第八章　数　　列

第一节　数列的概念

一、主要内容

本节主要介绍了数列的一些基本概念.

(1)**数列**:按照一定的顺序排成的一列数叫作**数列**.

(2)**数列的项**:数列中的每一个数都叫作这个**数列的项**.

(3)**首项、项数**:在一个数列中,从开始的项起,自左至右排序,各项按照其位置依次叫作这个数列的第 1 项(**首项**),第 2 项,第 3 项,…,第 n 项,…,其中反映各项在数列中位置的数字 1,2,3,…,n,…分别叫作对应项的**项数**.

(4)**有穷数列、无穷数列**:只有有限项的数列叫作**有穷数列**,有无限多项的数列叫作**无穷数列**.

(5)**通项(一般项)**:无穷数列的一般形式可以写作

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots(n\in\mathbf{N}^*),$$

记作$\{a_n\}$,其中下脚标的数字代表项数.因此,通常把第 n 项 a_n 叫作数列$\{a_n\}$的**通项**或**一般项**.

(6)**通项公式**:如果数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 能够用关于项数 n 的一个式子来表示,那么这个式子叫作这个数列的**通项公式**.

二、巩固训练

1. 选择题:

(1)数列$-\frac{1}{2\times1}$,$\frac{1}{2\times2}$,$-\frac{1}{2\times3}$,$\frac{1}{2\times4}$,…的一个通项公式是(　　).

A. $\frac{1}{n(n-1)}$　　B. $\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$

C. $\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$　　D. $\frac{(-1)^n}{2n}$

(2)已知数列-1,$\frac{1}{4}$,$-\frac{1}{9}$,…,$(-1)^n\cdot\frac{1}{n^2}$,…,那么它的第5项的值等于(　　).

A. $\frac{1}{5}$　　B. $-\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{25}$　　D. $-\frac{1}{25}$

(3)数列1,0,1,0,1,0,…的一个通项公式是(　　).

A. $\frac{1+(-1)^n}{2}$　　B. $2n-1$

C. $\frac{1-(-1)^n}{2}$　　D. $2n+1$

2. 填空题:

(1)已知数列的通项公式为$a_n=n(n+1)$,那么$a_5=$__________.

(2)数列的通项公式为$a_n=(-1)^n\cdot\frac{n}{n+3}$,则$a_1=$__________,$a_5=$__________,$a_{10}=$__________.

(3)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{2}{n^2+n}$,则它的前3项分别为__________,$\frac{1}{10}$__________(填“是”或“不是”)该数列中的项,若是的话是第__________项.

(4)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{n(n+2)}$,则$\frac{1}{120}$是这个数列的第__________项.

(5)数列$\frac{3}{2}$,$\frac{8}{3}$,$\frac{15}{4}$,$\frac{24}{5}$,…的通项公式为 $a_n=$____________.

(6)数列$\sqrt{2}$,$\sqrt{5}$,$2\sqrt{2}$,$\sqrt{11}$,…的通项公式是____________,$2\sqrt{5}$是这个数列的第____________项.

3.写出下列数列的通项公式,并指出下列数列哪些是有穷数列,哪些是无穷数列?

(1)1,2,3,4,5;

(2)0.1,0.11,0.111,0.1111,0.11111;

(3) $-1,-2,-3,-4,-5,\cdots$;

(4) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\cdots$;

(5)5 的正整数倍数构成的数列；

(6)正整数的算术平方根构成的数列；

(7)某校有 8 个计算机教室，里面摆设的计算机数量构成的数列 40，40，40，40，40，40，40，40；

(8)目前我国通用的人民币面额构成的数列(单位:元)

100,50,20,10,5,2,1.

4.已知一个数列的通项公式为$a_n=-2^n+3$,写出该数列的前5项.

5.已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$,求此数列的第4项.

6. 已知下列两个数列的前 5 项，写出它们的一个通项公式：

(1)20,30,40,50,60,…；　　　　(2)$\frac{1}{2}$,$-\frac{3}{4}$,$\frac{5}{6}$,$-\frac{7}{8}$,$\frac{9}{10}$,….

三、自我检测

1. 选择题：

(1)已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 + n$，则(　　)是数列 $\{a_n\}$ 中的项.

A. 78　　　　B. 72

C. 68　　　　D. -62

(2)数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = f(n)$ 可以看成一个函数，它的定义域为(　　).

A. 实数集

B. 整数集

C. 正整数集

D. 正整数集或它的有限子集$\{1,2,3,n\}$

(3)数列 $\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{6}$，$\frac{1}{12}$，$-\frac{1}{20}$，…的通项公式为(　　).

A. $a_n = (-1)^n \frac{1}{n(n-1)}$

B. $a_n = (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$

C. $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n-1)}$

D. $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)}$

(4)已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1=21$，$a_{n+1}=2a_n$，则这个数列的第5项为(　　).

A. 42　　B. 84

C. 168　　D. 336

2. 写出下列数列的通项公式，并指出下列数列哪些是有穷数列，哪些是无穷数列.

(1)正整数的平方按从小到大顺序构成的数列；

(2) $\dfrac{1}{3}$ 的正指数幂按从小到大顺序构成的数列；

(3)0～30之间的偶数按从小到大顺序构成的数列；

(4)无穷多个-1构成的数列.

3.写出下列数据的一个通项公式：

(1)$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{5}$，$-\frac{1}{7}$，$\frac{1}{9}$，…；　(2)$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{7}{8}$，$\frac{15}{16}$，…；

(3)0，-2，-4，-6，…；　(4)9，99，999，9999，…；

(5)$-7,-5,-3,-1,\cdots$；　　(6)$5,-15,45,-135,\cdots$；

(7)$5,\dfrac{9}{2},\dfrac{13}{4},\dfrac{17}{8},\cdots$；　　(8)$\dfrac{2}{1\times 3},\dfrac{4}{3\times 5},\dfrac{6}{5\times 7},\dfrac{8}{7\times 9},\cdots$.

4.已知下列数列$\{a_n\}$的通项公式,写出它们的前4项：

(1)$a_n=\dfrac{2n+1}{2n^2+1}$；　　(2)$a_n=(-1)^n\dfrac{2n-1}{n+1}$；

(3) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$；　　　　(4) $a_n=(-1)^{n+1}(n^2+1)$.

5. 已知数列 $a_n=n(n+1)$，判断 420 是否为该数列中的项，如果是，是第几项？

6. 观察下列数列的特点，用适当的数填空，并写出每个数列的一个通项公式：

(1) 6，12，24，( )，96，( )，384；　　(2) $\frac{1}{2}$，$1\frac{3}{4}$，( )，$3\frac{15}{16}$，$4\frac{31}{32}$，( )；

7. 在数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=1$,$a_2=2$,$a_n=3a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3)$,试写出该数列的前5项.

8. 某工厂生产一批弹珠,共10种规格,根据大小不同,弹珠的直径依次为10 mm,12 mm,14 mm,16 mm,……那么,最大的弹珠直径是多少?

第二节 等差数列

一、主要内容

1. 基本概念

(1)**等差数列**:如果数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 从第2项起,每一项与它前一项的差都等于一个常数,那么这个数列叫作**等差数列**.

(2)**公差**:若数列中的每一项与它前一项的差是一个常数,则这个常数叫作等差数列的**公差**,一般用字母 d 表示.

2. 重要公式

(1)若数列$\{a_n\}$为等差数列,d为公差,则$a_{n+1}-a_n=d$,即$a_{n+1}=a_n+d$.

(2)首项为a,公差为d的等差数列的通项公式为

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

(3)等差数列$\{a_n\}$的前n项和公式为

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2},$$

即等差数列前n项的和等于首末两项之和与项数乘积的一半.

(4)等差数列$\{a_n\}$的前n项和公式也可以表示为

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

二、巩固训练

1. 选择题:

(1)数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n+5$,则这个数列是(　　).

A. 公差为2的等差数列　　B. 公差为5的等差数列

C. 首项为2的等差数列　　D. 首项为5的等差数列

(2)已知等差数列$1,-1,-3,-5,\cdots$,则-81是它的第(　　)项.

A. 41　　B. 42

C. 43　　D. 44

(3)等差数列$\{a_n\}$中,第3项为9,第9项为3,那么它的第12项为(　　).

A. 27　　B. 12

C. 6　　D. 0

(4)等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=-7$,公差$d=3$,那么32是这个数列的第(　　)项.

A. 12　　B. 13

C. 14　　D. 15

(5)一个等差数列的第5项是10,第10项是25,那么这个数列的(　　).

A. 首项为-2,公差为3　　B. 首项为2,公差为-3

C. 首项为-3,公差为2　　D. 首项为3,公差为-2

(6)已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=a_{n+1}-2,a_1=1$,则它的通项公式为(　　).

A. $a_n=2n-1$　　B. $a_n=2n+1$

C. $a_n=-2n+3$　　D. $a_n=2n+3$

(7)$1+3+5+\cdots+(2n+1)=$(　　).

A. n^2　　B. $n(n+1)$

C. $(n+1)^2$　　D. 以上都不正确

(8)已知等差数列的前 n 项和为 $S_n=n^2+\frac{1}{2}n$,则这个数列的通项公式为(　　).

A. $2n$　　B. $2n-\frac{1}{2}$

C. $2n+\frac{1}{2}$　　D. $2n+1$

2. 填空题:

(1)等差数列 2,5,8,… 的公差 $d=$__________,通项公式 $a_n=$__________,$a_6=$__________.

(2)在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=7$,$a_6=22$,则公差 $d=$__________.

(3)在等差数列$\{a_n\}$中,$a_4=6$,$a_7=12$,则公差 $d=$__________.

(4)在等差数列$\{a_n\}$中,$a_2+a_5=8$,$a_3+a_7=14$,则 $a_1=$__________,$d=$__________.

(5)设三个数 3,x,11 成等差数列,则 $x=$__________.

(6)等差数列 24,22,20,…,从第__________项开始为负数.

(7)在首项为 1,公差为 2 的等差数列$\{a_n\}$中,$a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{20}=$__________.

(8)已知等差数列的通项公式是 $a_n=2n-1$,则 $a_5=$__________,$S_5=$__________.

3. 写出等差数列$\frac{5}{3}$,$\frac{7}{3}$,3,$\frac{11}{3}$,…的通项公式,并求出这个数列的第 10 项.

4. 已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n-5$，求其前n项和公式及S_{20}.

5. 根据下列各题中的条件，求出相应的等差数列的前n项的和：

(1)$a_1=4$，$a_n=36$，$n=10$；　　　　(2)$a_1=3$，$d=-2$，$n=15$.

6. 已知在等差数列$\{a_n\}$中，$d=2$，$a_n=1$，$S_n=-15$，求n与a_1的值.

三、自我检测

1. 填空题:

(1)在 0 和 20 之间插入 3 个数,使它们成等差数列,则这 3 个数分别为____________,____________和____________.

(2)在等差数列$-1,2,5,8,\cdots$中,$a_{10}=$____________,56 是该数列的第____________项.

(3)在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_2=8$,$a_{10}=40$,则$a_{18}=$____________.

(4)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=n^2$,则$a_n=$____________.

(5)等差数列$-12,-9,-6,-3,\cdots$的前____________项和为 15.

(6)若一个三角形的三个内角成等差数列,且一个角的度数为$30°$,则其余两个角的大小为____________和____________.

2. 选择题:

(1)在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_3=4$,$a_7=a_6+2$,则$a_1=$(　　).

A. -2　　B. 0

C. 1　　D. 2

(2)在等差数列 51,47,43,39,…中,第一个负数项是(　　).

A. 第 13 项　　B. 第 14 项

C. 第 15 项　　D. 第 16 项

(3)在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_1=\frac{1}{3}$,$d=\frac{2}{3}$,$a_n=\frac{7}{3}$,则$n=$(　　).

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

(4)在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=20$,则a_3等于(　　).

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 7

(5)在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_1=50$,$d=-2$,$S_n=0$,则$n=$(　　).

A. 48　　B. 49

C. 50　　D. 51

(6)在等差数列 2,5,8,11,…中,5999 是它的(　　).

A. 第 1997 项　　　　B. 第 1998 项

C. 第 1999 项　　　　D. 第 2000 项

3. 求下列等差数列的通项公式及第 10 项：

(1)3,7,11,…;　　　　(2)−8,−6,−4,…;

(3) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$,…;　　　　(4) $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{7}$,…;

(5) $-1,5,11,\cdots$;　　(6) $2,5,8,\cdots$;

(7) $\frac{1}{3},1,\frac{5}{3},\cdots$;　　(8) $20,\frac{58}{3},\frac{56}{3},\cdots$.

4. 已知三个数成等差数列,且这三个数的和为18,积为162,求这三个数.

5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_2 = 9$，$a_4 = 13$，问这个数列从第几项起大于 245？

6. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 + a_6 = 8$，$a_4 + a_{10} = -6$，求 a_1 和 d 的值.

7. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = \frac{5}{6}$，$d = -\frac{1}{6}$，$S_n = -5$，求 n 和 a_n 的值.

8.若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2n^2 + 3n$,求 a_{15} 的值.

9.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 5n^2 - 4n + 2$.

(1)求证:数列 $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的首项和公差.

10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = 26$，$S_3 = S_{11}$，问这个数列前多少项的和最大？求出这个最大值.

11. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项的和为 35，最后 5 项的和为 105，所有项的和为 168，求这个数列的通项公式及项数 n 的值.

12. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_2 + a_4 + a_6 = 12$，$a_4a_8^2 = 4$，求 a_{10} 的值.

第三节 等比数列

一、主要内容

1. 基本概念

(1)**等比数列**:如果一个数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 从第 2 项起,每一项与它前一项的比都等于一个非零的常数,那么这个数列叫作**等比数列**.

(2)**公比**:若数列的每一项与它前一项的比都等于一个非零的常数,则这个非零的常数叫作**公比**,一般用字母 q 来表示.

(3)**等比中项**:如果在 a 和 b 之间插入一个数 c,使得 a,c,b 成等比数列,那么 c 叫作 a 与 b 的**等比中项**.

2. 重要公式

(1)若数列$\{a_n\}$为等比数列,公比为 q,则 a_1 与 q 均不为零,且有$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$,即

$$a_{n+1}=a_n\cdot q.$$

(2)首项为 a_1,公比为 q 的等比数列的通项公式为

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}.$$

(3)当 $q\neq1$ 时,等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式为

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq1),$$

还可以写成

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq1).$$

当 $q=1$ 时,等比数列的各项都相等,此时数列前 n 项和为 $S_n=na_1$.

(4)如果 c 是 a 与 b 的等比中项,那么$\frac{c}{a}=\frac{b}{c}$,即 $c^2=ab$,所以

$$c=\pm\sqrt{ab}(ab>0).$$

二、巩固训练

1. 选择题：

(1)在等比数列 $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\cdots$ 中，$a_6=$(　　).

A. $\frac{1}{32}$　　B. $-\frac{1}{32}$

C. $\frac{1}{64}$　　D. $-\frac{1}{64}$

(2)下列数列中，既是等差数列又是等比数列的是(　　).

A. $0,0,0,0,\cdots$　　B. $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots$

C. $1,1,1,1,\cdots$　　D. $-1,1,-1,1,\cdots$

(3)在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_5=2,a_{10}=10$，则 $a_{15}=$(　　).

A. 25　　B. 50

C. 75　　D. 100

(4)已知等比数列 $64,32,16,\cdots$，则 $\frac{1}{16}$ 是它的第(　　)项.

A. 10　　B. 11

C. 12　　D. 13

(5)若等比数列的首项是 $\frac{9}{8}$，末项是 $\frac{1}{3}$，公比为 $\frac{2}{3}$，则该数列的项数为(　　).

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

(6)已知 $x,2x+2,3x+3$ 是一个等比数列的前 3 项，则第 4 项为(　　).

A. -27　　B. -13.5

C. 13.5　　D. 12

(7)等比数列 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$ 的前 8 项的和是(　　).

A. 255　　B. $\frac{255}{256}$

C. $\frac{256}{255}$　　D. $\frac{255}{265}$

(8)等比数列$\{a_n\}$的前4项的和为1,前8项的和为17,则等比数列的公比为(　　).

A. 2　　　　B. -2

C. 2或-2　　　　D. 2或-1

2. 填空题:

(1)已知$a_{n+1}-2a_n=0$,则数列$\{a_n\}$是____________数列,其中$a_1=\dfrac{1}{2}$,则$a_n=$____________.

(2)等比数列$\{a_n\}$的公比为2,那么a_8与a_5的比值为____________.

(3)等比数列4,16,64,…的公比$q=$____________,通项公式$a_n=$____________,第6项$a_6=$____________.

(4)数$5+2\sqrt{3}$与$5-2\sqrt{3}$的等比中项是____________.

(5)已知3,x,y成等差数列,3,$x-6$,y成等比数列,则$x=$____________,$y=$____________.

(6)在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=54$,$q=\dfrac{1}{3}$,$a_n=2$,则$n=$____________,$S_n=$____________.

(7)在等比数列中,已知$a_5=3$,那么$a_4\cdot a_6=$____________,$a_3\cdot a_7=$____________.

(8)首项为5,公比为2的数列的前n项和的公式为____________,前10项的和为____________.

3. 写出等比数列$\dfrac{1}{6}$,$-\dfrac{1}{3}$,$\dfrac{2}{3}$,…的通项公式,并求这个数列的第8项.

4.求下列各题中两个数的等比中项：

(1)$3+\sqrt{5}$与$3-\sqrt{5}$；　　(2)16与9.

5.在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_4=4$，$a_7=7$，求a_{10}.

6.在等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_2=8$，$a_5=-27$，求a_1和q.

7. 根据下列各题中的条件,求相应等比数列的前 n 项和 S_n.

(1)$a_1=-1,q=2,a_n=36$;　　　　(2)$a_1=8,q=-\frac{1}{2},n=6$.

三、自我检测

1. 填空题:

(1)在等比数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=9$,$a_3=4$,则公比 $q=$____________.

(2)在 8 和 27 之间插入 2 个数,使它们成等比数列,则这 2 个数是____________和____________.

(3)在等比数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=-4$,$a_4=\frac{1}{2}$,$a_n=-\frac{1}{4}$,则 $n=$____________.

(4)在等比数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1a_8=-2\ 187$,$a_4=27$,则 $a_5=$____________.

(5)在等比数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=7$,$q=2$,则 $S_6=$____________.

(6)某厂 2014 年的年产值为 a 万元,计划从 2015 年起,每一年的年产值都比上一年增加 20%,则 2017 年的年产值为____________,2014 年到 2017 年的总产值为____________.

2. 选择题:

(1)已知 x ,$2x+2$,$3x+3$ 是一个等比数列的前三项,则第四项为(　　).

A. -27　　　　B. $-\frac{27}{2}$

C. $\dfrac{27}{2}$　　　　　D. 12

(2)在等比数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_4a_7=-512$, $a_2+a_9=254$,若公比为正数,则该数列的第 12 项为(　　).

A. 512　　　　　B. -512

C. $-2\ 048$　　　　　D. 1 024

(3)在等比数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $q=2$, $S_3=31$,则 $a_1=$ (　　).

A. 1　　　　　B. 2

C. 3　　　　　D. 4

(4)等比数列 3,-6,12,-24,…的前 n 项和公式为 $S_n=$ (　　).

A. $3-(-2)^n$　　　　　B. $1-(-2)^n$

C. $3-(-2)^{n-1}$　　　　　D. $1-(-2)^{n-1}$

(5)某种细胞在培养过程中,每 20 分钟分裂一次(一个分裂成两个),经过 $3h$ 后,这种细胞由一个繁殖成(　　)个.

A. 511　　　　　B. 512

C. 1 023　　　　　D. 1 024

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=6$, $a_4=-\dfrac{3}{4}$, $S_n=\dfrac{129}{32}$,求 n.

4. 判断下列数列是否为等比数列,若是请求出公比.

(1)64,32,16,8,4,…;　　　　　(2)1,-1,1,-1,…;

(3)0,3,6,12,…;　　(4)$\frac{25}{8}$,$\frac{5}{4}$,$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{5}$,…;

(5)0,0,0,0,0….

5.有四个数,前三个数成等比数列,且它们的积为216,后三个数成等差数列,且它们的和为54,求这四个数.

6. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5$, $a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=-5\ 120$,求 q 的值.

7. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=\frac{1}{2}$, $a_n=\frac{243}{2}$, $S_n=182$,求 q 与 n 的值.

8. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为前 n 项和,若 $a_n>0$, $a_2=4$, $S_4-a_1=28$,求 $\frac{a_{n+3}}{a_n}$ 的值.

9. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_2=5$, $a_5=625$,求 q 和 S_5 的值.

10. 三个数成等比数列,且它们的积为 216,如果中间的那个数加上 4,又与第一个和第三个数成等差数列,求这三个数.

第四节 数列实际应用举例

一、主要内容

在本节中主要介绍了等差数列、等比数列在实际生活中的应用,要求能够运用等差数列、等比数列的知识解决一些简单的实际应用问题.

二、巩固训练

1. 一个屋顶的某一斜面成等腰梯形,最上面的一层铺了 21 块瓦片,往下每一层多铺 1 块瓦片,斜面上一共铺了 20 层瓦片,求一共铺了多少块瓦片.

2. 小王从银行贷款 30 000 元,贷款期限为 3 年,年利率为 5.76%,计算到期后,小王应偿还银行多少元(精确到个位).

3. 某县2010年生产总值为50亿元. 如果年增长率保持8%,那么多少年后该县的生产总值翻一番(精确到个位).

4. 某商场近6个月的利润由20万按8%的速度增长,求该商场这半年来的总利润(精确到0.01).

三、自我检测

1. 已知直角三角形的三边之长成等差数列,且三角形的周长为36 cm,求此三角形的三边长.

2.某人从银行贷款20万元,贷款期限为10年,年利率为5.76%,按复利计息法计算利息.如果10年后一次性还款,计算到期后,此人应偿还银行多少钱?

3.某工程生产机器,2014年的年产量为12 000台,计划以后每一年比前一年多生产2 000台,若严格按照该计划生产,求该工厂2014—2017年的总产量.

4.某化肥厂经过改革后,平均每季度产量比上一季度增长20%,已知第一季度的产量为700吨,求全年的产量.

5.一个物体从高空落下,经过 $10s$ 到达地面,已知第一秒内物体下降 5m,以后每秒所下降的距离都比前一秒多 10m,求物体下降的高度.

6.设报纸的厚度为 0.07 毫米,将一张报纸对折 4 次后报纸的厚度是多少?求对折 n 次后报纸厚度的表达式.

7.某种商品经过三次调价,单价由原来的每克 512 元降到 216 元,求这种商品平均每次降价的百分率.

8. 银行贷款一般采用“复利计息法”计算利息，即将前一期的本金与利息的和(简称本息和)作为后一期的本金来计算利息. 小敏从银行贷款 20 万元，贷款期限为 5 年，年利率为 5.76%，如果 5 年后一次性还款，那么小敏应偿还银行多少钱?

9. 已知 a,b,c 是公差为 3 的等差数列，且 $a,b+1,c+6$ 成等比数列，求 a,b,c 的值.

第五节　数学归纳法

一、主要内容

(1)数学归纳法是一种特殊的证明方法，主要用于研究与正整数有关的数学问题.

(2)一般地，证明一个与正整数相关的命题，可按下列步骤进行：

① 证明当 n 取第一个值 $n_0(n_0\in\mathbf{N}^*)$ 时，命题成立；

② 假设 $n=k(k\geqslant n_0,k\in\mathbf{N}^*)$ 时命题成立，证明当 $n=k+1$ 时命题也成立.

根据以上两个步骤，就可以断定命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立，这种证明方法称为数学归纳法.

二、巩固训练

1. 选择题：

(1)用数学归纳法证明凸 n 变形内角之和等于 $(n-2)\times180^\circ$ 时，n 所选取的第一个值是(　　).

A. 1　　　　B. 2

C. 3　　　　D. 4

(2)用数学归纳法证明：

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的过程中，由 $n=k$ 变到 $n=k+1$ 时，左边应添加的项是(　　).

A. $\frac{1}{2k+1}$　　　　B. $\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k+4}$

C. $-\frac{1}{2k+1}$　　　　D. $\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$

2. 用数学归纳法证明：$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

3. 用数学归纳法证明：$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1\ (n>1, n\in\mathbf{N}^*)$.

4. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$ ($n=1,2,3,\cdots$).

(1)计算数列 $\{a_n\}$ 的前5项；

(2)根据(1)的结果猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(3)用数学归纳法证明你的猜想.

三、自我检测

1. 用数学归纳法证明：当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$1+2+2^2+\cdots+2^{5n-1}$ 是 31 的倍数. 当 n=1 时，原式为__________，由 $n=k$ 变到 $n=k+1$ 时，左边应添加的项是__________.

2. 用数学归纳法证明 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*)$ 的过程中，由 $n=k$ 变到 $n=k+1$ 时，左边应添加的是（　　）.

A. $\frac{1}{2(k+1)}$　　　　B. $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$

C. $\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$　　　　D. $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}$

3. 利用数学归纳法证明“对于任意偶数 n，a^n-b^n 能被 $a+b$ 整除”时，第二步证明过程应是（　　）.

A. 假设 $n=k$ 时命题成立，再证 $n=k+1$ 时命题也成立

B. 假设 $n=2k$ 时命题成立，再证 $n=2k+1$ 时命题也成立

C. 假设 $n=k$ 时命题成立，再证 $n=k+2$ 时命题也成立

D. 假设 $n=2k$ 时命题成立，再证 $n=2(k+1)$ 时命题也成立

4. 用数学归纳法证明：$(n+1)+(n+2)+(n+3)+\cdots+(n+n)=\frac{n(3n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

5. 用数学归纳法证明：$3^{2n+2}-8n-9(n\in\mathbf{N}^{*})$ 能被 64 整除.

6. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $S_n=2n-a_n(n=1,2,3,\cdots)$.

(1)计算数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项；

(2)根据(1)的结果猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(3)用数学归纳法证明你的猜想.

单元自测题

一、选择题

1. 数列$-\frac{1}{2},\frac{9}{4},-\frac{25}{6},\frac{49}{8},\cdots$的一个通项公式是(　　).

A. $a_n=\frac{2n-1}{2n}$　　B. $a_n=(-1)^n\frac{(2n+1)^2}{2n}$

C. $a_n=(-1)^n\frac{(2n-1)^2}{2n}$　　D. $a_n=(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)^2}{2n}$

2. 数列$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}},\cdots$的前100项的和为(　　).

A. $2-\frac{1}{2^{100}}$　　B. $\frac{1}{2^{100}}-2$

C. $2-\frac{1}{2^{99}}$　　D. $\frac{1}{2^{99}-2}$

3. 已知数列$\{a_n\}$的首项为1,数列中的其余的项都满足等式$a_n=a_{n-1}+2(n\geqslant 2)$,则这个数列的通项公式为(　　).

A. $a_n=3n-2$　　B. $a_n=2n-1$

C. $a_n=n+2$　　D. $a_n=4n-3$

4. 已知等差数列 1,4,7,10,…,则 4 900 是这个数列的第(　　)项.

A. 1 632　　B. 1 634

C. 1 633　　D. 1 630

5. 设 $a,x,b,2x$ 是等比数列中相邻的四项,则$\frac{a}{b}$为(　　).

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{4}$　　D. 不能确定

6. 已知数列$\{a_n\}$中,$S_n=n^2+n$,则 a_5 为(　　).

A. 10　　B. 20

C. 30　　D. 40

7. 某细菌在培养过程中,每 20 分钟分裂一次(一个分裂为两个). 经过 3 个小时,这种细菌由 1 个可以繁殖为(　　)个.

A. 511　　B. 512

C. 1 023　　D. 1 024

8. 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=n^2$,则数列$\{a_n\}$为(　　).

A. 等比数列,且公比不为 1　　B. 等差数列

C. 等比数列,且公比为 1　　D. 既不是等差数列,也不是等比数列

二、填空题

1. 数列$\left\{\frac{1}{2n}\right\}$中,第 6 项为____________.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_5=2$,$d=2$,则 $a_8=$____________,$S_{10}=$____________.

3. 通项公式为 $a_n=4n+2$ 的数列的前 n 项和公式为____________.

4. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_2=6$,$a_6=96$,则公比 $q=$____________,$S_6=$____________.

5. 已知等差数列中,$a_{15}=33$,$a_{45}=153$,则 217 是这个数列中的第____________项.

6. 三个连续整数的和为 45,则这三个整数为____________.

7. 成等比数列的三个正数 $2,x,y$ 的和为 14,则 $x=$____________,$y=$

____________.

8. 三个数 a,b,c 成等差数列，三个数 $a,b-a,c-a$ 成等比数列，则 $a:b:c=$ ____________.

三、解答题

1. 求等差数列$-1,2,5,8,\cdots$的前 20 项的和.

2. 等差数列$\{a_n\}$中，$a_6=5$，$a_3+a_8=5$，求 S_{11}.

3. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=4$，$a_5=16$，求 S_6.

4. 在等比数列$\{a_n\}$中，已知$q=\frac{1}{2}$，$S_3=1$，求首项a_1的值.

5. 小王买了一辆价值20万元的新车，如果按平均每年10%的速度折旧，用满5年的时候卖掉，这辆车还能卖多少钱(精确到0.01).

6. 用数学归纳法证明：三个连续自然数的立方和能被9整除.

7. 用数学归纳法证明：凸 n 边形内角之和为 $(n-2)\times180^{\circ}(n\geqslant3, n\in\mathbf{N}^{*})$.

8. 一个影院设置了 20 排座位，第一排有 38 个座位，往后每一排都比前一排多 2 个座位，这个剧场一共设置了多少个座位？

9. 某林场计划第一年造林 15 公顷，以后每一年比前一年多造 20%，5 年内共造林多少公顷？

10. 如图 8-1 所示，一个堆满铅笔的 V 形架的最下面一层放一支铅笔，往上每一层都比它下面一层多放一个，最上面一层放 120 支铅笔，求这个 V 形架上共放多少支铅笔？

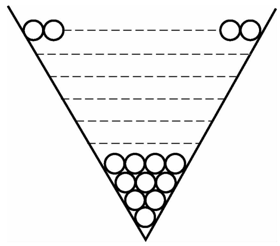

图 8-1