第二章

极限与连续

极限是高等数学的一个重要概念，也是学习高等数学的一个重要工具，高等数学的后续概念如连续、导数、定积分等都是用极限来描述的. 连续则是很多函数的一个重要形态，连续函数是高等数学的主要研究对象. 本章首先介绍极限的概念，极限的运算方法，然后研究函数的连续性.

极限与连续在工科专业中有许多应用，如汽车的制动速度问题、设备折旧问题、电流的连续性等.

第一节　极限的概念

问题情境

古人对极限的概念进行了不懈的探索. 古希腊数学家芝诺提出过 4 个著名的悖论，其中的一个是运动不存在. 运动物体到达目的地之前必须到达路程的一半，然后再到达剩下一半路程的一半，然后再到达还剩下路程的一半……如此下去，它永远到达不了终点. 第二个是巨人阿喀琉斯赶不上在他前面的乌龟. 因为乌龟在他的前面，尽管他跑得很快，但当他赶到乌龟的起点时，乌龟(尽管跑得很慢)已经往前跑了一段距离；然后，当他赶到乌龟刚才所在点时，乌龟又已经向前走了一段距离，他再赶过去，乌龟又已经往前走了一段距离……如此下去，巨人阿喀琉斯永远赶不上在他前面的乌龟. 芝诺的论点对吗? 为什么?

一、数列的概念与极限

1. 数列的概念

定义 1　将自变量为正整数的函数 $u_n=f(n)$ 的函数值按自变量 n 由小到大的顺序排成的一列数

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$$

称为**数列**，记为$\{u_n\}$. 其中，$u_n=f(n)$为数列$\{u_n\}$的**通项**或**一般项**. 由于一个数列$\{u_n\}$完全由其一般项u_n所确定，因此有时也将数列$\{u_n\}$简写成u_n.

定义 2　对于数列$\{u_n\}$，若存在一个常数$M>0$，使得$|u_n|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$恒成立，则称数列$u_n$为**有界数列**，或称**数列有界**.

如果数列$\{u_n\}$有界，也可理解为存在两个数M和m，使得$m\leqslant u_n\leqslant M$，也称$M$为数列的**上界**，$m$为数列的**下界**.

定义 3　对于数列$\{u_n\}$，若数列的各项满足$u_n\leqslant u_{n+1}$，则称数列$\{u_n\}$为**单调增加的数列**；若数列的各项满足$u_n\geqslant u_{n+1}$，则称数列$\{u_n\}$为**单调减少的数列**. 单调增加的数列或单调减少的数列统称为**单调数列**.

下面通过几个实例说明数列单调的情况：

$\{u_n\}:\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$为单调减少的数列；

$\{v_n\}:0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$为单调增加的数列；

$\{w_n\}:0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^n}{n}$是有界数列，但不是单调数列.

2. 数列的极限

看下面 3 个无穷数列：

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

$$0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$$

$$\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{16},\cdots,(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n,\cdots$$

为了直观，我们把这三个数列的前n项分别表示在数轴上，如图 2-1～图 2-3 所示.

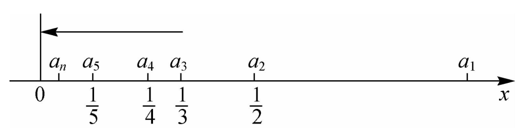

图 2-1

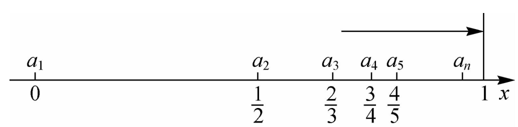

图 2-2

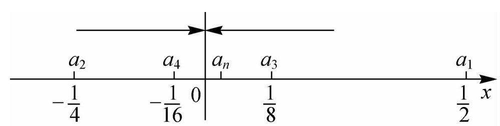

图 2-3

由图 2-1 可以看出，当 n 无限增大时，表示数列 $a_n=\frac{1}{n}$ 的点逐渐密集在 $x=0$ 的右侧，即数列 $\{a_n\}$ 从 $x=0$ 的右侧无限接近于 0. 由图 2-2 可以看出，当 n 无限增大时，表示数列 $a_n=\frac{n-1}{n}$ 的点逐渐密集在 $x=1$ 的左侧，即数列 $\{a_n\}$ 从 $x=1$ 的左侧无限接近于 1. 由图 2-3 可以看出，当 n 无限增大时，表示数列 $(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 的点逐渐密集在 $x=0$ 的左、右两侧，即数列 $\{a_n\}$ 从 $x=0$ 的左、右两侧无限接近于 0.

以上三个数列有一个共同的特点：当 n 无限增大时，$a_n=f(n)$ 无限接近于某一个常数 a. 一般地，有如下定义：

定义 4 如果当 n 无限增大($n\to\infty$)时，无穷数列 $\{a_n\}$ 的项 a_n 趋近于某个确定的常数 a($|a_n-a|$ 无限地接近于 0)，那么，就说这个确定的常数 a 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 或当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to a$.

根据定义 4 可知上述三个数列的极限分别记为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1;\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$$

例 1 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $a_n=\frac{1}{n^2}$； (2) $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$； (3) $a_n=1$.

解 列出数列的前几项，考察当 $n\to\infty$ 时，数列的点逐渐密集的位置，见表 2-1.

表 2-1

n	1	2	3	4	5	…	$\to\infty$
$a_n=\frac{1}{n^2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	…	$\to 0$
$a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{1\,024}$	…	$\to 0$
$a_n=1$	1	1	1	1	1	…	$\to 1$

由表 2-1 中三个数列的变化趋势及定义 4 可知：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0;\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0;\lim_{n\to\infty}1=1$$

二、函数的极限

前面讨论了数列的极限，数列是一种较为简单的特殊函数(整标函数)，可以方便地观察其变化趋势. 现在就一般函数 $y=f(x)$ 的变化趋势进行讨论.

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

观察函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，x 无论取正数还是取负数，只要 $|x|$ 无限增大，函数值就会无限趋近于 0，如图 2-4 所示.

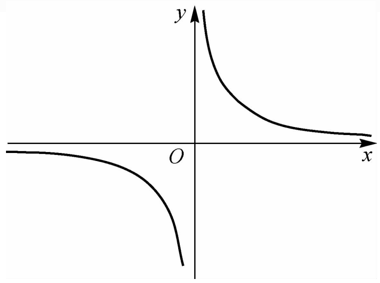

图 2-4

定义 5 设函数 $f(x)$在$|x|>a$ 时有定义(a 为某个常数),如果当 x 的绝对值无限增大时,相应的函数值 $f(x)$无限趋近于一个确定的常数 A,则称 A 为**当 x 趋于无穷大时函数 $f(x)$的极限**,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)$$

由定义 5 可知,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

定义 5 中的 $x\to\infty$包括以下两种情形:

(1)x 取正值无限增大,记为 $x\to+\infty$.

(2)x 取负值而绝对值无限增大,记为 $x\to-\infty$.

对于某些函数 $f(x)$,自变量 x 的变化趋势只能或只需取这两种情形中的一种. 对于这两种情形,有如下定义:

定义 6 设函数 $f(x)$在$(a,+\infty)$内有定义(a 为某个常数),如果当 x 无限增大时,相应的函数值 $f(x)$无限趋近于一个确定的常数 A,则称 A 为**当 x 趋于正无穷大时函数 $f(x)$的极限**,记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to+\infty)$$

例如,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x}=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x$ 不存在.

定义 7 设函数 $f(x)$在$(-\infty,a)$内有定义(a 为某个常数),如果当 x 无限减少(或 x 无限增大)时,相应的函数值 $f(x)$无限趋近于一个确定的常数 A,则称 A 为**当 x 趋于负无穷大时函数 $f(x)$的极限**,记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to-\infty)$$

例如,$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$,$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例如,由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 可以得到$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$. 又如,通过观察反正切函数的图像可知,$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$,而 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$的极限

自变量 x 无限趋近于某个确定的数值x_0,其几何意义是数轴上的动点 x 到定点 x_0 的距

离越来越小，逐渐趋近于 0. 在这种情况下，由于只考虑函数 $f(x)$ 的变化趋势，因此无论 $f(x)$ 在 x_0 处有无定义，都不影响我们的讨论. 先来看下面的例子.

例 2 当 $x\to1$ 时，考察 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势.

解 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义，通过作图观察可知，当 $x\neq1$ 时，$f(x)=x+1$ 无限趋近于 2，即 $x\to1$ 时，$f(x)\to2$，如图 2-5 所示.

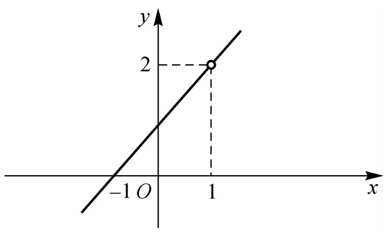

图 2-5

对于这种当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 无限趋近于 A 的变化趋势，有如下定义：

定义 8 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域内有定义，当 x 从 x_0 的左、右两侧无限趋近于 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为**当 x 趋近于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

对于上面的例子，可以表示为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

说明

(1) 在例 2 中，不论 x 怎样变化，都不能等于 1，因为函数在 $x=1$ 处没有定义. 一般在讨论 x 无限趋近于 x_0 的过程中，不考虑 $x=x_0$ 的情况，因此，函数在点 x_0 有无定义都不影响极限问题的研究.

(2) 如果用 δ 表示充分小的正数，则 $x\to x_0$ 可用 $0<|x-x_0|<\delta$ 表示，δ 充分小表示 x 与 x_0 无限接近的程度，这样 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 就可以理解为：对于任意小的正数 ε，存在充分小的正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

在定义 8 中，$x\to x_0$ 表示 x 从左、右两侧以任何方式无限趋近于 x_0，但有时需要考虑 x 只从大于 x_0 的方向或只从小于 x_0 的方向无限趋近于 x_0 的情况，此时有如下定义：

定义 9 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域左侧 $(x_0-\delta,x_0)$ 内有定义，当 x 从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为**当 x 趋近于 x_0 时函数 $f(x)$ 的左极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^-) \text{ 或 } f(x_0-0)=A$$

定义 10 设函数 $f(x)$在 x_0 的去心邻域右侧$(x_0, x_0+\delta)$内有定义，当 x 从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为**当 $\boldsymbol{x}$ 趋近于 $\boldsymbol{x_0}$ 时函数 $\boldsymbol{f(x)}$的右极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^+)\text{ 或 } f(x_0+0)=A$$

定理 2 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

例 3 当 $x\to 0$ 时，讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ 的极限是否存在.

解 当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)$的左、右极限分别为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

例 4 当 $x\to 0$ 时，讨论函数 $f(x)=\begin{cases} -x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x, & x>0 \end{cases}$ 的极限是否存在.

解 当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)$的左、右极限分别为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

例 5 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ x, & x>0 \end{cases}$，画出 $f(x)$的图形，求 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$和 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，并问 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$是否存在.

解 $f(x)$的图像如图 2-6 所示.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+1)=1,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

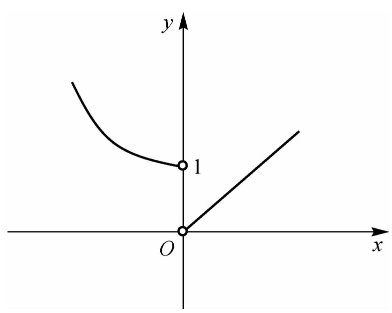

图 2-6

三、函数极限的性质

以上讨论了函数极限的各种情形，并将数列的极限作为函数极限的一种特例来处理. 它们描述的问题都是：在自变量的某个变化趋势下，函数值无限趋近于确定的常数，在有些方

面它们具有一定的共性.下面直接给出函数极限的上述性质.

性质1(唯一性) 对于函数 $f(x)$,若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$,则 $A=B$,即函数极限若存在,则函数极限唯一.

性质2(局部有界性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则存在常数 $M>0$ 和点 x_0 的某一去心邻域 $N(\hat{x}_0,\delta)$,在 $N(\hat{x}_0,\delta)$ 内,使得 $|f(x)|\leqslant M$.即函数 $f(x)$ 局部有界.

性质3(局部保号性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且 $A>0$(或 $A<0$),则存在点 x_0 的某一去心邻域 $N(\hat{x}_0,\delta)$,在 $N(\hat{x}_0,\delta)$ 内,$f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

推论 若在点 x_0 的某一去心邻域 $N(\hat{x}_0,\delta)$ 内有 $f(x)\geqslant0$(或 $f(x)\leqslant0$),且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$).

性质4(夹逼准则) 在 x_0 的去心邻域 $N(\hat{x}_0,\delta)$ 内,若有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

四、知识拓展

问题1 “一尺之棰,日取其半,万世不竭”,请用数列表示每天剩余的木棍长度,并讨论此数列的极限以及数列和的极限.

问题2 某市2010年年末的垃圾已达到 100×10^4 t.根据预测,从2011年起,该市还会以每年 5×10^4 t 的速度产生新的垃圾.如果从2011年起每年处理上一年积累垃圾的20%,那么长此以往,该市的垃圾能否被全部处理完?

习题 2.1

一、选择题

1. 数列 $f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{n+1}, & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{n}{1-n}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$ 的极限是(　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1

C. 2　　D. 不存在

2. 数列 $\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{4},0,\dfrac{1}{8},0,\cdots$ 的极限是(　　).

A. 0　　B. -1

C. 1　　D. 不存在

3. 下列数列中无界的是(　　).

A. $a_n=1-n$　　B. $b_n=\dfrac{n}{n+1}$

C. $x_n=\sin n^2$　　D. $y_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

4. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义是函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极限的(　　)条件.

A. 充分　　B. 必要

C. 充要 D. 无关

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=($ $)$.

A. 1 B. -1

C. 0 D. 不存在

6. 下列极限式中极限存在的是（ ）.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}$ B. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\cot x$ D. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x$

7. 设 $f(x)=|x|$，则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=($ $)$.

A. -1 B. 1

C. 0 D. 不存在

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=($ $)$.

A. 0 B. 1

C. -1 D. 不存在

9. 设 $f(x)=|x-5|$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=($ $)$.

A. -5 B. 5

C. 0 D. 不存在

10. 设 $f(x)=|x|$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=($ $)$.

A. -1 B. 1

C. 0 D. 不存在

二、计算题

1. 判断下列数列是否有极限.

(1) $u_n=\dfrac{1}{3^n}$； (2) $u_n=\dfrac{n}{2n+1}$；

(3) $u_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$； (4) $u_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ a+\sin x, & x\geqslant 0\end{cases}$，问 a 为何值时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<3\\ 3x-1, & x\geqslant 3\end{cases}$，讨论当 $x\to 3$ 时，$f(x)$ 的左、右极限，$\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ 是否存在.

第二节 极限的运算

问题情境

我们都体会过谣言的可怕. 比如“非典”时期，谣传板蓝根、口罩、白醋能够预防流感，导

致民众大量抢购；甲流时期，谣传大蒜具有预防甲流的功能，导致大蒜一度脱销等．谣言在初期迅速蔓延，这些行为会随着时间的推移而终止．这一过程能否用数学模型表示出来？在一定情况下，谣言的传播符合以下函数关系：$p(t)=\dfrac{1}{1+ae^{-kx}}$，其中，$p(t)$为 t 时刻人群中知道此谣言的人数比例，a 和 k 都是正数．求$\lim\limits_{x\to\infty}p(t)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+ae^{-kx}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+ae^{-kx})}=0$.

这就说明，随着时间的推移，最后所有人都会知道此谣言．

一、极限的四则运算法则

在自变量 x 的同一变化趋势下，设函数 $f(x)$和 $g(x)$的极限都存在，分别用 $y=4\sin x-3\cos x$ 和 $y=4\cos x-3\sin x$ 表示．

注意

此处省略了自变量 x 的变化趋势，表示在下面的讨论中，对于 $x\to x_0, x\to x_0^-, x\to x_0^+, x\to\infty, x\to -\infty, x\to+\infty$ 中的任何一种情形，结论都成立（下同）．

法则 1　$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$（可推广至有限多个）．

法则 2　$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$（可推广至有限多个）．

推论 1　$\lim[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim f(x)$（$C$ 为常数）．

推论 2　$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

法则 3　$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$（$\lim g(x)\neq 0$）．

上面的法则可以简单叙述为：若函数 $f(x)$和 $g(x)$的极限都存在，则它们代数和的极限等于极限的代数和，乘积的极限等于极限的乘积，商的极限等于极限的商（此时分母的极限不为 0）．关于数列的极限，也有类似的四则运算法则．

二、复合函数的极限运算法则

法则 4　设函数 $y=f[\varphi(x)]$由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成，且在 x_0 的去心邻域内有定义．若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{x\to u_0}f(u)=A$，且在 x_0 的去心邻域内有 $\varphi(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$$

法则 4 表示，如果两个函数 $f(u)$和 $\varphi(x)$满足相应的条件，则可以作变量代换 $u=\varphi(x)$，从而将求$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$的问题转化为求$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$.

例 1　求$\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-4x+1)$.

解　$\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-4x+1)=3\lim\limits_{x\to 2}x^2-4\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1$

$=12-8+1=5$.

利用极限的运算法则，不难得出如下结论：

设多项式 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\cdots+a_1x_0+a_0$$

即多项式的极限可以直接代入求解.

一般地,设多项式

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
$$Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}\quad (Q(x_0)\neq 0)$$

例 2　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+6x-1}{3x^2+5x+6}$.

解　由于分母的极限不为零,因此

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+6x-1}{3x^2+5x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+6x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+5x+6)}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$$

例 3　求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$.

解　当 $x\to 2$ 时,分子与分母的极限均为 0,极限为“$\dfrac{0}{0}$”型的未定式,此时不能直接利用商的运算法则,但由于分子和分母都有公因子$(x-2)$,当 $x\to 2$ 时,$x-2\neq 0$,这时,可以约去这个非零因子,所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

例 4　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-1}{6x^2-2x+6}$.

解　当 $x\to\infty$时,分子与分母的极限都不存在,为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的未定式,此时也无法用商的运算法则. 可先将分子与分母同时除以 x 的最高次幂,使分子和分母的极限都存在,再用相应的法则求解.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x-1}{6x^2-2x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{6-\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}=\frac{5+0-0}{6-0+0}=\frac{5}{6}$$

用同样的方法,可以得到如下结论:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\infty, & m<n\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & m=n\\ 0, & m>n\end{cases}$$

例 5　求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

解　该极限为“$\infty-\infty$”型的未定式,可以先通分,然后化成极限存在的形式,再用相应的运算法则求解.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{3-(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to1}\frac{2+x}{1+x+x^2}=1$$

例 6 求$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$.

解 该极限为“$\dfrac{0}{0}$”型的未定式，此时不能直接利用商的运算法则，但由于分母中带有根号，因此可以先将分母有理化.

$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}=\lim_{x\to4}(\sqrt{x+5}+3)=6$$

例 7 已知$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x-a}{x^2+5x+6}=b$，求常数 a，b.

解 因为当 $x\to-3$ 时，有 $x^2+5x+6\to0$，所以分子 $x-a$ 也趋近于 0，即 $-3-a=0$，得 $a=-3$，则

$$原式=\lim_{x\to-3}\frac{x-(-3)}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{(x+3)(x+2)}=-1$$

所以 $b=-1$.

例 8(电路电阻) 把一个 5Ω 的电阻与一个电阻为 r 的可变电阻器并联，则电路的总电阻为

$$R=\frac{5r}{5+r}$$

当含有可变电阻器 r 的这条支路突然断路时，求电路的总电阻.

解 当含有可变电阻器 r 的这条支路突然断路时，电路的总电阻为

$$R=\lim_{r\to+\infty}\frac{5r}{5+r}=5$$

三、知识拓展

问题 1(产品利润中的极限问题) 已知某厂生产 x 个汽车轮胎的成本(单位：元)为 $C(x)=300+\sqrt{1+x^2}$，生产 x 个汽车轮胎的平均成本为$\dfrac{C(x)}{x}$，当产量很大时，每个轮胎的成本大致为$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{C(x)}{x}$，求这个极限.

问题 2(成本-效益模型) 设汽车生产企业的清除费用(单位：元)为 $C(x)$，与清除污染成分的 $x\%$之间的函数模型为

$$C(x)=\frac{7\ 300x}{100-x}$$

求：(1)$\lim\limits_{x\to80}C(x)$；(2)$\lim\limits_{x\to100^-}C(x)$.

习题 2.2

一、选择题

1. 函数在一点附近有界是函数在该点有极限的（　　）条件.

A. 充分　　B. 必要

C. 充要　　D. 无关

2. 若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4(1+a)+bx^3+2}{x^3+x^2-1}=-2$，则$a$，$b$的值分别为（　　）.

A. $a=-3,b=0$　　B. $a=0,b=-2$

C. $a=-1,b=0$　　D. $a=-1,b=-2$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{2-n}=$（　　）.

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. -3

C. ∞　　D. 0

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)=$（　　）.

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. 0　　D. ∞

5. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x+k}{x-2}=7$，则$k=$（　　）.

A. 0　　B. -10

C. 10　　D. 不存在

6. 若$f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant0\\ ax+b, & x>0\end{cases}$，在分段点$x=0$处的极限为1，则$b=$（　　）.

A. -1　　B. 1

C. 0　　D. 2

二、计算题

1. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{1-x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

2. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x<0\\ 0, & x=0\\ x^2-2x, & 0<x\leqslant2\\ 3x+6, & x>2\end{cases}$，讨论$x\to0$及$x\to2$时$f(x)$的极限是否存在，并且求

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$及$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. 若$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=5$,求 a,b 的值.

4. 设某企业 x 个汽车轮胎的成本(单位:元)为

$$C(x)=200+\sqrt{2+2x+x^2}$$

生产 x 个汽车轮胎的成本为$\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}$,当生产量很大时,每个轮胎的成本大致为$\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{C}(x)$,试求这个极限.

第三节　两个重要极限

问题情境

伴随着汽车普及程度的提高和汽车消费观念的不断成熟,人们对于二手车的接受程度也在不断地提高,从而带来了二手车市场的蓬勃发展.据中国汽车流通协会统计,2018 年全国二手车累积交易 1 382.19 万辆,累计同比增长 11.46%.预计到 2020 年,我国二手车交易规模将达到 2 920 万辆,新车与二手车交易规模比例将接近 1∶1.但由于影响二手车价格的因素比较多,消费者在对二手车进行估价时往往不知道从何下手.

在科学技术中,经常要用到与三角函数或指数函数及对数函数有关的极限,计算的基础是两个重要的极限,下面分别加以介绍.

一、重要极限Ⅰ:$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

下面证明$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

作单位圆(见图 2-7),取$\angle AOB=x$(rad),于是有:$BC=\sin x$,$AB=x$,$AD=\tan x$.由图 2-7 得 $S_{\triangle OAB}<S_{扇形OAB}<S_{\triangle OAD}$,即

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$$

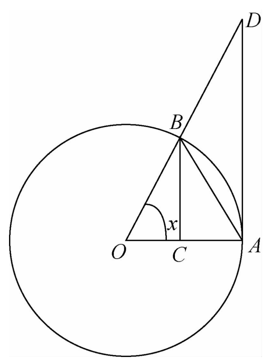

图 2-7

得

$$\sin x<x<\tan x$$

从而，有

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

上述不等式是当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时得到的，但因当 x 用 $-x$ 代换时，$\cos x$ 和 $\frac{\sin x}{x}$ 都不变号，所以 x 为负时，关系式也成立.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，又 $\lim\limits_{x\to 0}1=1$，由极限的夹逼准则可知，介于它们之间的函数 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x\to 0$ 时，极限也是 1.

这样就证明了 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

注意

这个重要极限是"$\frac{0}{0}$"型的，为了强调其形式，可把它形象地写成

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1 \quad (\square\text{方框代表同一变量})$$

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$.

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}$.

解　令 $\arcsin x=t$，则 $x=\sin t$，当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

例 3　求 $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$.

解　令 $\pi-x=t$，则 $x=\pi-t$，当 $x\to\pi$ 时，$t\to 0$，所以

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$.

解　令 $2x=t$，当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{2}{3}$$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$.

二、重要极限Ⅱ：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 中，等式右端的 e 就是自然对数的底，它是一个无理数，e=2.718 281 828 459 045…公式的理论证明从略.

为了强调其形式，有时形象地写成

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e$$

如果令 $x=\frac{1}{t}$，则上式的形式还可以推广为

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^2=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^2=e^2$.

例 7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=e^3$.

例 8 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]=e$.

例 9 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)^{\frac{2}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}[1+(-x)]^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\{[1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)}}\}^{-2}=e^{-2}$.

三、知识拓展

问题 1（汽车设备折旧问题） 由于国内的二手车交易市场体制还不够健全，因此很多消费者对卖家的报价都心中没底，汽车设备折旧就是将汽车设备的原价值减去到期后的折旧费用继续产生折旧费用的结算方式，即把第一期的价值减去折旧费作为第二期的价值，然后反复折旧. 假设某品牌的汽车原价为 20 万元，年均折旧率为 10%，问 5 年后该汽车的价值是多少？

问题 2 某公司花 10 万元购买了汽车设备，年平均折旧率按 20%的连续折旧计算，问多少天后，汽车设备的价值将少于 3 万元？

习题 2.3

一、选择题

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}=($ $\quad$).

A. $\frac{5}{2}$　　B. 1

C. $\frac{2}{5}$　　D. 0

2. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\sin\frac{1}{x-1}=$(　　).

A. 1　　B. 0

C. -1　　D. 不存在

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 3x}=$(　　).

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. 0　　D. 不存在

4. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{x-\pi}{\sin(\pi-x)}=$(　　).

A. 0　　B. -1

C. 1　　D. 不存在

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x-1}=$(　　).

A. e　　B. e^2

C. e^{-2}　　B. e^{-1}

6. $\lim\limits_{n\to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}=$(　　).

A. 1　　B. e

C. e^3　　D. ∞

二、填空题

1. 若$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\frac{k}{x}\right)^{x}=e^2$，则 $k=$________.

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=$________.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+3}=$________.

三、求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{2x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\cot x$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{2}{x}-1}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$.

第四节　无穷小量与无穷大量

问题情境

英国海岸线有多长

也许你会很快给出一个答案.设想我们只考虑超过 1 km 的弯儿,会有一个数;如果将超过 1 m 的弯儿考虑在内,则肯定会比原来长,如果进一步将 1 cm、1 mm…的弯都考虑在内,则会得到什么结果呢?下面介绍 Koch 雪花曲线.

瑞典人科赫于 1904 年提出了著名的雪花曲线.这种曲线的做法是:从一个正三角形开始,把每条边分成三等份,然后以各边的中间长度为底边.分别向外作正三角形,再把“底边”线段抹掉,这样就得到一个六角形,它共有 12 条边.再把每条边三等分,以各中间部分的长度为底边,向外作正三角形后,抹掉底边线段.反复进行这一过程,就会得到一个“雪花”样子的曲线.这个曲线叫作科赫曲线或雪花曲线,如图 2-8 所示.

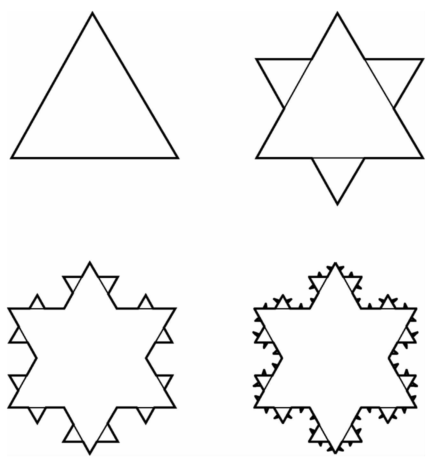

图 2-8

由于最初三角形的边长为 l,记第 n 步所得曲线长度为 l_n,则有

$$l_0=3,l_1=3\times4\times\frac{1}{3}=3\times\frac{4}{3},l_2=3\times4^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=3\times\left(\frac{4}{3}\right)^2,\cdots,l_n=3\times4^n\times\left(\frac{1}{3}\right)^n,\cdots$$

可见,有$\lim\limits_{n\to\infty}l_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[3\times4^n\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=+\infty$,即 Koch 曲线的周长为无限.

在实际问题中,我们经常会遇到变量的绝对值可以无限减小的情况.例如,一台正在运行的电动机被切断电源后,其转速会随着时间的增加而越来越小,最后变为零.再如,一列火车进站刹车后,速度会越来越小,直至为零.有时,我们也会遇到变量的绝对值可以无限增大的量.这些变化趋势可以用无穷小量和无穷大量来描述.

一、无穷小量

1. 无穷小量的定义

定义 1　若函数 $\alpha(x)$在 x 的某种变化趋势下以零为极限,则称 $\alpha(x)$为在 x 的这种变化

趋势下的**无穷小量**，简称**无穷小**.

例 1　判断下列量在指定的过程中是否是无穷小量.

(1) $f(x)=\frac{1}{x}, x\to\infty$；　　(2) $f(x)=\frac{1}{x}, x\to 1$；

(3) $f(x)=x^2, x\to 0$；　　(4) $f(x)=\frac{1}{x^2}, x\to\infty$.

解　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，所以当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 是无穷小量.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1\neq 0$，所以当 $x\to 1$ 时，$\frac{1}{x}$ 不是无穷小量.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，所以当 $x\to 0$ 时，x^2 是无穷小量.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$，所以当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x^2}$ 是无穷小量.

注意

(1) 无穷小量是一个函数. 说一个函数是无穷小量，必须指明自变量的变化趋势. 例如，$\frac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时是无穷小量，而当 $x\to 1$ 时则不是无穷小量.

(2) 不要将绝对值很小的常数说成无穷小量. 例如，$100^{-10\,000}$ 是一个很小的数，但不是无穷小量.

(3) 常数中只有零可以看成无穷小量.

2. 无穷小的性质

性质 1　有限个无穷小量的代数和是无穷小量.

注意

无穷多个无穷小量的代数和未必是无穷小量.

性质 2　有限个无穷小量的乘积是无穷小量.

推论　常数与无穷小量的乘积是无穷小量.

性质 3　有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量.

注意

两个无穷小的商未必是无穷小量.

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$.

解　当 $x\to 0$ 时，$x^2\to 0$，x^2 是无穷小，而 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即 $\sin\frac{1}{x}$ 是有界函数，所以 $x^2\sin\frac{1}{x}$ 也是无穷小，即 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$.

3. 函数极限与无穷小的关系

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中，$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

定理中自变量的变化趋势换成 $x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$中的任何一种情形时，结论仍成立. 定理表明，如果一个函数的极限存在，则该函数可以表示成一个常数与一个无穷小量的代数和；反之，若一个函数能表示成一个常数与一个无穷小量的代数和的形式，则函数的极限存在.

二、无穷大量

定义 1 在自变量的某种变化趋势下，若函数 $f(x)$的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$为在 x 的这种变化趋势下的**无穷大量**，简称**无穷大**.

当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$为无穷大量，记作$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

当 $x\to\infty$时，$f(x)$为无穷大量，记作$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

例如，由存款分析案例知道，若某人将一定本金 A 元存入银行，则当存入年限 $n\to+\infty$时，本金的本利和无限增大.

例 3 判断下列函数在指定的过程中是无穷小量还是无穷大量？说明理由.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$x\to\infty$；　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{2^x}$，$x\to+\infty$；

(3) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$，$x\to1$；　　(4) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$，$x\to\pi$.

解 (1) 由于$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x^2)=\infty$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0$. 故当 $x\to\infty$时，$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$是无穷小量.

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2^x}=0$. 故当 $x\to+\infty$时，$f(x)=\dfrac{1}{2^x}$是无穷小量.

(3) 由于$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2+1)}=\dfrac{0}{2}=0$. 所以$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\infty$. 故当 $x\to0$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$是无穷大量.

(4) 由于$\lim\limits_{x\to\pi}\sin x=0$，所以$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{\sin x}=\infty$. 故当 $x\to\pi$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$是无穷大量.

有时，无穷大量具有确定的符号，在 x 的某种变化趋势下，若 $f(x)$恒为正且无限增大，则称 $f(x)$为正无穷大量，并用$+\infty$表示；若 $f(x)$恒为负且其绝对值无限增大，则称 $f(x)$为负无穷大量，并用$-\infty$表示.

例如，$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$.

注意

无穷大量是一个函数，而不是一个很大的数. 函数为无穷大量，是函数极限不存在的一种特殊情况. 但为了叙述方便，仍然说成函数的极限是无穷大. 任意常数都不是无穷大量.

三、无穷小量与无穷大量的关系

根据无穷小量和无穷大量的定义，它们的关系可用下面的定理来描述：

定理 2　在自变量的同一变化趋势下，无穷大量的倒数是无穷小量；恒不为零的无穷小量的倒数是无穷大量.

使用无穷小量与无穷大量的关系定理可以方便地讨论极限结果是无穷大量的情况.

例 4　求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$.

解　当 $x\to 1$ 时，$x-1\to 0$，即 $x-1$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷小量，所以 $x-1$ 的倒数$\dfrac{1}{x-1}$是无穷大量，即$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

前面已经讨论了无穷小量的和、差、积的运算结果，而两个无穷小量的商会出现各种不同的情况，有的可能为无穷大量，有的可能为无穷小量，有的可能为常数. 两个无穷小量的商的不同结果，反映了两个无穷小量趋于零的快慢程度. 比较两个无穷小量趋于零的速度快慢，将会使后面问题的讨论更加方便，因此主要根据商的结果来定义无穷小量的比较结果.

定义 3　设 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$均为自变量在同一变化趋势下的无穷小.

(1)若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$是比 $\beta(x)$**高阶的无穷小量**，或称 $\beta(x)$是比 $\alpha(x)$**低阶的无穷小量**，记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

(2)若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$和 $\beta(x)$是**同阶的无穷小量**.

(3)若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$和 $\beta(x)$为**等价的无穷小量**，并记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

等价无穷小量是同阶无穷小量的一个非常重要的特例.

例如，当 $x\to 0$ 时，x^2 与 $5x$ 都是无穷小量，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{5x}=0$，所以，当 $x\to 0$ 时，x^2 是比 $5x$ 高阶的无穷小量，即 $x^2=o(5x)$.

当 $x\to 0$ 时，下列常见的无穷小量是等价的：

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ln(1+x)\sim x,\mathrm{e}^x-1\sim x,\ \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$$

定理 3　设 $\alpha(x)$，$\alpha_1(x)$，$\beta(x)$，$\beta_1(x)$是自变量在同一变化趋势下的无穷小量，且有 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$，若 $\lim\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$存在(或为$\infty$)，则 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$也存在(或为$\infty$)，并且有 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$(或为$\infty$).

例 5　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解　当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\sin 5x\sim 5x$，则由定理 3 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$$

例 5 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{2x}$.

解 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{3}$，则由定理 3 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3}}{2x}=\frac{1}{6}$$

例 7 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

解 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sin x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x}=\frac{1}{2}$$

习题 2.4

一、选择题

1. 当 $x\to+\infty$时，下列变量中为无穷大量的是(　　).

A. $\dfrac{1}{x}$　　B. $\ln(1+x)$

C. $\sin x$　　D. e^{-x}

2. 当 $x\to 0$ 时，$3x^2$ 是(　　).

A. x 的同阶无穷小量　　B. x 的等价无穷小量

C. 比 x 高阶的无穷小量　　D. 比 x 低阶的无穷小量

3. 当 $x\to 0$ 时，下面无穷小量中与 x 等价的无穷小量为(　　).

A. $3x$　　B. $\sin x$

C. $\ln(1+x^2)$　　D. $x+\sin x$

4. 下列变量在给定的变化过程中为无穷小量的是(　　).

A. $2^x-1(x\to 0)$　　B. $\dfrac{\sin x}{x}(x\to 0)$

C. $\dfrac{1}{(x-1)^2}(x\to 1)$　　D. $2^{-x}-1(x\to 1)$

5. 在同一变化过程中，下列结论中正确的是(　　).

A. 有界变量与无穷小量的乘积是无穷小量

B. 有界变量与无穷大量的乘积是无穷大量

C. 无穷小量与无穷大量的乘积是有界变量

D. 无穷大量与无穷大量的和为无穷大量

6. 当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 相比是(　　).

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小

C. 等价无穷小　　D. 同阶(非等阶)无穷小

7. 设 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$，则当 $x\to\infty$时，$f(x)$是(　　).

A. 无穷小量　　B. 无穷大量

C. 有界变量但非无穷小量　　D. 无界变量但非无穷大量

8. 当 $x\to 1$ 时，下列变量中不是无穷小量的是(　　).

A. x^2-1　　B. $x(x-2)+1$

C. $3x^2-2x-1$　　D. $4x^2-2x+1$

9. 当 $x\to 0$ 时，下列函数为无穷小量的是(　　).

A. $\dfrac{x+\cos x}{x}$　　B. $\dfrac{\sin x}{x}$

C. $\dfrac{2\sin x}{\sqrt{x}}$　　D. $\dfrac{1}{2^x-1}$

10. 下列函数中，当 $x\to 0$ 时，与无穷小量 x 相比是高阶无穷小量的是(　　).

A. $\sin x$　　B. $x+x^2$

C. $\sqrt{x}$　　D. $1-\cos x$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)=$(　　).

A. 1　　B. -1

C. 0　　D. 不存在

二、计算下列函数的极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x)\cos\dfrac{1}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x+1}\left(3+\sin\dfrac{1}{x}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x+1}(\sin x+\cos x)$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 5x}{\sin\dfrac{x}{2}\tan 3x}$.

第五节　函数的连续性

问题情境

发电机是汽车的主要电源，由发动机驱动. 发电机在正常工作时，对除起动机以外的所有用电设备供电，若还有过余能量，则再向蓄电池充电. 现在的汽车发电机主要采用交流发电机. 随时间按照正弦规律变化的电动势、电压和电流统称正弦交流电，简称交流电. 交流电函数必然是连续函数，这样才能保证供电的连续性.

在自然现象和日常生活中，变量的变化有渐变和突变两种形式，如气温的变化、人体身高的增长等都随着时间的变化而连续变化，而火车和出租车的票价则随着运输距离的不同而呈现出跳跃性的变化. 这些现象反映在数学上就是函数的连续性与间断性. 函数的连续性是函数的重要形态之一. 利用函数的连续性也可方便地计算函数的极限. 连续函数是高等数

学的主要研究对象之一.

一、连续的概念

引例　我们知道人体的高度 h 是时间 t 的函数 $h(t)$，而且 h 随着 t 的变化而连续变化. 事实上，当时间 t 的变化很微小时，人的高度变化也很微小，即当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta h\to 0$.

1. 变量的改变量

定义 1　如果自变量 x 从初值 x_0 变到终值 x_1，那么终值 x_1 与初值 x_0 的差 x_1-x_0 叫作**自变量的改变量**(有的称为**自变量的增量**)，记为 $\Delta x=x_1-x_0$.

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义，当自变量 x 由 x_0 变成 $x_0+\Delta x$ 时，相应的函数值由 $f(x_0)$ 变成 $f(x_0+\Delta x)$，则称 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为在点 x_0 处的**函数的改变量**(有的称为**函数的增量**)，记为 $y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如图 2-9 所示.

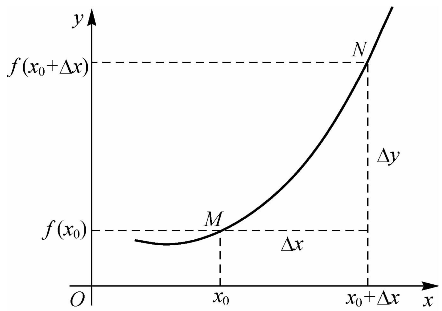

图 2-9

2. 函数在一点的连续性

函数在一点连续，其直观的几何意义是曲线在对应点处是连续的，如图 2-9 所示.

定义 3　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义，如果当自变量 x 在点 x_0 处的改变量 Δx 趋近于零时，函数 $y=f(x)$ 相应的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋近于零，则称**函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续**. 用极限来表示，则是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \text{ 或 } \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

在定义 3 中，若令 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示成 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$. $\Delta x\to 0$ 可表示为 $x\to x_0$，相应地，$\Delta y\to 0$ 可表示为 $f(x)\to f(x_0)$，因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 也可表示成 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

这样，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义也可叙述如下：

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义，如果当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限存在，且等于它在点 x_0 处的函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称**函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续**.

由定义 4 可知，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续必须同时满足以下 3 个条件：

(1)在点 x_0 处有定义；

(2)在点 x_0 处的极限存在；

(3)在点 x_0 处的极限值等于点 x_0 处的函数值.

由于连续是用极限来定义的，而函数在点 x_0 处的极限又分左极限和右极限，因此，函数

在点 x_0 处的连续也可分为左连续和右连续.

定义 5 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域左侧 $(x_0-\delta, x_0]$ 有定义，如果当 x 从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限存在且等于点 x_0 处的函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 **左连续.**

定义 6 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域右侧 $[x_0, x_0+\delta)$ 有定义，如果当 x 从点 x_0 的右侧无限趋近于点 x_0 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右极限存在且等于点 x_0 处的函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 **右连续.**

由连续的定义可以得到如下结论：

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 左连续且右连续. 即

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

3. 函数在区间的连续性

定义 7 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，则称**函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.**

定义 8 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且在左端点 $x=a$ 处右连续，即 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$，同时在右端点 $x=b$ 处左连续，即 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$，则称**函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.**

例 1 设一个电路中的电荷量 $Q=\begin{cases} C, & t\leqslant 0 \\ Ce^{-\frac{t}{RC}}, & t>0 \end{cases}$，其中 C,R 为正常数，分析电荷量 Q 在时间 $t\to 0$ 时的极限.

解 因为

$$\lim_{t\to 0^-} Q=\lim_{t\to 0^-} C=C$$

$$\lim_{t\to 0^+} Q=\lim_{t\to 0^+} Ce^{-\frac{t}{RC}}=C$$

$$\lim_{t\to 0^-} Q=\lim_{t\to 0^+} Q=C$$

所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

例 2 证明函数 $y=x^2$ 在其定义域内连续.

证明 从函数 $y=x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内任取一点 x_0，则 $y=x^2$ 在点 x_0 的邻域内有定义，又因为 $\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0{}^2=2x_0\Delta x+\Delta x^2$，当 $\Delta x\to 0$ 时 (x_0 为常数)，$2x_0\Delta x+\Delta x^2$ 为无穷小，因此 $\Delta y\to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

由连续的定义可知，函数 $y=x^2$ 在点 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性可知，函数 $y=x^2$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

可以证明：基本初等函数在其定义域内都是连续的.

例 3 证明函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续.

证明 函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 的邻域内有定义，

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0\text{（此处用无穷小与有界函数的乘积求极限）}$$

又 $f(0)=0$，因此$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，由连续的定义可知，函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续.

例 4 证明函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续.

证明 函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 的邻域内有定义，由于函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的左、右两侧有不同的表达式，因此需要利用左、右极限的关系确定函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的极限情况.

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x+1)=1,\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\cos x=1$$

左、右极限均存在且相等，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$，而 $f(0)=2\times 0+1=1$，即

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

由连续的定义可知，函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续.

例 5 函数 $f(x)=\begin{cases}(1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ \mathrm{e}, & x=0\\ \dfrac{\sin ax}{bx}, & x<0\end{cases}$ $(a\neq 0,b\neq 0)$在点 $x=0$ 处连续，求 a,b.

解 函数 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续，则有点 $x=0$ 处左、右极限相等且等于 $f(0)$.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^a$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$$

$$f(0)=\mathrm{e}$$

所以 $\mathrm{e}^a=\dfrac{a}{b}=\mathrm{e}$. 故得 $a=1,b=\mathrm{e}^{-1}$.

二、函数的间断

在实际生活中还有一类现象，如某市人口的变化、股市的变化等，它们在某些点上也会出现不连续的情形.

引例 电子技术中常用周期为 T 的**矩形波**，显然电压 E 在$-\dfrac{T}{2}$，$-T$，0，$\dfrac{T}{2}$，T 等处不连续，如图 2-10 所示.

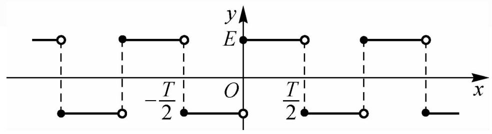

图 2-10

定义 9 如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 处不连续，则称 x_0 为函数 $f(x)$的一个**间断点**，也称函数 $f(x)$在该点**间断**.

由函数在点 x_0 处连续的定义可知，如果函数 $y=f(x)$在点 x_0 满足下列 3 个条件之一，则点 x_0 是 $f(x)$的一个间断点：

(1)函数在点 x_0 处没有定义；

(2)函数在点 x_0 处的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

(3)虽然$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但不等于点 x_0 处的函数值，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

例如，导线中的电流通常是连续变化的，但当电流增加到一定程度时，会烧断保险丝，电流就突然为 0，这时连续性被破坏而出现间断.

又如，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$在点 $x=1$ 处无定义，所以 $x=1$ 是函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的间断点.

再如，函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 1\\ x, & x<1\end{cases}$在点 $x=1$ 处的左、右极限存在但不相等，即$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在，所以 $x=1$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 1\\ x, & x<1\end{cases}$的间断点.

例 6 确定函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$的间断点.

解 函数 $f(x)$在点 $x=0$ 处的极限存在，且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$，但因为 $f(0)=1$，在点 $x=0$ 处的极限值不等于其函数值，所以 $x=1$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$的间断点.

上面列举了函数间断的不同情况，为使后面的讨论更加方便，通常把间断点分成两类.

定义 10 如果 x_0 为函数 $y=f(x)$的间断点，且左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在，则称 x_0 为函数 $f(x)$的**第一类间断点**. 即左、右极限都存在的间断点为第一类间断点.

如果 x_0 为函数 $f(x)$的第一类间断点，且左、右极限相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，此时形成间断的原因是函数 $f(x)$在点 x_0 处无定义，或者有定义但极限值与函数值不相等，对于这种情况，可以根据需要在点 x_0 处重新定义或改变定义，使 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，从而使函数 $f(x)$在点 x_0 处连续，因此将这类间断点称为**可去间断点**. 如果左、右极限都存在但不相等而产生的间断，称为**跳跃间断点**.

定义 11 如果 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的间断点，且左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 中至少有一个不存在，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

实际上，不属于第一类间断点的任何间断点都属于第二类间断点.

例 7（冰雪融化所需要的热量） 设 1 g 冰从 -40 ℃升到 100 ℃所需要的热量（单位：J）为

$$f(x)=\begin{cases}2.1x+84, & -40\leqslant x\leqslant 0\\ 4.2x+420, & x>0\end{cases}$$

试问函数在点 $x=0$ 处是否连续？若不连续，指出其间断点的类型，并解释其几何意义.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2.1x+84)=84$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(4.2x+420)=420$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x)$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

由于函数 $f(x)$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限都存在，所以 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点. 这说明冰融化成水时需要的热量会突然增加.

例 8 证明 $x=0$ 为函数 $f(x)=\dfrac{-x}{|x|}$ 的第一类间断点.

证明 因为函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处没有定义，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点，又因为

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{-x}=1,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{x}=-1$$

其左极限和右极限都存在，所以 $x=0$ 为函数的第一类间断点，且是跳跃间断点.

例 9 证明 $x=0$ 是 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的第一类间断点.

证明 因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，即函数在点 $x=0$ 处左极限和右极限存在，但由于

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1\neq f(0)=0$$

因此，$x=0$ 是该函数的第一类间断点，同时也是可去间断点.

说明

如果修改函数的定义，令 $f(0)=1$，使 $f(x)$ 成为一个新的函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

三、初等函数的连续性

1. 连续函数四则运算的连续性

定理 1 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 x_0 处连续，则 $f(x)+g(x)$、$f(x)-g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$

在点 x_0 处连续，若 $g(x_0)\neq 0$，则$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在点 x_0 处也连续.

证明 仅证明 $f(x)\cdot g(x)$的情形，其余从略.

因为 $f(x)$和 $g(x)$在点 x_0 处连续，所以有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$，由极限的运算法则可得

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0}[f(x)]\cdot\lim_{x\to x_0}[g(x)]=f(x_0)\cdot g(x_0)$$

因此，$f(x)\cdot g(x)$在点 x_0 处连续.

2. 复合函数的连续性

定理 2 设函数 $y=f(u)$在点 u_0 处连续，函数 $u=\varphi(x)$在点 x_0 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $f[\varphi(x)]$在点 x_0 处连续.

由定理可知，若 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$满足定理的条件，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]$也可以看成$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$，即

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]$$

这说明，在求连续函数的复合函数的极限时，极限符号与函数的运算符号可以交换次序.

3. 反函数的连续性

定理 3 若函数 $y=f(x)$在某区间上单调且连续，则其反函数在对应的区间上也单调且连续，且它们的单调性相同.

4. 初等函数的连续性及连续函数极限运算

连续函数经过四则运算及复合运算后仍然是连续函数，根据初等函数的定义可得如下结论：

定理 4 初等函数在其定义域内都是连续的.

定理 4 说明，求初等函数在定义域内指定点处的极限时，只需计算该点处的函数值即可.

例 10 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sqrt{5-\sin 2x}$.

解 因为$\sqrt{5-\sin 2x}$是初等函数，在点 $x=\dfrac{\pi}{4}$处有定义，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sqrt{5-\sin 2x}=\sqrt{5-\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)}=2$$

例 11 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\cos x}{e^x\sqrt{1+x^2}}$.

解 因为$\dfrac{x^2+\cos x}{e^x\sqrt{1+x^2}}$是初等函数，在点 $x=0$ 处有定义，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\cos x}{e^x\sqrt{1+x^2}}=\frac{0^2+\cos 0}{e^0\sqrt{1+0^2}}=1$$

例 12 计算$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$.

解 虽然$\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$是初等函数,但在点 $x=4$ 处没有定义,不能直接代入;在将分子与分母有理化后,可以消去零因子,从而转化为另一个初等函数的极限.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+1-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3}$$

此时,初等函数函数$\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3}$在点 $x=4$ 处有定义,则

$$\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{2(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{2\times 4+1}+3}=\frac{4}{3}$$

即$\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}=\frac{4}{3}$.

四、闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数具有一些重要的性质. 在给出性质之前,先明确函数的最大值与最小值.

定义 12 设函数 $y=f(x)$在数集 D 上有定义,x_0 是 D 中的某一点,对于 D 中的任一点 $x\in D$,若恒有 $f(x)\geqslant f(x_0)$(或 $f(x)\leqslant f(x_0)$),则称 $f(x_0)$为函数 $f(x)$的**最小值**(**或最大值**),x_0 称为函数 $f(x)$的**最小值点**(**或最大值点**).

说明

不同函数在不同的区间内取得最大值与最小值的情况是不同的.

例如,函数 $y=2x$ 在(1,2)内没有最大值,也没有最小值;在[1,2)内只有最小值 2,而没有最大值;在(1,2]内只有最大值 4,而没有最小值;在[1,2]上既有最大值,也有最小值.

$y=(x-1)^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内只有最小值 0,而没有最大值,且最小值点只有 $x=1$.

$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内既有最大值 1,又有最小值-1.

证明闭区间上连续函数的性质时要用到严密的实数理论. 下面只给出结论而不予证明.

定理 5(最大值和最小值存在定理) 闭区间上的连续函数一定存在最大值和最小值.

说明

定理中的闭区间和连续这两个条件缺一不可. 若函数在开区间内连续,则它在该区间内未必能取得最大值和最小值. 例如,函数 $y=x^2$ 在区间(0,1)内就没有最大值和最小值. 函数在闭区间上不连续,也未必能取得最大值和最小值.

推论 若函数 $y=f(x)$在闭区间上连续,则它在该区间上有界.

定理 6(介值定理) 若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)\neq f(b)$,则对于任意 $f(a)$与 $f(b)$之间的一个常数 c,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=c$.

推论 若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则它必能取到其所在区间上的最小值与最大值之间的一切值.

定理 7(零点定理) 若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)$与 $f(b)$异号,即 $f(a)\cdot f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$,如图 2-11 所示.

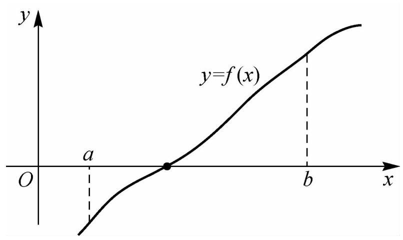

图 2-11

函数 $f(x)$的零点即为方程 $f(x)=0$ 的根,因此,零点存在定理又称根的存在定理,用它来证明方程根的存在性是非常有效的,结合函数的单调性还可以明确方程根的分布情况.

例 13 证明方程 $x^5-3x=1$ 在$(1,2)$内至少存在一个实根.

证明 将方程 $x^5-3x=1$ 化成 $x^5-3x-1=0$,构造函数 $f(x)=x^5-3x-1$,由于 $f(x)$在$[1,2]$上连续,且 $f(1)=-3<0$,$f(2)=25>0$,因此,连续函数 $f(x)$在区间端点处的函数值异号.由零点定理可知,$f(x)$在$(1,2)$内至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$,即 ξ 是方程 $f(x)=0$ 的一个根,故方程 $x^5-3x=1$ 在$(1,2)$内至少存在一个实根.

例 14 证明方程 $x+e^x=0$ 在$(-1,1)$内有唯一的实根.

证明 构造函数 $f(x)=x+e^x$,由于 $f(x)$是初等函数,在$[-1,1]$上连续,又

$$f(-1)=-1+e^{-1}<0,f(1)=1+e>0$$

即 $f(-1)\cdot f(1)<0$.由零点存在定理可知,$f(x)$在$(-1,1)$内至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$,即 ξ 是方程 $f(x)=0$ 的一个根,故方程 $x+e^x=0$ 在$(-1,1)$内至少存在一个实根.又因为函数 $f(x)=x+e^x$ 中的 x 和 e^x 在$[-1,1]$上均是单调增加的,所以函数 $f(x)=x+e^x$ 在$[-1,1]$上也是单调增加的,从而方程 $f(x)=0$ 在$(-1,1)$内最多存在一个实根.

综上所述,方程 $x+e^x=0$ 在$(-1,1)$内有唯一的实根.

习题 2.5

一、选择题

1. 函数 $f(x)$在点 x_0 处有定义是 $f(x)$在点 x_0 处连续的( ).

A. 充分条件　　　　B. 必要条件

C. 充要条件　　　　D. 无关条件

2. 函数 $f(x)$在点 x_0 处连续是 $f(x)$在点 x_0 处有极限的( ).

A. 充分条件　　　　B. 必要条件

C. 充要条件　　　　D. 无关条件

3. 若 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的初等函数,则 $f(x)$在$[a,b]$上( ).

A. 有最大值无最小值　　B. 有最小值无最大值

C. 必有最大值和最小值　　D. 无最大值也无最小值

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}, & x\neq 0\\ -2, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$(　　).

A. 2　　B. -1

C. -2　　D. 1

5. 设 $f(x)=\begin{cases}5x+3, & x<0\\ x^2-x+A, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $A=$(　　).

A. 3　　B. -3

C. 0　　D. 1

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+bx+2}{1-x}, & x\neq 1\\ a, & x=1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续，则有(　　).

A. $a=1,b=-3$　　B. $b=-1,b=-3$

C. $a=-1,b=3$　　D. $a=1,b=3$

7. 函数 $f(x)=\begin{cases}3x-1, & 0\leqslant x<2\\ x^2+1, & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 的连续区间为(　　).

A. $[-1,2)$　　B. $[-1,0)$

C. $(0,2)$　　D. $[-1,0)$及$[0,2)$

二、填空题

1. 设函数 $f(x)$在点 x_0 处连续且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$，则 $f(x_0)=$________.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ a+x^2, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

三、计算题

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}e^x+1, & x<0\\ K, & x=0\\ \dfrac{\sin 2x}{x}, & x>0\end{cases}$，问 K 取何值时，$f(x)$为连续函数.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan 2x}{x}, & x<0\\ (x+k)^2, & x\geqslant 0\end{cases}$，问 k 取何值时，$f(x)$在其定义域内连续.

四、证明题

1. 证明五次代数方程 $x^5-5x-1=0$ 在$(1,2)$内至少有一个根.

2. 证明曲线 $y=x^4-3x^2+7x-10$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 之间至少与 x 轴有一个交点.

3. (停车场收费)某停车场第一个小时(或不到 1 小时)收费 3 元，以后每小时(或不到整时)收费 2 元，每天最多收费 10 元. 讨论函数的间断点及它们的意义.

数学实验二 利用 Mathematica 求极限

在计算极限时,常常需要应用一些运算技巧对函数 $f(x)$ 进行初等变换,特别是自变量在某一给定值的变化过程中,分子和分母都趋向于 0 或∞的情况下,更需要具有一定的运算技巧. 利用 Mathematica 可以比较迅速地得到极限的计算结果.

利用 Mathematica 求极限的命令语法格式及其意义见表 2-2.

表 2-2

命令语法格式	意 义
Limit[f(x),x→x0]	当 x 趋向于 x_0 时,求 $f(x)$ 的极限
Limit[f(x),x→x0,Direction→1]	计算 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限
Limit[f(x),x→x0,Direction→−1]	计算 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限

趋向的点可以是常数,也可以是+∞,−∞.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

解 In[1]:=Limit$\left[\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1},x\to 1\right]$

Out[1]=$-\dfrac{2}{3}$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

解 In[1]:=Limit$\left[\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1},x\to\infty\right]$

Out[1]=0

例 3 求(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x$; (2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x$.

解 (1)In[1]:=Limit$\left[\text{Tan }[x],x\to\dfrac{\pi}{2},\text{Direction}\to 1\right]$

Out[1]=∞

(2)In[2]:=Limit$\left[\text{Tan }[x],x\to\dfrac{\pi}{2},\text{Direction}\to -1\right]$

Out[2]=−∞

例 4 利用 Mathematica 软件,当 $x\to 0$ 时,比较下列无穷小的阶.

(1) $\sqrt{1+x}-1$ 与 x^2; (2)$\sin x^3$ 与 x^3.

解 (1)In[1]:=Limit$\left[\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2},x\to 0\right]$

Out[1]=∞

(2)In[2]:=Limit$\left[\dfrac{\text{Sin }[x^3]}{x^3},x\to 0\right]$

Out[2]=1

因此，$\sqrt{1+x}-1$ 是比 x^2 低阶的无穷小，$\sin x^3$ 与 x^3 是同阶的无穷小.

复习题二

1. 填空题.

(1)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $f(x)$和 A 的关系是________.

(2)若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=$________.

(3)当 $x\to 0$ 时,无穷小量 $1-\cos x$ 与 mx^n 等价,则 $m=$________,$n=$________.

(4)若 $f(x)=\begin{cases}5e^{2x}, & x<0\\ 3x+a, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

(5)函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$的间断点是________.

(6)如果$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin mx}{2x}=\dfrac{2}{3}$,则 $m=$________.

(7)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-7}{2n+1}\right)^2=$________.

(8)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=$________.

(9)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n}-\dfrac{n}{2}\right)=$________.

(10)函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0\\ x-1, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的间断点是________.

2. 选择题.

(1)若 $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=A$,则(　　).

A. $f(2)=A$　　　　B. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=A$

C. $f(x)$在点 $x=2$ 处有定义　　　　D. $f(x)$在点 $x=2$ 处连续

(2)当 $x\to$(　　)时,$y=\dfrac{x^2-1}{x(x-1)}$是无穷大.

A. 0　　　　B. 1

C. $+\infty$　　　　D. $-\infty$

(3)设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$,则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$(　　).

A. 1　　　　B. -1

C. 0　　　　D. 不存在

(4)若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且(　　)时,则 $f(x)=0$ 在(a,b)内至少有一个实数根.

A. $f(a)=f(b)$　　　　B. $f(a)\neq f(b)$

C. $f(a)\cdot f(b)<0$　　　　D. $f(a)\cdot f(b)>0$

(5)设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\leqslant 0 \\ x^2, & x>0 \end{cases}$,则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$(　　).

A. 1　　　B. -1

C. 0　　　D. 不存在

(6)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)=$(　　).

A. 2　　　B. 1

C. 0　　　D. $\dfrac{1}{2}$

(7)当 $x\to 0$ 时,下列的无穷小量中,与 x 等价的函数是(　　).

A. $\tan 3x$　　　B. $\sin 2x$

C. $\ln(1+x)$　　　D. x^2

(8)函数 $f(x)$在点 x_0 处左、右连续是 $f(x)$在点 x_0 处连续的(　　).

A. 充分不必要条件　　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　　D. 非充分非必要条件

(9)下列极限存在的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$　　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x-1}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$　　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)}{x^2}$

(10)若 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-2, & x\leqslant 1 \\ 2x, & 1<x\leqslant 2 \\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>2 \end{cases}$,则有(　　).

A. $f(x)$在点 $x=1$,$x=2$ 处间断

B. $f(x)$在点 $x=1$,$x=2$ 处连续

C. $f(x)$在点 $x=1$ 处间断,在点 $x=2$ 处连续

D. $f(x)$在点 $x=1$ 处连续,在点 $x=2$ 处间断

3. 利用无穷小性质求极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}$;　　　(2)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^n}{(\sin x)^m}$;

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{\sin^2 x}$;　　　(4)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

4. 求下列极限值.

(1)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+9}{x^2-7}$;　　　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{1-4x^2}$;

(3)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$;　　　(4)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}$;

(5)$\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$;　　　(6)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

(7)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$;　　　(8)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(x+1)}{x}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$；

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$；

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(1-4x)^3}$；

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$；

(15) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$；

(16) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-2\sqrt{x}-3}{x-9}$；

(17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}x}{1-x}$；

(18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x-1}$；

(19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$；

(20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(-2x)}{\ln(1+2x)}$.

5. 计算

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}$（$\alpha$ 为常数）；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln(n+1)-\ln n]\}$；

(3) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin kx}=e$，求 k 的值.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{\cos\pi x}, & x<1\\ 0, & x=1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}, & x>1\end{cases}$，问 $f(x)$ 在点 $x=-1$，$x=\dfrac{1}{2}$，$x=1$，$x=2$ 处是否连续？

7. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{\ln x^2}{x-1}, & x>1\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在点 $x=0$，$x=1$ 处的连续性.

8. 证明方程 $x^3-3x=1$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个实根.

数学家的故事

刘　　徽

刘徽是中国数学史上一名非常伟大的数学家，在世界数学史上，也占有杰出的地位. 他的杰作《九章算术注》和《海岛算经》，是我国最宝贵的数学遗产.

《九章算术》约成书于东汉之初，共有 246 个问题的解法. 在许多方面，如解联立方程、分数四则运算、正负数运算、几何图形的体积面积计算等，都位居世界先进之列. 但因解法比较原始，缺乏必要的证明，而刘徽则对此均做了补充证明. 在这些证明中，显示了他在众多方面的创造性贡献. 他是世界上最早提出十进小数概念的人，并用十进小数来表示无理数的立

方根.

在代数方面,他正确地提出了正负数的概念及其加减运算的法则;改进了线性方程组的解法.在几何方面,提出了“割圆术”,即将圆周用内接或外切正多边形穷竭的一种求圆面积和圆周长的方法.他利用割圆术科学地求出了圆周率 $\pi=3.14$ 的结果.

他用割圆术从直径为 2 尺的圆内接正六边形开始割圆,依次得正 12 边形、正 24 边形……,割得越细,正多边形面积和圆面积之差越小,用他的原话说是“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣”.他计算了 3 072 边形面积并验证了这个值.刘徽提出的计算圆周率的科学方法奠定了此后千余年中国圆周率计算在世界上的领先地位.

刘徽在数学上的贡献极多,在开方不尽的问题中提出“求徽数”的思想,该方法与后来求无理根的近似值的方法一致,它不仅是圆周率精确计算的必要条件,而且促进了十进小数的产生,在线性方程组解法中,他创造了比直除法更简便的互乘相消法,与现今解法基本一致;并在中国数学史上第一次提出了“不定方程问题”;他还建立了等差级数前 n 项和公式;提出并定义了许多数学概念:如幂(面积)、方程(线性方程组)、正负数等.刘徽还提出了许多公认正确的判断作为证明的前提.他的大多数推理、证明都合乎逻辑,十分严谨,从而把《九章算术》及他自己提出的解法、公式建立在必然性的基础之上.虽然刘徽没有写出自成体系的著作,但他注《九章算术》所运用的数学知识,实际上已经形成了一个独具特色、包括概念和判断,并以数学证明为其联系纽带的理论体系.

刘徽在割圆术中提出的“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆合体而无所失矣”,这可视为中国古代极限观念的佳作.《海岛算经》一书中,刘徽精心选编了 9 个测量问题,这些题目的创造性、复杂性和代表性,都在当时为西方所瞩目.刘徽思维敏捷,方法灵活,既提倡推理又主张直观.他是我国最早明确主张用逻辑推理的方式来论证数学命题的人.