中我们已经学过了锐角的正弦、余弦和正切函数，并且在前边的内容中也已经推广了角的概念，现在利用直角坐标系把这三种三角函数推广到任意角的情况.

如图4-6所示，设α是平面直角坐标系中的一个任意角，点$P(x,y)$为角α终边上的任意一点，点P到坐标原点$O(0,0)$的距离为$r=\sqrt{x^2+y^2}>0$，那么

(1)比值$\frac{y}{r}$叫作α的正弦，记作$\sin\alpha$，即$\sin\alpha=\frac{y}{r}$；

(2)比值$\frac{x}{r}$叫作α的余弦，记作$\cos\alpha$，即$\cos\alpha=\frac{x}{r}$；

(3)比值$\frac{y}{x}$叫作α的正切，记作$\tan\alpha$，即$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

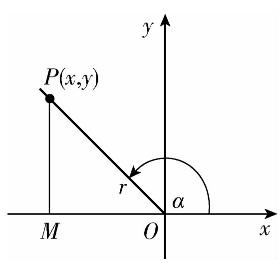


图 4-6

可以看出，当角α的终边在y轴上时，$\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，终边上任意一点的横坐标x的值都等于0，此时$\tan\alpha=\frac{y}{x}$无意义，即对于每一个确定的α值，其正弦、余弦及正切(当$x\neq0$时)都分别对应一个确定的比值.

因此，正弦、余弦及正切都是以 α 为变量的函数，分别叫作正弦函数、余弦函数及正切函数，它们都是三角函数. 表4-2所示为正弦函数、余弦函数和正切函数的定义域.

表 4-2

三角函数	定义域
$\sin\alpha$	**R**
$\cos\alpha$	**R**
$\tan\alpha$	$\{\alpha \mid \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$

例 1　已知角 α 的终边经过点 $P(3,4)$，求角 α 的正弦值、余弦值和正切值.

解　如图 4-7 所示，因为 $x=3$，$y=4$，所以 $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$.

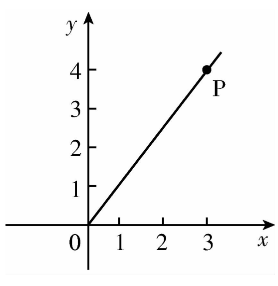


图 4-7

例 2　已知角 α 的终边经过点 $P(2,-3)$，求角 α 的正弦值、余弦值和正切值.

解　如图 4-8 所示，因为 $x=2$，$y=-3$，所以 $\gamma=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$，因此 $\sin\alpha=\frac{y}{\gamma}=\frac{-3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，

$\cos\alpha=\frac{x}{\gamma}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{3}{2}$.

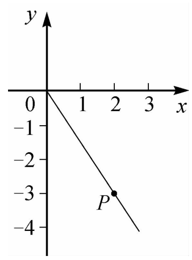


图 4-8

课堂练习

已知角 α 终边上的点 P 的坐标如下，分别求出它的正弦值、余弦值和正切值：

(1)$P(1,\sqrt{3})$；　　(2)$P(-6,8)$；

(3)$P(-1,-2)$.

二、三角函数的正负号

1. 任意角的正弦函数、余弦函数和正切函数在各象限的正负号

由于 $r>0$，所以三角函数值的正负由终边上点 P 的坐标来确定. 因此由三角函数的定义以及各象限内的点的坐标的符号可知：

(1)正弦值 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，对于第一、二象限的角来说是正的($y>0$)；对于第三、四象限的角来说是负的($y<0$).

(2)余弦值 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$，对于第一、四象限的角来说是正的($x>0$)；对于第二、三象限的角来说是负的($x<0$).

(3)正切值 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$，对于第一、三象限的角来说是正的(x、y 同号)；对于第二、四象限的角来说是负的

（x、y异号）.

为了便于记忆，我们将三角函数的正负号标在各个象限内，如图4-9所示.

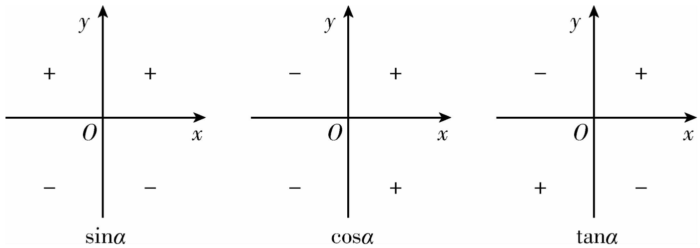


图 4-9

学习提示

在第一象限 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 全为正，在第二象限仅 $\sin\alpha$ 为正，在第三象限仅 $\tan\alpha$ 为正，在第四象限仅 $\cos\alpha$ 为正，此规律可简记为"一全正，二正弦，三正切，四余弦".

例 3　判断下列各角的三角函数的正负号：

（1）$525°$；　　　　（2）$-\dfrac{3\pi}{4}$.

解　（1）因为 $525°=165°+360°$，所以 $525°$角为第二象限的角，所以

$$\sin525°>0,\quad \cos525°<0,\quad \tan525°<0.$$

（2）因为$-\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}-2\pi$，所以角$-\dfrac{3\pi}{4}$为第三象限的角，故

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)<0,\quad \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)<0,\quad \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)>0.$$

课堂练习

1. 判断下列各角的三角函数的正负号：

（1）$-100°$；　　　　（2）$\dfrac{13\pi}{5}$.

2. 若 $\sin\theta>0$ 且 $\cos\theta<0$，则 θ 是第几象限的角？

2. 界线角的正弦值、余弦值和正切值

由于零角的终边与 x 轴的正半轴重合，并且 r 为点

P 到原点的距离,所以对于角终边上的任意点 $P(x,y)$ 都有 $r=x,y=0$. 因此根据三角函数的定义,有

$$\sin 0=\frac{y}{r}=\frac{0}{r}=0,$$

$$\cos 0=\frac{x}{r}=\frac{r}{r}=1,$$

$$\tan 0=\frac{y}{x}=\frac{0}{r}=0.$$

同样,我们还可以得到 $\frac{\pi}{2}$,π,$\frac{3\pi}{2}$,2π 等界线角的三角函数值的情况,如表 4-3 所示.

表 4-3

角度 三角函数	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	不存在	0	不存在	0

例 4 计算 $\cos\pi+\tan 0-2\tan\pi+\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}$.

解 $\cos\pi+\tan 0-2\tan\pi+\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}$

$=-1+0-2\times 0+(-1)+0$

$=-2.$

课堂练习

计算 $4\sin 90^\circ-2\sin 0^\circ+6\tan 180^\circ+\cos 270^\circ$.

三、利用计算器求任意角的三角函数值

利用科学计算器的 $\boxed{\text{sin}}$、$\boxed{\text{cos}}$、$\boxed{\text{tan}}$ 键,就可以方便地计算任意角的三角函数值. 主要步骤是:设置模式(角

度制或弧度制)→按$\boxed{\sin}$键(或$\boxed{\cos}$、$\boxed{\tan}$键)→输入角的大小→按$\boxed{=}$键显示结果.

例 4　利用计算器求下列各三角函数值(精确到 0.000 1):

(1)$\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$;　　(2)$\tan 227°$;

(3)$\cos\frac{3\pi}{5}$;　　(4)$\tan 4.5$;

(5)$\cos 27°$;　　(6)$\sin 2\,008°$.

解　(1)$\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)\approx -0.781\,8$;

(2)$\tan 227°\approx 1.072\,4$;

(3)$\cos\frac{3\pi}{5}\approx 0.309\,0$;

(4)$\tan 4.5\approx 4.637\,3$;

(5)$\cos 27°\approx 0.891\,0$;

(6)$\sin 2\,008°\approx -0.469\,5$.

课堂练习

利用计算器,求下列各三角函数值:

(1)$\sin\frac{2\pi}{7}$;　(2)$\tan 832°$;　(3)$\cos 528°$.

练习题 4-2

1. 选择题:

(1)已知角 α 的终边经过点$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,则 $\tan\alpha$ 的值是(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\sqrt{2}$

(2)下列各三角函数值中为负值的是(　　).

A. $\sin 1\ 100°$ B. $\cos(-3\ 000°)$

C. $\tan(-115°)$ D. $\tan\frac{5\pi}{4}$

2. 判断下列各角的三角函数值的正负号：

(1)$\frac{5\pi}{7}$；　(2)$-26°$；　(3)$-950°$.

3. 计算 $6\sin 270°+2\cos 180°-3\cos 90°+5\tan 0°$.

4. 根据条件判断角 α 是第几象限的角：

(1)$\sin\alpha<0,\tan\alpha>0$；　(2)$\cos\alpha<0,\tan\alpha>0$.

5. 利用计算器求下列各三角函数值：

(1)$\tan 6.5$；　(2)$\cos\frac{11\pi}{4}$；　(3)$\sin(-950°)$.

第三节　同角三角函数的基本关系

一、单位圆

在平面直角坐标系中，以原点为圆心，以单位长度为半径的圆称为单位圆. 如图 4-10 所示，设任意角 α 的终边与单位圆相交于点 $P(x,y)$，根据三角函数的定义，可得

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{1}=y,\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{x}{1}=x.$$

由此可见，角口的正弦值和余弦值分别等于其终边与单位圆的交点 P 的纵坐标 y 和横坐标 x. 因此，角 α 的终边与单位圆的交点 P 的坐标可以表示为 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$.

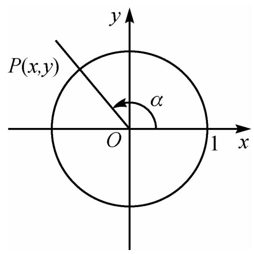


图 4-10

例 1　已知角 $\alpha=30^\circ$，求其终边与单位圆交点的坐标.

解　设角 α 的终边与单位圆相交于点 $P(x,y)$，根据三角函数的定义，可得

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{y}{1}=y,\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{x}{1}=x.$$

因为 $\alpha=30^\circ$，所以

$$\sin\alpha=\sin30^\circ=\frac{1}{2},\cos\alpha=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

故

$$y=\frac{1}{2},x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因此，角 α 的终边与单位圆的交点 P 的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$.

课堂练习

1. 已知角 $\alpha=45^\circ$，求其终边与单位圆交点的坐标.
2. 已知角 $\alpha=60^\circ$，求其终边与单位圆交点的坐标.

二、同角三角函数的基本关系

根据三角函数的定义，下面我们研究同角三角函数

间的一些基本关系.

由定义 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$,$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$($r^2=x^2+y^2$)可知

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{r^2}=1,$$

当 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$时,有

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\alpha.$$

学习提示

利用基本关系式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 求三角函数的值时,需要进行开平方运算,所以必须要明确角 α 所在的象限.

于是,我们得到同角三角函数的基本关系式:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, \qquad (4\text{-}5)$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z}). \qquad (4\text{-}6)$$

例 2 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$,且 α 是第三象限的角,求 $\sin\alpha$,$\tan\alpha$ 的值.

解 由同角三角函数的基本关系 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可得

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

又因为 α 是第三象限的角,所以 $\sin\alpha<0$,则

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5},$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}.$$

例 3 已知 $\sin\alpha=2\cos\alpha$,求下列各式的值:

(1)$\dfrac{\sin\alpha-4\cos\alpha}{5\sin\alpha+2\cos\alpha}$; (2)$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$.

解 因为 $\sin\alpha=2\cos\alpha$,所以

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha}=2.$$

$$\frac{\sin\alpha-4\cos\alpha}{5\sin\alpha+2\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha-4\cos\alpha}{5\times2\cos\alpha+2\cos\alpha}=\frac{2-4}{5\times2+2}=\frac{-2}{12}$$

$$=-\frac{1}{6};$$

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$

$$=\frac{\tan^2\alpha+2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{2^2+2\times2}{2^2+1}=\frac{8}{5}.$$

例 4　化简：$\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\dfrac{1}{\tan\alpha}-1}$.

解　$\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\dfrac{1}{\tan\alpha}-1}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-1}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha}}=\sin\alpha.$

例 5　求证：$\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

证法一　因为

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos}-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=0,$$

所以

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

证法二　因为

$$(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha=\sin\alpha\cdot\sin\alpha,$$

又　　$1+\cos\alpha\neq0,\sin\alpha\neq0,$

所以

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

证法三 由 $\sin\alpha\neq0$ 知 $\cos\alpha\neq1$,所以 $1-\cos\alpha\neq0$,于是

$$左边=\frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{(1-\cos^2\alpha)}=\frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=右边.$$

因此,原式成立.

课堂练习

1. 已知 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$,且 α 是第四角象限的角,求 $\sin\alpha$ 和 $\tan\alpha$.

2. 已知 $\tan\alpha=2$,求下列各式的值.

(1) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$; (2) $\dfrac{2\sin\alpha-\beta\cos\alpha}{\sin\alpha-4\cos\alpha}$.

练习题 4-3

1. 选择题:

(1)已知角 α 的终边上的一点的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,则 α 在( ).

A. 第一象限 B. 第二象限

C. 第三象限 D. 第四象限

(2)已知角 α 是第二象限的角,则点 $P(\tan\alpha,\sin\alpha)$在( ).

A. 第一象限 B. 第二象限

C. 第三象限 D. 第四象限

2. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$,且 α 是第二象限的角,求 $\cos\alpha$,$\tan\alpha$ 的值.

3. 已知 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$，且 α 是第四象限的角，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的值.

第四节 三角函数的诱导公式

一、角 α 与 $\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的三角函数间的诱导公式

由第一节可知，在直角坐标系中，角 α 与 $\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 的终边相同. 根据三角函数的定义，它们的三角函数值相等，即

$$\begin{cases}\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha,\\ \cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha,\\ \tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha.\end{cases}\tag{4-7}$$

利用上述公式，我们就可以把求任意角的三角函数的值转化为求 $0°\sim360°$ 的三角函数的值.

例 1 求下列三角函数的值：

(1) $\sin\dfrac{13\pi}{2}$； (2) $\cos\dfrac{19\pi}{3}$； (3) $\tan405°$.

解 (1) $\sin\dfrac{13\pi}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+6\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$；

(2) $\cos\dfrac{19\pi}{3}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+6\pi\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$；

(3) $\tan405°=\tan(45°+360°)=\tan45°=1$.

课堂练习

求下列三角函数的值：

(1) $\sin\dfrac{7\pi}{3}$； (2) $\cos\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right)$；

(3) $\tan750°$.

二、角α与-α的三角函数间的诱导公式

下面我们再研究任意角α与$-\alpha$的三角函数值之间的关系.如图4-11所示,设单位圆与角α和$-\alpha$的终边的交点分别为P和P',则点P的坐标是$(\cos\alpha,\sin\alpha)$,点P'的坐标是$(\cos(-\alpha),\sin(-\alpha))$.容易看出,点$P$和点$P'$关于$x$轴对称,则点$P'$的坐标也可以写为$(\cos\alpha,-\sin\alpha)$,所以可得

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

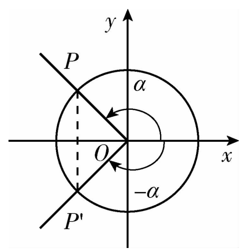


图 4-11

由同角三角函数的关系式可知

$$\tan(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha.$$

于是,我们得到角α与$-\alpha$的三角函数值之间的关系:

$$\begin{cases}\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha,\\ \tan(-\alpha)=-\tan\alpha.\end{cases}\tag{4-8}$$

想一想

$\sin\alpha+\cos\alpha=-[\sin(-\alpha)+\cos(-\alpha)]$?为什么?

利用上述公式,我们就可以把负角的三角函数转化为正角的三角函数.

例2 求下列三角函数的值:

(1)$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;(2)$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;(3)$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

解 (1)$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$;

(2) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(3) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

课堂练习

求下列三角函数的值：

(1) $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$；　(2) $\cos\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$；

(3) $\tan\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$.

三、角 α 与 π±α 的三角函数间的诱导公式

如图 4-12 所示，已知任意角 α 的终边与单位圆相交于点 P，由于角 $\pi+\alpha$ 的终边就是角 α 的终边的反向延长线，所以角 $\pi+\alpha$ 的终边与单位圆的交点 P' 与点 P 关于原点对称. 点 P 的坐标为 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$，点 P' 的坐标为 $(\cos(\pi+\alpha),\sin(\pi+\alpha))$，又由于点 P' 与点 P 关于原点对称，则点 P' 的坐标又可以写为 $(-\cos\alpha,-\sin\alpha)$，所以可得

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha.$$

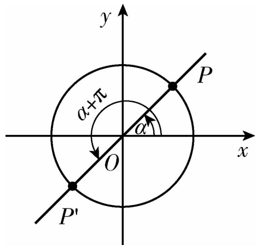


图 4-12

由同角三角函数的关系式可知

$$\tan(\pi+\alpha)=\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\tan\alpha.$$

于是，我们得到角 α 与 $\pi+\alpha$ 的三角函数值之间的关系：

$$\begin{cases}\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\\ \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha.\end{cases}\qquad(4\text{-}9)$$

如图 4-13 所示，设单位圆与角 α，$\pi+\alpha$，$\pi-\alpha$ 的终边分别相交于点 P，P'，P''. 从图 4-13 中可以看出，点 P' 与点 P'' 关于 x 轴对称，由此可以得到

$$\sin(\pi-\alpha)=-\sin(\pi+\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\cos(\pi-\alpha)=\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha.$$

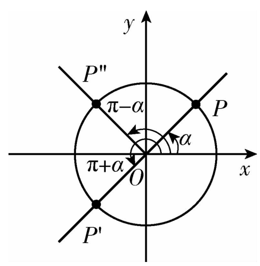


图 4-13

由同角三角函数的关系式可知

$$\begin{aligned}\tan(\pi-\alpha)&=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}\\ &=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}\\ &=-\tan\alpha.\end{aligned}$$

于是，我们得到角 α 与 $\pi-\alpha$ 的三角函数值之间的关系：

$$\begin{cases}\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\\ \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha.\end{cases}\qquad(4\text{-}10)$$

例 3 求下列三角函数的值：

学习提示

诱导公式的共同特点是：

(1)等号两边的三角函数的名称不变；

(2)等号右边三角函数前的正负号，与把角 α 看作锐角时，等号左边的角所在象限的三角函数符号相同.

(1)$\sin\frac{7\pi}{6}$；

(2)$\cos\frac{2\pi}{3}$.

解　(1)$\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$；

(2)$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

课堂练习

求下列三角函数的值：

(1)$\sin\frac{3\pi}{4}$；　　　　(2)$\cos\frac{5\pi}{6}$；

(3)$\tan\frac{2\pi}{3}$.

四、角 α 与 $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ 的三角函数间的诱导公式

在 Rt△ABC 中，若$\angle C=\frac{\pi}{2}$，则根据三角函数的定义，可得

$$\sin A=\frac{BC}{AB},\cos A=\frac{AC}{AB},\tan A=\frac{BC}{AC},$$

$$\sin B=\frac{AC}{AB},\cos B=\frac{BC}{AB},\tan B=\frac{AC}{BC}.$$

由此可以看出，当$\angle A+\angle B=\frac{\pi}{2}$时，有

$$\sin A=\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\frac{BC}{AB}=\cos B,$$

$$\cos A=\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\frac{AC}{AB}=\sin B,$$

$$\tan A=\tan\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\tan B}.$$

于是得到角$\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的诱导公式为

$$\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha, \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha, \\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{1}{\tan\alpha}.\end{cases} \tag{4-11}$$

其角度制下的表示形式为

$$\begin{cases}\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha, \\ \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha, \\ \tan(90^\circ-\alpha)=\dfrac{1}{\tan\alpha}.\end{cases}$$

根据式(4-10)和式(4-11)可得

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left[\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$,

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left[\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$,

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\tan\left[\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\dfrac{1}{\tan\alpha}$.

于是得到角$\dfrac{\pi}{2}+\alpha$的诱导公式为

$$\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha, \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha, \\ \tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\dfrac{1}{\tan\alpha}.\end{cases} \tag{4-12}$$

其角度制下的表示形式为

$$\begin{cases}\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha, \\ \cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha, \\ \tan(90^\circ+\alpha)=-\dfrac{1}{\tan\alpha}.\end{cases}$$

式(4-7)～式(4-12)统称为**诱导公式**. 利用诱导公式可以

把任意角的三角函数转化为锐角的三角函数，用以求三角函数式的值或化简三角函数式.

练习题 4-4

1. 求下列各正弦函数的值：

(1)$\sin\dfrac{19\pi}{6}$；　(2)$\sin\left(-\dfrac{27\pi}{4}\right)$；　(3)$\sin(-210°)$.

2. 求下列各余弦函数的值：

(1)$\cos\dfrac{31\pi}{6}$；　(2)$\cos\left(-\dfrac{79\pi}{6}\right)$；　(3)$\cos 135°$.

3. 求下列各正切函数的值：

(1)$\tan\dfrac{14\pi}{3}$；　(2)$\tan\dfrac{21\pi}{4}$；　(3)$\tan(-675°)$.

第五节　已知三角函数值求角

在第二节中，我们学习了利用计算器可以求出任意角的三角函数值. 本节我们将学习已知任意角的三角函数值，利用计算器求得指定范围的角.

一、已知正弦函数值求指定范围内的角

在科学计算器的标准设置中，已知正弦函数值，只能显示$-90°\sim90°\left(\text{或}-\dfrac{\pi}{2}\sim\dfrac{\pi}{2}\right)$范围内的角. 其步骤是：设定角度或弧度计算模式→按$\boxed{\text{SHIFT}}$键→按$\boxed{\sin}$键→输入正弦函数值→按$\boxed{=}$键显示$-90°\sim90°\left(\text{或}-\dfrac{\pi}{2}\sim\dfrac{\pi}{2}\right)$范围的角.

例 1　已知 $\sin x=0.6$，利用计算器求 $0°\sim360°$范围内的角 x(精确到 $0.01°$).

解 利用计算器得到锐角

$$x_1 \approx 36.87^\circ,$$

利用 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$,得到所求的钝角

$$x_2 \approx 180^\circ-36.87^\circ=143.13^\circ.$$

故 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内,正弦函数值为 0.6 的角为 36.87° 和 143.13°.

如果求指定范围内的角,那么还需要使用诱导公式.

已知正弦值,求指定范围内的角的主要步骤是:

(1)利用计算器求出 $-90^\circ \sim 90^\circ\left(或 -\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}\right)$ 范围内的角;

(2)利用诱导公式 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ 求出 $90^\circ \sim 270^\circ\left(或 \frac{\pi}{2} \sim \frac{3\pi}{2}\right)$ 范围内的角;

(3)利用诱导公式 $\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$ 求出指定范围内的角.

例 2 已知 $\sin x=-0.6$,利用计算器求区间 $[0,2\pi]$ 范围内的角 x(精确到 0.000 1).

解 利用计算器得到 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的角为

$$x \approx -0.643\ 5;$$

利用 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$,得到 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的角为

$$x_1 \approx \pi-(-0.643\ 5) \approx 3.785\ 1;$$

利用 $\sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha$,得到 $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上的角为

$$x_2 \approx 2\pi+(-0.643\ 5) \approx 5.639\ 7.$$

所以在区间 $[0,2\pi]$ 上,正弦值为 -0.6 的角为 3.785 1 和 5.639 7.

课堂练习

已知 $\sin x=-0.4$,利用计算器求区间 $[0,2\pi]$ 范围

内的角 x(精确到 0.000 1).

二、已知余弦函数值求指定范围内的角

在科学计算器的标准设置中，已知余弦函数值，只能显示 $0^\circ \sim 180^\circ$(或 $0 \sim \pi$)范围内的角.其步骤是:设定角度或弧度计算模式→按 $\boxed{\text{SHIFT}}$ 键 →按 $\boxed{\cos}$ 键→输入余弦函数值→按 $\boxed{=}$ 键显示 $0^\circ \sim 180^\circ$(或 $0 \sim \pi$)范围内的角. 如果求指定范围内的角，那么还需要使用诱导公式.

已知余弦值，求指定范围内的角的主要步骤是:

(1)利用计算器求出 $0^\circ \sim 180^\circ$(或 $0 \sim \pi$)范围内的角；

(2)利用诱导公式 $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ 求出 $-180^\circ \sim 0^\circ$(或 $-\pi \sim 0$)范围内的角；

(3)利用诱导公式 $\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$ 求出指定范围内的角.

例 3　已知 $\cos x=0.6$，利用计算器求 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 范围内的角 x(精确到 0.01°).

解　利用计算器求得在 $0^\circ \sim 180^\circ$范围内的角为

$$x_1 \approx 53.13^\circ;$$

利用 $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$，得到 $-180^\circ \sim 0^\circ$范围内的角为

$$x_2 \approx -53.13^\circ.$$

因此在 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 范围内余弦值为 0.6 的角为 $\pm 53.13^\circ$.

课堂练习

已知 $\cos x=0.4$，利用计算器求区间 $0 \sim 2\pi$ 范围内的角 x(精确到 0.000 1).

三、已知正切函数值求指定范围内的角

在科学计算器的标准设置中,已知正切函数值,只能显示$-90°\sim90°\left(或-\frac{\pi}{2}\sim\frac{\pi}{2}\right)$范围内的角.其步骤是:设定角度或弧度计算模式→按$\boxed{\text{SHIFT}}$键→按$\boxed{\tan}$键→输入正切函数值→按$\boxed{=}$键显示$-90°\sim90°\left(或-\frac{\pi}{2}\sim\frac{\pi}{2}\right)$范围内的角.如果求指定范围内的角,那么还需要使用诱导公式.

已知正切值,求指定范围内的角的主要步骤是:

(1)利用计算器求出$-90°\sim90°\left(或-\frac{\pi}{2}\sim\frac{\pi}{2}\right)$范围内的角;

(2)利用诱导公式$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$求出$90°\sim270°$$\left(或\frac{\pi}{2}\sim\frac{3\pi}{2}\right)$范围内的角;

(3)利用诱导公式$\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha$求出指定范围内的角.

例 4 已知$\tan x=0.6$,利用计算器求$0°\sim360°$范围内的角x(精确到$0.01°$).

解 利用计算器得到锐角

$$x_1\approx30.96°,$$

利用$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$,得到第三象限的角为

$$x_2\approx180°+30.96°=210.96°.$$

故$0°\sim360°$范围内,正切函数值为 0.6 的角为$30.96°$和$210.96°$.

课堂练习

已知$\tan x=0.4$,利用计算器求$0\sim2\pi$范围内的角

x(精确到 0.000 1).

练习题 4-5

1. 已知 $\sin x=0.8$,求$[0,2\pi]$内的角 x(精确到 0.000 1).

2. 已知 $\cos x=-0.3$,求 $0°\sim360°$范围内的角 x(精确到 $0.01°$).

3. 已知 $\tan x=0.6$,求$[0,2\pi]$内的角 x(精确到 0.000 1).

第六节　三角函数的图像和性质

一、正弦函数的图像和性质

下面研究三角函数的时候,按照惯例采用字母 x 来表示角(自变量).

在平面直角坐标系中,可以利用描点法得到正弦函数的图像. 一般地,作图时自变量 x 应采用弧度制.

现在利用描点法画出正弦函数的图像. 把区间$[0,2\pi]$分为 8 等份,分别求得函数 $y=\sin x$ 在各分点及区间端点的函数值,列表如表 4-4 所示.

表 4-4

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$y=\sin x$	0	0.71	1	0.71	0	-0.71	-1	-0.71	0

以表中每组(x,y)的值作为点的坐标,在直角坐标系内做出对应的点,把它们依次连结成光滑的曲线,就

得到了正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的图像，如图 4-14 所示.

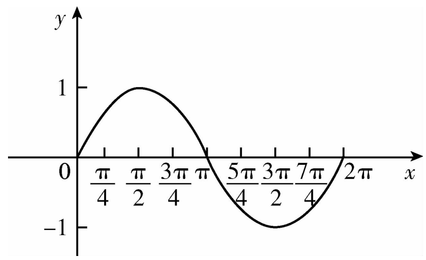


图 4-14

因为终边相同的角有相同的三角函数值，所以将函数 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图像向左或向右平移(每次移动 2π 个单位长度)，这样就得到正弦函数 $y=\sin x$ 在 **R** 上的图像，如图 4-15 所示. 正弦函数的图像叫作**正弦曲线**.

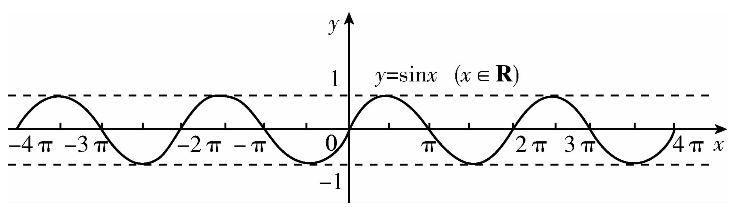


图 4-15

观察发现，正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图像有五个关键点：

$$(0,0),\left(\frac{\pi}{2},1\right),(\pi,0),\left(\frac{3\pi}{2},-1\right),(2\pi,0).$$

在直角坐标系中，描出这五个点后，正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图像的形状就基本上确定了. 因此在精确度要求不高时，经常先找出这五个关键点，然后用光滑的曲线把它们连结起来，就得到了正弦函数在 $[0,2\pi]$ 上的简图. 这种作图的方法叫作“**五点法**”.

> **思考与讨论**
>
> 用五点法作正弦函数 $y=\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的图像时，关键点是哪五个？

下面我们研究正弦函数的主要的性质.

(1)定义域.

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域是 **R**.

(2)值域.

正弦函数 $y=\sin x$ 的值域为 $[-1,1]$. 当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$时，函数取得最大值 1；当 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$时，函数取得最小值 -1.

(3)周期性.

对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的常数 T，当 x 取定义域 D 内的每一个值时，都有 $x+T\in D$，并且等式 $f(x+T)=f(x)$成立，那么函数 $f(x)$叫作**周期函数**，常数 T 叫作这个函数的一个**周期**.

正弦函数的定义域是 $\mathbf{R}$，对 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $x+2k\pi\in\mathbf{R}$ $(k\in\mathbf{Z})$，并且由诱导公式 $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ 可知，正弦函数是周期函数.

周期函数的周期不止一个，如 $2\pi, 4\pi, 6\pi, \cdots, -2\pi, -4\pi, -6\pi, \cdots$都是正弦函数的周期. 事实上，任何一个常数$2k\pi(k\in\mathbf{Z}, k\neq 0)$都是正弦函数的周期.

如果周期函数的所有周期中存在一个最小的正数，那么就把它叫作**最小正周期**. 一般在不引起混淆的情况下，我们所说的函数的周期都是指它的最小正周期. 例如，正弦函数的周期是 2π.

(4)奇偶性.

观察正弦曲线，可以看到正弦曲线关于原点 O 对称，即正弦函数是奇函数.

(5)单调性.

由正弦曲线可以看出，当 x 由 $-\frac{\pi}{2}$增大到$\frac{\pi}{2}$时，曲线逐渐上升，$\sin x$ 的值由 -1 增大到 1；当 x 由$\frac{\pi}{2}$增大到$\frac{3\pi}{2}$时，曲线逐渐下降，$\sin x$ 的值由 1 减小到 -1.

根据正弦函数的周期性可知：

想一想

$y=\sin x$ 在定义域内具有单调性吗？为什么？

正弦函数在每一个区间$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$($k\in\mathbf{Z}$)上都是增函数,其值从$-1$增大到1;在每一个区间$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$($k\in\mathbf{Z}$)上都是减函数,其值从1减小到$-1$.

例1 利用“五点法”作函数$y=1+\sin x$在区间$[0,2\pi]$上的图像.

解 按五个关键点列表,如表4-5所示.

表4-5

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=1+\sin x$	1	2	1	0	1

以表中每组(x,y)的值作为点的坐标,描点并将它们用光滑的曲线连结起来,就得到函数$y=1+\sin x$在区间$[0,2\pi]$上的图像,如图4-16所示.

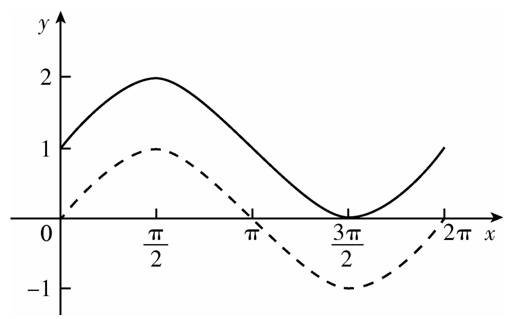


图4-16

例2 已知$\sin\alpha=3-a$,求a的取值范围.

解 因为$\sin\alpha$的值域为$[-1,1]$,所以

$$-1\leqslant 3-a\leqslant 1,$$

解得

$$2\leqslant a\leqslant 4.$$

例3 求下列函数的周期:

(1)$y=\sin x+2,x\in\mathbf{R}$;　　(2)$y=\sin 4x,x\in\mathbf{R}$.

解　(1)因为 $\sin(x+2\pi)+2=\sin x+2$，所以由周期函数的定义可知，函数 $y=\sin x+2$ 的周期为 2π.

(2)因为 $\sin4(x+\frac{\pi}{2})=\sin(4x+2\pi)=\sin4x$，所以由周期函数的定义可知，函数 $y=\sin4x$ 的周期为$\frac{\pi}{2}$.

课堂练习

1. 利用“五点法”作函数 $y=2\sin x$ 在区间$[0,2\pi]$上的图像.

2. 已知 $\sin\alpha=a+2$，求 a 的取值范围.

3. 求下列函数的周期：

(1)$y=2\sin\frac{x}{4}$，$x\in\mathbf{R}$；

(2)$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$.

二、余弦函数的图像和性质

现在利用描点法画出余弦函数的图像. 把区间$[0,2\pi]$分为 8 等份，分别求得函数 $y=\cos x$ 在各分点及区间端点的函数值，列表如表 4-6 所示.

表 4-6

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$y=\cos x$	1	0.71	0	−0.71	−1	−0.71	0	0.71	1

以表中每组(x,y)的值作为点的坐标，在直角坐标系内做出对应的点，把它们依次连结成光滑的曲线，就得到了余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,2\pi]$上的图像，如

图 4-17 所示.

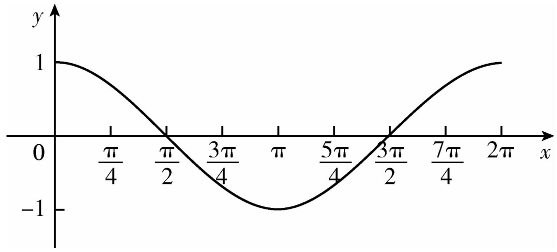


图 4-17

因为终边相同的角有相同的三角函数值,所以将函数$y=\cos x$在$[0,2\pi]$上的图像向左或向右平移(每次移动 2π 个单位长度),这样就得到余弦函数 $y=\cos x$ 在 **R** 上的图像,如图 4-18 所示.余弦函数的图像叫作**余弦曲线**.

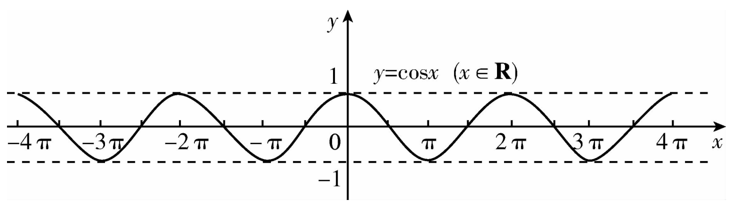


图 4-18

下面我们研究余弦函数的主要性质.

(1)定义域.

余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域是 **R**.

(2)值域.

余弦函数 $y=\cos x$ 的值域为$[-1,1]$.当 $x=2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,函数取得最大值 1;当 $x=(2k+1)\pi$,$k\in\mathbf{Z}$ 时,函数取得最小值-1.

(3)周期性.

余弦函数的定义域是 **R**,对 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $x+2k\pi\in\mathbf{R}$ $(k\in\mathbf{Z})$;并且由诱导公式 $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ 可知,与正弦函数相同,余弦函数也是周期函数,它的周期是 $2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$,并且最小正周期是 2π.

(4)奇偶性.

观察余弦曲线,可以看到余弦曲线关于 y 轴对称,即余弦函数是偶函数.

想一想

(1) $y=\cos x$ 在定义域内具有单调性吗?为什么?

(2)观察正弦曲线和余弦曲线,它们之间有什么联系?

(5)单调性.

由余弦曲线可以看出,当 x 由 0 增大到 π 时,曲线逐渐下降,$\cos x$ 的值由 1 减小到 -1;当 x 由 π 增大到 2π 时,曲线逐渐上升,$\cos x$ 的值由 -1 增大到 1.

根据余弦函数的周期性可知:

余弦函数在每一个区间 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上都是增函数,其值从 -1 增大到 1;在每一个区间 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上都是减函数,其值从 1 减小到 -1.

例 4　利用"五点法"作函数 $y=-\cos x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的图像.

解　按五个关键点列表如表 4-7 所示.

表 4-7

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$-\cos x$	-1	0	1	0	-1

以表中每组 (x, y) 的值作为点的坐标,描点并将它们用光滑的曲线连结起来,就得到函数 $y=-\cos x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的图像,如图 4-19 所示.

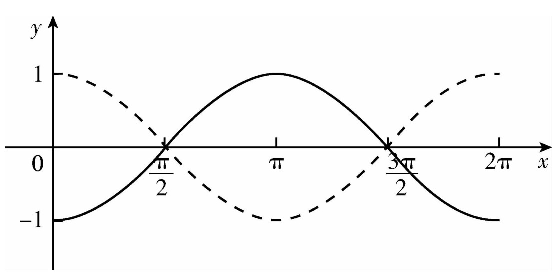


图 4-19

例 5　求使函数 $y=\cos 2x$ 取得最小值的 x 的集合,并指出最小值.

解 设 $u=2x$,则使函数 $y=\cos u$ 取得最小值 -1 的角的集合是

$$\{u \mid u=(2k+1)\pi, k\in \mathbf{Z}\}.$$

由 $2x=u=(2k+1)\pi$ 得

$$x=\frac{(2k+1)\pi}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}.$$

故所求的集合为 $\{x \mid x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\}$,函数 $y=\cos 2x$ 的最小值为 -1.

课堂练习

1. 利用“五点法”作函数 $y=2-\cos x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的图像.

2. 求下列函数的周期:

(1) $y=3\cos x+1, x\in \mathbf{R}$;

(2) $y=\cos 2x, x\in \mathbf{R}$.

3. 求使函数 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 取得最大值的 x 的集合,并指出最大值.

三、正切函数的图像和性质

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\{x \mid x\in \mathbf{R}, x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$.

首先用描点法作正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的图像.

把区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 分成 8 等份,分别求出函数 $y=\tan x$ 在各分点及区间端点的函数值,然后列表,如表 4-8 所示.

表 4-8

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$y=\tan x$	—	-1.73	-1	-0.58	0	0.58	1	1.73	—

以表中的 x 值为横坐标，以对应的 y 值为纵坐标，在直角坐标系中依次描出相应的点 (x,y)，然后用光滑的曲线依次连结这些点，即可得到函数 $y=\tan x$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的图像，如图 4-20 所示.

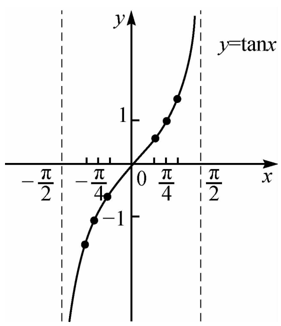


图 4-20

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\boldsymbol{R}, x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}\}$. 由诱导公式 $\tan(\pi+x)=\tan x(x\in\boldsymbol{R}, x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z})$ 可知，正切函数是周期函数，其周期为 π.

根据正切函数的周期性，把 $y=\tan x$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的图像向左或向右平移 $\pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$ 个单位，就可以得到 $y=\tan x$ 在定义域内的图像，如图 4-21 所示. 正切函数的图像称为正切曲线.

从图 4-21 中可以看出，正切曲线是由被相互平行的直线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\boldsymbol{Z})$ 所隔开的无穷多支曲线组成的.

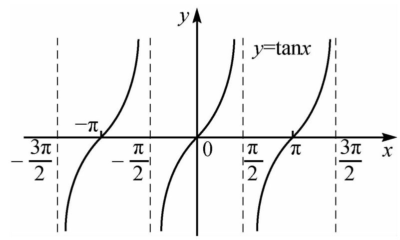


图 4-21

综上可知,正切函数 $y=\tan x$ 主要具有如下性质:

(1)定义域.

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为$\{x \mid x\in \boldsymbol{R}, x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \boldsymbol{Z}\}$.

(2)值域.

正切函数 $y=\tan x$ 的值域为 $\boldsymbol{R}$. 当 $x<\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in \boldsymbol{Z})$且 x 无限接近于$\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in \boldsymbol{Z})$时,$y=\tan x$ 的函数值无限接近于无穷大,但没有最大值;当 $x>\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in \boldsymbol{Z})$且 x 无限接近于$-\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in \boldsymbol{Z})$时,$y=\tan x$ 的函数值无限接近于无穷小,但没有最小值.

(3)周期性.

正切函数是周期为 π 的周期函数.

(4)奇偶性.

正切曲线关于原点 O 中心对称,因此正切函数 $y=\tan x$ 是奇函数.

(5)单调性.

当 x 由 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 时,正切曲线逐渐上升,$y=\tan x$ 的值由 $-\infty$ 增大到 $+\infty$.

根据周期性可知,正切函数在每一个开区间

$(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)(k\in \boldsymbol{Z})$上都是增函数，其函数值由$-\infty$增大到$+\infty$.

例 6　利用“五点法”作函数 $y=-\tan x$ 在区间$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$上的图像.

解　按五个关键点列表，如表 4-9 所示.

表 4-9

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$	-1.73	-1	0	1	1.73
$y=-\tan x$	1.73	1	0	1	1.73

以表中的 x 值为横坐标，以对应的 y 值为纵坐标，在直角坐标系中依次描出相应的点(x, y)，然后用光滑的曲线依次连结这些点，即可得到函数 $y=\tan x$ 在区间$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$上的图像，如图 4-22 所示.

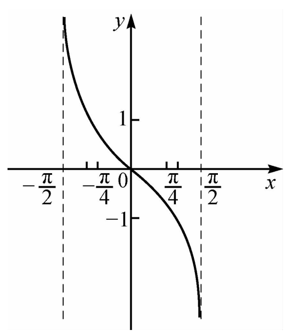


图 4-22

思考与讨论

结合例 6，$y=\tan x$ 和 $y=-\tan x$ 的图像有什么区别？

例 7　求函数 $y=\tan 2x$ 的定义域和单调区间.

解　设 $u=2x$，由 $y=\tan u$ 的定义域为$\{u \mid u\in \boldsymbol{R}, u\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \boldsymbol{Z}\}$，可知

$$2x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,$$

即

$$x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}.$$

所以 $y=\tan 2x$ 的定义域是$\left\{x \mid x\in\boldsymbol{R}, x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\boldsymbol{Z}\right\}$.

因为正切函数在区间$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\boldsymbol{Z})$上是增函数,所以

$$-\frac{\pi}{2}+k\pi<2x<\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\boldsymbol{Z},$$

解得

$$-\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\boldsymbol{Z}.$$

因此,$y=\tan 2x$ 的单调区间是$\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)(k\in\boldsymbol{Z})$.

练习题 4-6

1. 利用“五点法”作下列函数在$[0,2\pi]$的图像：

(1)$y=2+\sin x$；　　(2)$y=2\cos x+1$.

2. 已知 $\cos x=\frac{a+1}{2}$,求 a 的取值范围.

3. 求下列函数的周期：

(1)$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$；　　(2)$y=\cos 2x+\frac{\pi}{4}$.

4. 求使函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$取得最大值和最小值的 x 的集合,并指出最大值和最小值.

5. 利用“五点法”作函数 $y=3\tan x$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的图像.

6. 求下列函数的定义域：

(1)$y=\tan 4x$；　(2)$y=\tan(x+\frac{\pi}{6})$.

7. 不求值，比较下列各组中两个函数值的大小：

(1)$\tan 115°$和$\tan 142°$；　(2)$\tan\frac{3\pi}{4}$和$\tan(-\frac{3\pi}{4})$.

第七节　反三角函数

反三角函数一般用“arc＋函数名”的形式表示，如反正弦函数表示为 $y=\arcsin x$，反余弦函数表示为 $y=\arccos x$ 等.

一、反正弦函数

如图 4-23 所示为正弦函数 $y=\sin x$ 在 **R** 上的图象.

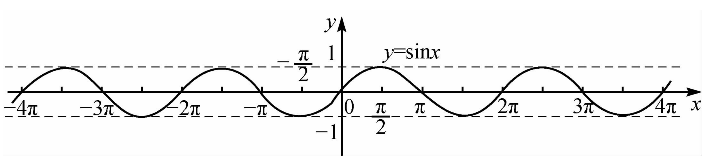


图 4-23

由图 4-23 可知：

(1)正弦函数 $y=\sin x$ 在 **R** 上无反函数.

(2)在区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上，正弦函数 $y=\sin x$ 的自变量 x 与函数值 y 是一一对应的，故正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上有反函数.

综上所述，正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上有反函数，称为**反正弦函数**，记作 $y=\arcsin x$. 反正弦函数的定义域为$[-1,1]$，值域为$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

下面,我们来研究反正弦函数的图像和性质.

如图 4-24 所示为反正弦函数 $y=\arcsin x$ 在区间 $[-1,1]$ 上的图像.

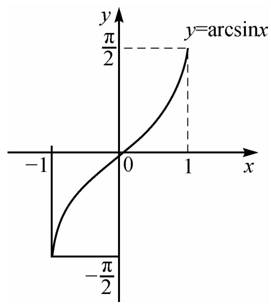


图 4-24

由图 4-24 可知,反正弦函数 $y=\arcsin x$ 主要具有如下性质:

(1)定义域.

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$.

(2)值域.

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

(3)$\sin a=b, a\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Leftrightarrow \arcsin b=a, b\in[-1,1]$.

二、反余弦函数

如图 4-25 所示为余弦函数 $y=\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图像.

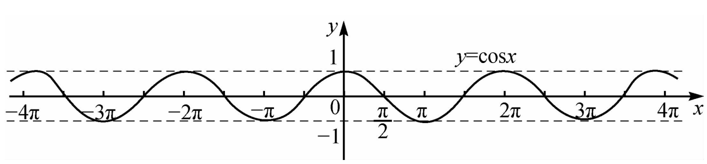


图 4-25

由图 4-25 可知:

(1)余弦函数 $y=\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上无反函数.

(2)在区间$[0,\pi]$上,余弦函数 $y=\cos x$ 的自变量 x 与函数值 y 是一一对应的,故余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,\pi]$上有反函数.

综上所述,余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[0,\pi]$上有反函数,称为**反余弦函数**,记作 $y=\arccos x$. 反余弦函数的定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$.

下面,我们来研究反余弦函数的图像和性质.

如图 4-26 所示为反余弦函数 $y=\arccos x$ 在区间$[-1,1]$上的图像.

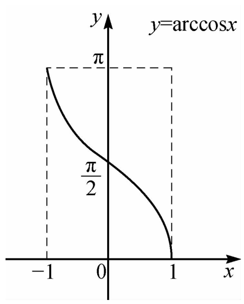


图 4-26

由图 4-26 可知,反余弦函数 $y=\arccos x$ 主要具有如下性质:

(1)定义域.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域为$[-1,1]$.

(2)值域.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 的值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

(3)$\cos a=b, a\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Leftrightarrow \arccos b=a, b\in[-1,1]$.

三、反正切函数

如图 4-27 所示为正切函数 $y=\tan x$ 在$\{x\mid x\in\mathbf{R}, x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$上的图像.

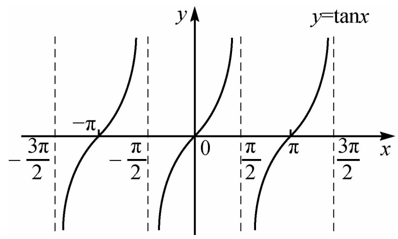


图 4-27

图 4-27 可知：

(1)正切函数 $y=\tan x$ 在 $\mathbf{R}$ 上无反函数.

(2)在区间$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上，正切函数 $y=\tan x$ 的自变量 x 与函数值 y 是一一对应的，故正切函数 $y=\tan x$ 在区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上有反函数.

综上所述，正切函数 $y=\tan x$ 在区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上有反函数，称为**反正切函数**，记作 $y=\arctan x$. 反正切函数的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

下面，我们来研究反正切函数的图像和性质.

如图 4-28 所示为反正切函数 $y=\arctan x$ 在区间 $\mathbf{R}$ 上的图像.

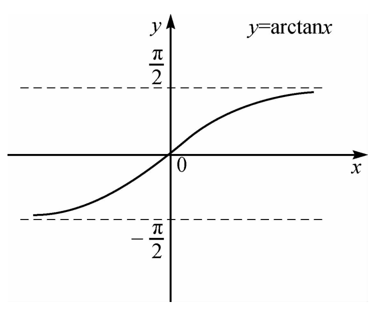


图 4-28

由图 4-28 可知，反正切函数 $y=\arctan x$ 主要具有如下性质：

(1)定义域.

反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域为 **R**,即$(-\infty,+\infty)$.

(2)值域.

反正切函数 $y=\arctan x$ 的值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

(3)$\tan a=b,a\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\arctan b=a,b\in\mathbf{R}$.

四、反余切函数

如图 4-29 所示为余切函数 $y=\cot x$ 在 **R** 上的图像.

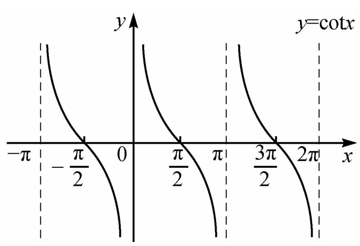


图 4-29

由图 4-29 可知：

(1)余切函数 $y=\cot x$ 在 **R** 上无反函数.

(2)在区间$(0,\pi)$上,余切函数 $y=\cot x$ 的自变量 x 与函数值 y 是一一对应的,故余切函数 $y=\cot x$ 在区间$(0,\pi)$上有反函数.

综上所述,余切函数 $y=\cot x$ 在区间$(0,\pi)$上有反函数,称为**反余切函数**,记作 $y=\operatorname{arccot}x$. 反余切函数的定义域为 **R**,值域为$(0,\pi)$.

下面,我们来研究反余切函数的图像和性质.

如图 4-30 所示为反余切函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 在区间 **R** 上的图像.

由图 4-30 可知,反余切函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 主要具有如下性质：

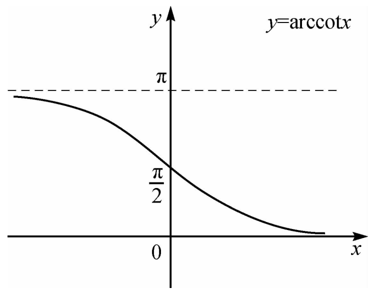


图 4-30

(1)定义域.

反余切函数 $y=\mathrm{arccot}x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,即$(-\infty,+\infty)$.

(2)值域.

反余切函数 $y=\mathrm{arccot}x$ 的值域为$(0,\pi)$.

(3)$\cot a=b,a\in(0,\pi)\Leftrightarrow \mathrm{arccot}b=a,b\in\mathbf{R}$.

例 1 求下列反三角函数的值:

(1)$\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;　　(2)$\arccos(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$;

(3)$\arctan(-1)$;　　(4)$\mathrm{arccot}\sqrt{3}$.

解 (1)因为 $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,且$\dfrac{\pi}{3}\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$,所以 $\arccos(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})=\dfrac{\pi}{3}$.

(2)因为 $\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,且$\dfrac{5\pi}{6}\in[0,\pi]$,所以 $\arccos(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})=\dfrac{5\pi}{6}$.

(3)因为 $\tan(-\dfrac{\pi}{4})=-1$,且$-\dfrac{\pi}{4}\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$,所以 $\arctan(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$.

(4)因为 $\cot\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$,且$\dfrac{\pi}{6}\in(0,\pi)$,所以 $\mathrm{arccot}\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{6}$.

例 2 用反正弦函数表示下列各角:

(1)$-\frac{\pi}{3}$；　　　　(2)$\frac{\pi}{6}$；　　　　(3)$\frac{\pi}{2}$.

解　(1)因为$-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，且 $\sin(-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$-\frac{\pi}{3}=\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(2)因为$\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，且 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}$.

(3)因为$\frac{\pi}{2}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，且 $\sin\frac{\pi}{2}=1$，所以$\frac{\pi}{2}=\arcsin 1$.

练习题 4-7

1.求下列反三角函数的值：

(1)$\arcsin\frac{1}{2}$；　　　　(2)$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(3)$\arctan(-\frac{\sqrt{3}}{3})$；　　　　(4)$\operatorname{arccot}1$.

2.用反正弦函数表示下列各角：

(1)$-\frac{\pi}{4}$；　　　　(2)0；　　　　(3)$\frac{\pi}{4}$.

3.用反余弦函数表示下列各角：

(1)0；　　　　(2)$\frac{\pi}{6}$；　　　　(3)π.

4.用反正切函数表示下列各角：

(1)$-\frac{\pi}{3}$；　　　　(2)$-\frac{\pi}{4}$；　　　　(3)$\frac{\pi}{6}$.

5.用反余切函数表示下列各角：

(1)$\frac{\pi}{4}$；　　　　(2)$\frac{\pi}{3}$；　　　　(3)$\frac{2\pi}{3}$.

复习题 4

A 组

1. 填空题:

(1)设 $a=2\sin\alpha$,那么 a 的取值范围是________.

(2)已知角 α 的终边上的一点 $P(2,-1)$,那么 $\sin\alpha=$________,$\cos\alpha=$________,$\tan\alpha=$________.

(3)$\sin600°$的值是________.

(4)已知 $x\in[0,2\pi]$,那么函数 $y=\sin x$ 和函数 $y=\cos x$ 都是增函数的区间是________.

2. 选择题:

(1)设 r 为圆的半径,则弧长为 $\frac{3r}{4}$ 的圆弧所对的圆心角为(　　).

A. $135°$　　B. $\frac{135°}{\pi}$

C. $145°$　　D. $\frac{145°}{\pi}$

(2)$\sin(-1\ 230°)$的值是(　　).

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3)下列结论正确的是(　　).

A. 小于 $90°$的角都是锐角

B. 终边在 y 轴正半轴上的角都相等

C. 第二象限的角都是钝角

D. 钝角一定是第二象限的角

(4)已知 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$,且 α 是第三象限的角,则 $\sin\alpha$ 的值为(　　).

A. $\frac{4}{5}$　　　　B. $-\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{5}$　　　　D. $-\frac{3}{5}$

3. 计算下列各式的值:

(1)$2\sin^2 225°-\cos 330°\cdot\tan 405°$;

(2)$\tan 675°+\cos 765°-\tan(-300°)+\cos(-690°)$.

4. 已知 $\sin\alpha=-\frac{7}{25}$,且 α 是第三象限的角,求 $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值.

5. 已知 $\tan\alpha=-3$,求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值.

6. 利用计算器计算下列各题:

(1)$\sin 42°$;

(2)$\cos 6\,678°$;

(3)$\tan(-3\,578°)$;

(4)已知 $\sin x=0.65$,求$[0,2\pi]$内的角 x;

(5)已知 $\tan x=-6$,求$[0,2\pi]$内的角 x;

(6)已知 $\cos x=0.7$,求 $0°\sim 360°$范围内的角 x.

B　组

1. 计算下式的值:

$$\frac{\sin(\alpha-\pi)\cdot\cos(\pi-\alpha)\cdot\cos(\alpha+2\pi)}{\tan(\pi+\alpha)\cdot\cos^5(-\pi-\alpha)}.$$

2. 函数 $y=a+b\cos x(x\in\mathbf{R})$的最大值是 4,最小值是 2,写出函数的解析式.

阅读材料

波 浪 曲 线

有一个故事:从前有座山,山上有座庙,庙里有一个老和尚和一个小和尚.有一天,老和尚对小和尚说:“从前有座山,山上有座庙,庙里有一个老和尚和一个小和尚,有一天……”无须再写下去,我想读者都知道如何继续这个故事.

在文学家的笔下,对于循环模式的描述,往往是很精彩的.但在数学家的眼中,所有出现的事件 y 都是时间 x 的函数

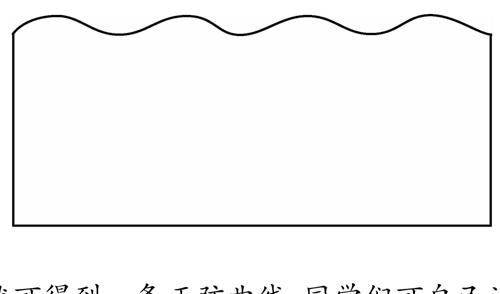
$$y=f(x).$$

而循环模式则表示对于变量 x 的任何值,存在一个常量 T,使得

$$f(x+T)=f(x),$$

这里的 T 称为周期.上式表明,同样的事件,在经历了一个周期之后又回到了原先的状态,周而复始,如此而已!

拿一张纸,把它卷到一根蜡烛上,然后用刀斜着把它切断,再把卷起的纸展开,那么你将会看到一个波浪型曲线的截口.让我们看一看这是怎样的一条曲线?



这就可得到一条正弦曲线,同学们可自己试试看.

自然界中正弦曲线有很多.往水池里扔一块石头,便会看到圆形的水波逐渐向四周扩展;拿一根长绳,抓住其中一头上下振动,你会看到一个个波浪传向前方,

即使振动的那一头已经停止动作，已经形成的波形仍会继续传向远处！

在数学家眼里，上面的一系列现象称为波的传送．数学家们运用自己的智慧，巧妙地把这种运动用函数表示了出来．