第十二章　直　　线

一、教学要求

直线是常见的简单几何图形，在实际生活和生产实践中有着广泛的应用，初中数学研究了一次函数的图像和性质，前面学习了三角函数和平面向量. 在此基础上，本章学习直线的有关知识，为学习二次曲线打下基础.

<table>
<tr><th>本章内容</th><th>认知要求</th><th>说　明</th></tr>
<tr><td>第一节　两个基本公式</td><td>掌握两点间距离公式及中点坐标公式</td><td rowspan="4">(1)要加强本章知识与工程问题的联系，使学生体验解析几何的应用
(2)通过本章教学，培养学生数学思维能力和分析与解决问题的能力
(3)本章重点是两个基本公式、直线的方程，难点是根据已知条件，选择直线方程的适当形式求直线方程</td></tr>
<tr><td>第二节　直线的方程</td><td>理解直线的倾斜角、斜率等概念，掌握直线的点斜式方程、斜截式方程、两点式方程和一般式方程</td></tr>
<tr><td>第三节　两直线的位置关系</td><td>理解两条直线平行和垂直的条件，掌握两条相交直线的交点的坐标</td></tr>
<tr><td>第四节　点与直线的距离</td><td>了解点到直线的距离公式</td></tr>
</table>

二、教材说明

本章内容包括两点间的距离公式、线段中点坐标公式、直线的方程表示方法、两直线的位置关系等知识，并以这些知识内容为载体，利用代数的方法研究几何问题. 根据职业教育的特点，教材采用数形结合的方法组织素材，突出基本概念的说明，突出基本数学方法的训练，突出数学知识的应用.

本章教材共分四节：

第一节　两个基本公式

本节利用平面向量介绍了两点间的距离公式和线段中点坐标公式,使学生学会利用这两个基本公式计算相关题目.

第二节　直线的方程

本节在介绍直线的方程之前,首先介绍了倾斜角及斜率的概念,并给出了斜率的计算公式.然后结合一次函数的图像介绍直线与二次方程之间的关系,最后依次介绍点斜式、斜截式、两点式和一般式几种形式的直线方程.

第三节　两直线的位置关系

本节首先介绍了两条相交直线的交点,然后介绍了两条直线平行、垂直的条件,以及判定的方法.

第四节　点与直线的距离

本节介绍了点到直线的距离及两平行线间的距离的计算公式.学生通过对本节内容的学习,提升自身的计算能力.

三、本章的重点、难点

1.本章的重点

(1)两点间的距离公式及点到直线的距离公式.

(2)直线的斜率概念及斜率公式.

(3)直线的点斜式方程、斜截式方程、两点式方程及一般式方程.

(4)两条直线的位置关系.

2.本章的难点

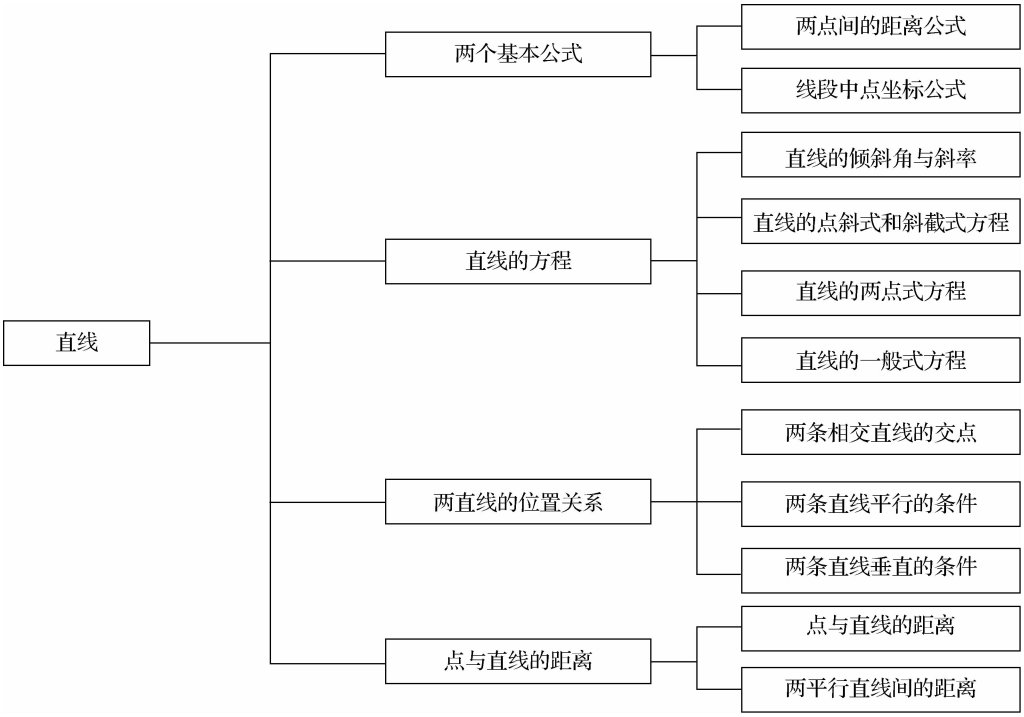
(1)对直线与方程关系的理解.

(2)根据已知条件,选择直线方程的适当形式求直线方程.

(3)对解析法的理解与掌握.

四、教学内容及课时安排建议

1. 本章教学内容的结构框图



2. 本章课时安排建议

本章总共建议安排 12 课时，具体分配建议如下(仅供参考)：

第一节　两个基本公式	约 2 课时
第二节　直线的方程	约 4 课时
第三节　两直线的位置关系	约 3 课时
第四节　点到直线的距离	约 1 课时
练习题与复习题	约 2 课时

五、教学建议

第一节　两个基本公式

1. 本节主要内容是两点间的距离公式及线段中点的坐标公式. 教学的重点是

两点间的距离公式与线段中点的坐标公式的运用;难点是对两点间的距离公式的理解.

2.在进入两点间的距离公式讲解之前,教师可以先举实例来引导学生.

如图12-1所示,某海面上有小岛A和小岛B,轮船以一定的速度v由C向东航行,在C处测得A的方位角为北偏东60°,测得B的方位角为南偏东45°,轮船航行2小时后到达小岛B处,在B处测得小岛A在小岛B的正北方向,求小岛A与小岛B之间的距离.

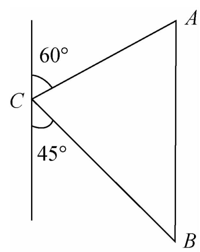


图12-1

这个问题可以通过勾股定理进行推导:

由题意可知,BC之间的距离为$2v$,然后从C向AB做垂线,交AB于D.则

$$BD=CD=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=\sqrt{2}v.$$

在$\triangle ACD$中,$\tan\angle ACD=\tan30^\circ=\frac{AD}{CD}$,

所以$AD=\tan30^\circ CD=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{2}v=\frac{\sqrt{6}}{3}v$,

所以小岛A与小岛B之间的距离.为

$$AB=AD+BD=\sqrt{2}v+\frac{\sqrt{6}}{3}v.$$

3.教材采用了传统的勾股定理来求得两点间的距离公式.而在学生学习了平面向量之后,教师可以根据学生实际情况采用向量的知识来推导两点简单公式,这样既可以对知识起到温故知新的作用,又可以使学生看到向量的应用.

一般地,设点$P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$为直角坐标平面上的任意两点,以P_1为始点、P_2为终点做向量P_1P_2(见图12-2),其坐标为$P_1P_2=(x_2-x_1,y_2-y_1)$,那

么 P_1，P_2 两点间的距离 $|P_1P_2|$ 就是向量 P_1P_2 的模，由向量数量积的性质可知

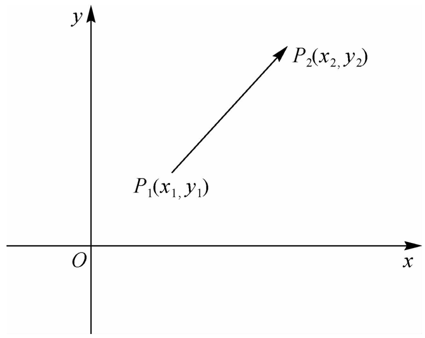


图 12-2

$$
\begin{aligned}
|P_1P_2|^2 &= P_1P_2 \cdot P_1P_2 \\
&= (x_2-x_1, y_2-y_1) \cdot (x_2-x_1, y_2-y_1) \\
&= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2
\end{aligned}
$$

从而得到两点间距离公式 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

4. 例 1 是巩固性练习题，题目中的两个点的坐标既有正数，又有负数. 讲授时要强调两点间的距离公式的特点，特别是坐标为负数的情况. 要让学生清楚，公式是对应坐标之差的平方和的算术平方根.

5. 类似的，还可以得到线段中点的坐标公式 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y=\frac{y_1+y_2}{2}$，需要注意的是横、纵坐标不能混淆相加. 学生在课堂上就能记住这个公式，而且，还能避免学生出现不该出现的错误.

6. 例 2 是中点坐标公式的知识巩固题目. 教学过程中，通过连续使用公式，强化学生对公式的理解与运用；在应用中点坐标公式时，要强调公式的特点，让学生清楚中点坐标是对应坐标之和的一半. 要充分结合图像进行讲解.

7. 例 3 则是应用本节公式的综合性题目. 其先利用中点坐标公式求出中点的坐标，然后再利用两点间的距离公式求出三角形中线的长度. 通常求中点及三角形的中线长度问题都是用几何方法，而本题的研究方法则是通过平面直角坐标系中的坐标计算，即代数的方法. 教学要突出“解析法”，培养学生的数学思维.

第二节　直线的方程

1. 本节的主要内容包括直线的斜率、直线与方程的关系、直线方程的几种形

式.教学的重点是直线的斜率及直线的几种形式的方程;难点是直线与方程的关系,以及根据已知的几何条件求直线的方程;目的是学生通过对本节内容的讲授,培养学生分析与解决问题的能力.

2. 在讲解倾斜角时可以引入滑梯的例子.如图12-3所示,滑梯的斜面与地面所夹的角比较小,滑梯就比较平缓,否则滑梯就比较陡.直线的倾斜角传统意义是指直线向上的方向与 x 轴的正方向所形成的最小正角,倾斜角是用希腊字母 α 来表示的.

图 12-3

3.教材规定,直线平行于 x 轴的时候,倾斜角为零度角,因此倾斜角的取值范围是$[0,\pi)$而非$[0,\pi]$.

4.理解倾斜角后,教材给出了斜率的定义:已知倾斜角后,可以用倾斜角的正切来求得斜率;可以采用“数形结合”的方法,分成两种情况来研究斜率的公式.当倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时,此时直线与 y 轴平行或重合,由于 $\tan 90°$ 不存在,因此这种类型的直线是没有斜率的.当倾斜角 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$,直线上任意两点的横坐标不相同时,得到直线的斜率公式 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$;如果直线上任意两点的横坐标相同,那么 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 这个式子的分母为零,分式便没有意义,斜率 k 就不存在了.因此,要注意应用斜率公式的条件 $x_2\neq x_1$.最后,教师还要强调:任何一条直线都有倾斜角,但不一定

都有斜率.

5.例1是关于斜率概念及公式的巩固性题目，属于简单题，通过例题加强对概念和公式的理解.例1(1)是已知倾斜角求斜率.例1(2)则是已知直线上的两点如何用斜率公式来计算斜率并求出倾斜角.其中，例1(1)可以做一些改编，已知直线斜率，求直线的倾斜角，可以帮助学生尽快熟悉斜率和倾斜角的关系.在计算此类问题时，可以利用计算器，一般要求角度制精确到1°，弧度制精确到0.01.要注意“已知三角函数值求指定范围内的角”的知识的应用.例如，计算器显示出所求的角度为$-45°$时，由于直线的倾斜角的取值范围是$[0,\pi)$，所以倾斜角为：$-45°+180°=135°$.

6.一次函数$y=kx+b$是学生在初中阶段学习过的内容，教师应从其图像入手，分析图像上的坐标与函数解析式的关系，把函数的解析式看作方程，把其图像看作具有某种特征的平面点集(轨迹).理解此概念的关键是很自然地建立直线和方程的关系，把函数的解析式看作方程.

7.在导出直线的点斜式方程时，教材从直线与方程的关系中的两个方面进行了讲解.首先是直线上的任意一点的坐标都是方程的解，然后是以方程的解为坐标的点一定在这条直线上.因此，教师首先应将直线上的两个具体的点分别抽象为$P_0(x_0,y_0)$和$P(x,y)$.其中，$P_0(x_0,y_0)$为已知点，$P(x,y)$为直线上任意一点.然后通过两点的直线斜率公式，整理出方程$y-y_0=k(x-x_0)$.接着分析坐标满足方程的点一定在这条直线上，且直线上任一点的坐标都满足方程，可知方程就是直线的方程.这样一个推导过程展示了求曲线方程的一个基本思路，为学生后面的学习打下了基础.

8.例2和例3是点斜式方程的巩固性题目.其中，例2是直接利用点斜式方程的公式，例3则需要首先求出斜率，再利用公式求解.例3中在求出斜率$k=\frac{5}{2}$后，选点$P_1(1,2)$一起代入点斜式方程得：

$$y-2=\frac{5}{2}(x-1).$$

如果选用$P_2(-1,-3)$，得到的点斜式方程就是：

$$y+3=\frac{5}{2}(x+1).$$

由此可见,点斜式方程的形式不是唯一的,选取直线上不同的点,方程的形式就会不同.

9. 直线的斜截式方程是直线的点斜式方程的特例.直线的斜截式方程与一次函数的解析式具有相同的形式.但与点斜式方程不同的是,斜截式方程形式是唯一的.在直线的斜截式方程中,要强调 b 的意义.

10. 在介绍截距的概念时,明确了直线与 x 轴交点的坐标叫横截距,与 y 轴交点的坐标叫纵截距,但要注意强调 y 轴上点坐标的特点,使学生一看到直线经过点 $(0,b)$,就知道 b 是直线的纵截距.另外,教师还要提示学生:直线在 x 轴、y 轴上的截距可能是正数、负数或0.

11. 例4是求直线的斜截式方程的巩固性题目,通过练习,可使学生熟悉公式,理解公式的意义.

12. 教材在点斜式方程的基础上给出了另一种方程的形式破折号两点式方程.通过数形结合的方法,指出了直线经过两点时的方程公式为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\ (x_1\neq x_2,y_1\neq y_2).$$

其适用条件为:斜率存在且不为0.

13. 例5是求直线的两点式方程的巩固性题目,通过练习,可使学生熟悉公式,理解公式的意义.

14. 直线方程的一般式反映了直线方程各种形式之间的统一性,教学中应充分揭示直线方程本质属性,建立二元一次方程与直线的对应关系,为继续学习“曲线方程”打下基础.直线的一般式方程形式为 $Ax+By+C=0$,学生开始对于理解系数和常数 A,B,C 是有困难的,尤其是对缺项的方程.比如:$By+C=0$ 和 $Ax+C=0$,教师在教学时应加强这方面的练习.

15. 直线的一般式方程的形式是唯一的,在教学中应要求学生将直线的一般式方程形式作为结果,而对于给出直线的一般式方程求斜率或纵截距的问题,则要使学生明确:如果一般式方程 $Ax+By+C=0$ 化为斜截式方程 $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ $(B\neq 0)$,这时斜率就为 $-\frac{A}{B}$,纵截距为 $-\frac{C}{B}$.

16. 例 6 和例 7 是直线方程形式转化的题目，是比较简单的题目，提醒学生注意题目中采用的求截距的方法.

17. 总结直线方程的几种形式，可根据各自的特点进行选择：

直线方程形式	直线方程	局 限 性	选择条件
点斜式	$y-y_0=k(x-x_0)$	不能表示与 x 轴垂直的直线	已知一个顶点和斜率
斜截式	$y=kx+b$	不能表示与 x 轴垂直的直线	已知在 y 轴上的截距和斜率
两点式	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$	不能表示与 x 轴、y 轴垂直的直线	已知两个定点；已知两个截距
一般式	$Ax+By+C=0$	能表示所有的直线	求直线方程的最后结果均可以化为一般是方程

第三节　两直线的位置关系

1. 本节的主要内容是两条相交直线的交点、两条直线平行和垂直的条件. 教学的重点是两条直线的位置关系、两条直线的交点坐标；难点是两条直线的位置关系的判断及应用. 突破难点的关键是掌握直线方程的各种形式的特征，即正确地进行直线方程各种形式间的转化.

2. 教材归纳了两条直线的交点坐标就是两直线方程联立组成的二元一次方程组的解. 二元一次方程组的解法是初中阶段学习过的内容，教材通过求二元一次方程组的解来确定两条直线的交点. 例 1 是求两条已知直线交点坐标的题目，属于基础性题. 两条直线的方程所组成的方程组只有一组解，求解出来就是交点坐标. 另外，如果方程组求解出无穷多组解，那么这两条直线重合；如果没有解，则两条直线平行. 对于后面的方程组无解或有无穷多组解的情况，教师可以根据学习的基础而定，教材中并未进行拓展.

3. 教材从初中平面几何中两条直线平行的知识出发，通过“数”“形”结合的方式讲解两条直线平行的判定方法，介绍两条直线平行的条件，学生容易接受. 其逻辑关系为：

两条直线平行$\Leftrightarrow$同位角相等$\Leftrightarrow$倾斜角相等.

即如果两条直线 $l_1:y_1=k_1x+b$ 和 $l_2:y_2=k_2x+b$ 是平行的，那么 $k_1=k_2$，这些几何问题可通过代数方法得到解决.

4. 在教学过程中，可以安排学生对教材中的结论进行讨论并举例说明：

(1)当两条直线的斜率都不存在时，这两条直线平行(或重合).

(2)当两条直线的斜率都存在但不相等时，这两条直线相交.

(3)当一条直线的斜率存在而另一条直线的斜率不存在时，这两条直线相交；

(4)如果两条直线中一条直线的斜率不存在，而另一条直线的斜率为 0，那么这两条直线垂直.(注：此种情况在讲完两直线垂直后在进行讲解，此处作为一种情况进行了解即可.)

5. 教材总结了两条直线是否平行的一般步骤：

(1)两条直线的斜率都不存在，则两条直线平行(或重合)；若只有一个不存在，则两条直线相交.

(2)两条直线的斜率都存在，将它们都化为斜截式方程，若斜率不相等，则相交.

(3)斜率相等的两条直线在 y 轴上的截距相等，则两条直线重合；截距不相等，则两条直线平行.

6. 例 2 是判断两条直线是否平行的巩固性题目. 首先将直线方程化为斜截式方程，再利用斜率与截距进行位置关系的判断. 考虑到学生的基础职业教育的特点，教材并没有介绍利用直线的一般式方程来判断两条直线的位置关系.

7. 例 3 是求过已知点且与已知直线平行的另一条直线的方程，属于基础性题目. 首先利用平行条件求出未知直线的斜率，然后根据已知条件写出直线的点斜式或斜截式方程，最后将方程化为一般式方程. 使学生理解并学会解决这类问题.

8. 教材采用“数形结合”“看图说话”的方法，导入两条直线垂直的条件：

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1 \text{ 或 } l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1=-\frac{1}{k_2}.$$

两条直线垂直的实质就是这两条直线的夹角为 $\frac{\pi}{2}$. 在运用垂直条件时，要注意斜率不存在的情况.

9. 例 4 是判断两条直线是否垂直的巩固性题目. 首先将直线方程化为斜截式

方程，再利用斜率进行位置关系的判断．考虑到学生的基础及职业教育的特点．教材并没有介绍利用直线的一般式方程来判断两条直线的位置关系．

10．例 5 是求过已知点且与已知直线垂直的另一条直线的方程，属于基础性题目，首先利用垂直条件求出未知直线的斜率，然后再根据已知条件写出直线的点斜式或斜截式方程，最后将方程化为一般式方程．

第四节　点与直线的距离

1．本节主要内容包括点与直线的距离、两平行直线间的距离．教学的重点是点与直线间的距离公式和两平行直线间的距离公式；难点是直线间的距离公式；目的是通过对本节内容的讲授，使学生掌握求解具体问题的方法．

2．教材中直接给出了点到直线的距离公式，需要注意的是，该公式中的直线必须是一般式方程，教材中省略了公式的证明，教师可以根据自己的课时安排和学生的接受能力选择是否给出证明．下面是公式的证明方法：

如图 12-4 所示，已知点 $P(x_0, y_0)$，直线 $l: Ax+By+C=0(A\neq0, B\neq0)$，求点 P 到直线 l 的距离 d．

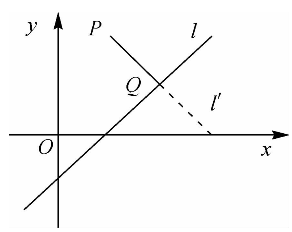


图 12-4

(1)定义法．

设点 p 到直线 l 的垂线为 l'，垂足为 Q，由 $l'\perp l$ 可知 l' 的斜率为 $\dfrac{B}{A}$．

所以，l' 的方程为 $y-y_0=\dfrac{B}{A}(x-x_0)$．

与 l 联立方程组解得焦点 Q 为 $\left(\dfrac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}, \dfrac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}\right)$，

所以

$$|PQ|^2=\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}-x_0\right)^2+\left(\frac{A^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}-y_0\right)^2$$

$$=\left(\frac{-A^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}\right)^2+\left(\frac{-B^2y_0-ABx_0-BC}{A^2+B^2}\right)^2$$

$$=\frac{A^2(Ax_0+By_0+C)^2}{(A^2+B^2)^2}+\frac{B^2(Ax_0+By_0+C)^2}{(A^2+B^2)^2}$$

$$=\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}.$$

即 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

(2)三角形法.

如图12-5所示,过 P 作 x 轴的平行线,交 l 于 $M(x_1,y_0)$,作 y 轴的平行线,交 l 于 $N(x_0,y_2)$. M、N 点都在直线 l 上.

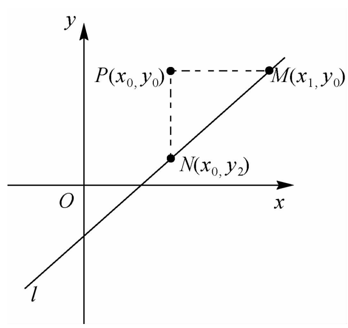


图 12-5

则 $Ax_1+By_0+C=0$,$Ax_0+By_2+C=0$,解得

$$x_1=-\frac{By_0+C}{A},y_2=-\frac{Ax_0+C}{B}.$$

所以
$$|PM|=|x_0-x_1|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{A}\right|,$$

$$|PN|=|y_0-y_2|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{B}\right|,$$

$$|MN|=\sqrt{PM^2+PN^2}=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{|AB|}\cdot|Ax_0+By_0+C|.$$

由三角形的面积公式可知:

$$\frac{1}{2}d\cdot|MN|=\frac{1}{2}|PM|\cdot|PN|,$$

所以

$$d=\frac{|PM|\cdot|PN|}{|MN|}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

(3)向量法.

由直线的一般式方程可得其斜率为 $k=-\frac{A}{B}$,其方向向量为$\left(1,-\frac{A}{B}\right)$,从而其法向量为 $\vec{a}=\left(\frac{A}{B},1\right)$,又设点 $Q(x,y)$为直线 l 上的任一点,于是有

$$Ax+By=-C.$$

由平面向量的有关知识可得:

$$d=\left|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}\right|=\left|\frac{\frac{A}{B}(x-x_0)+(y-y_0)}{\sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)^2+1}}\right|$$

$$=\frac{|-Ax_0-By_0+(Ax+By)|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

3. 教材通过例题给出了两平行直线间的距离的计算方法. 平行直线 l_1:$Ax+By+C_1=0$ 和 l_2:$Ax+By+C_2=0$ 的距离公式为

$$d=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

4. 观察例 2 可知,求两平行线间的距离可归结为点与直线间的距离. 即在两平行线中的任一条上任取一点,则该点到另一条直线的距离就是这两条平行直线间的距离.

六、典型例题

例 1　下列关于直线的说法,正确的是(　　).

A. 一条直线 l 一定是某个一次函数的图像

B. 一次函数 $y=kx+b$ 的图像可以是一条过原点的直线

C. 如果一条直线上所有点的坐标都是某一个方程的解,那么这个方程就叫作这条直线的方程

D. 如果以一个二元一次方程的解为坐标的点都在某一条直线上,那么这条直线叫作这个方程的直线

解 A项不正确. 直线 $x-2=0$,不是一次函数.

C项不正确. 第一、三象限角的平分线上所有的点都是方程 $(x+y)(x-y)=0$ 的解,但此方程不是第一、三象限角平分线的方程.

D项不正确. 以方程 $y=x(x\geqslant 0)$ 的解为坐标的点都在第一象限的角平分线上,但此直线不是方程 $y=x(x\geqslant 0)$ 的图像.

B项正确. 当 $b=0$ 时, 一次函数 $y=kx$ 的图像就经过原点.

例2 设直线的斜率为 k,且 $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$,指出直线倾斜角 α 的范围.

解 倾斜角与斜率有关,根据公式 $k=\tan\alpha$ 和正切函数的单调性,由斜率的范围可以得到倾斜角的范围. 需要注意的是,倾斜角 α 在 $[0,\pi)$ 内.

由已知 $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$ 及公式 $k=\tan\alpha$ 可得

$$-\sqrt{3}<\tan\alpha<\sqrt{3}.$$

$\because \alpha\in[0,\pi)$,

$\therefore \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$.

所以,直线的倾斜角的范围是 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$.

例3 设直线 $ax+by+c=0$ 的倾斜角为 α,且 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$,则 a,b 满足(　　).

A. $a+b=1$　　　　B. $a-b=1$

C. $a+b=0$　　　　D. $a-b=0$

解 $\because \sin\alpha+\cos\alpha=0$, $\therefore \tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-1$.

又 $\because k=\tan\alpha=-\dfrac{b}{a}=-1$,所以 $a-b=0$,选D.

例4 求下列直线 l 的方程:

(1)已知直线过 $A(2,4)$、$B(m,1)$ 两点.

(2)过点 $M(2,3)$，倾斜角为直线 $y=-2x$ 的倾斜角的 2 倍.

解　(1)当 $m=2$ 时，直线 l 的方程为 $x=2$.

当 $m\neq 2$ 时，$k=\dfrac{-3}{m-2}$，直线 l 的方程为 $y-4=\dfrac{-3}{m-2}(x-2)$，即 $3x+(m-2)y-4m+2=0$.

所以，直线 l 的方程为 $x-2=0$ 或 $3x+(m-2)y-4m+2=0$.

(2)直线 $y=-2x$ 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha=-2$，

因此，$k=\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{3}$，直线 l 的方程为 $y-3=\dfrac{4}{3}(x-2)$.

即 $4x-3y+1=0$.

例 5　过点 $P(1,0)$ 作直线 l，与直线 $2x-y-3=0$ 相交于点 A，又与直线 $x+y+1=0$ 相交于 B，如果 P 点是线段 AB 的中点，求直线 l 的方程.

解　由题意可知，直线 l 的斜率是存在的，因此可设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$.

由 $\begin{cases}2x-y-3=0,\\ y=k(x-1),\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=\dfrac{k-3}{k-2},\\ y=\dfrac{-k}{k-2},\end{cases}$ 所以点 A 坐标为 $\left(\dfrac{k-3}{k-2},\dfrac{-k}{k-2}\right)$.

由 $\begin{cases}x+y+1=0,\\ y=k(x-1),\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=\dfrac{k-1}{k+1},\\ y=\dfrac{-2k}{k+1},\end{cases}$ 所以点 A 坐标为 $\left(\dfrac{k-1}{k+1},\dfrac{-2k}{k+1}\right)$.

又因 P 点是线段 AB 的中点，所以 $\dfrac{-2k}{k+1}+\dfrac{-k}{k-2}=0$，解得 $k=1$.

当 $k=1$ 时，$\dfrac{k-1}{k+1}+\dfrac{k-3}{k-2}=2$，符合题意.

所以，直线 l 的方程为 $y=x-1$，即 $x-y-1=0$.

例 6　求经过两条直线 $2x+3y+1=0$ 和 $x-3y+4=0$ 的交点，并且垂直于 $3x+4y-7=0$ 的直线的方程.

解　设交点坐标为 (x_1,y_1)，则

$\begin{cases}2x_1+3y_1+1=0,\\x_1-3y_1+4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=-\dfrac{5}{3},\\y_1=\dfrac{7}{9},\end{cases}$

由已知垂直关系可求得所求直线的斜率为$\dfrac{4}{3}$,所求直线方程为 $y-\dfrac{7}{9}=\dfrac{4}{3}\left(x+\dfrac{5}{3}\right)$,即 $4x-3y+9=0$.

例 7 已知直线 l 的斜率为$\dfrac{1}{2}$,且与两坐标轴围成的三角形的面积为 12,求直线 l 的方程.

解 设直线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+b$,令 $x=0$,得 $y=b$,,令 $y=0$,得 $x=-2b$,

由题意得

$$\frac{1}{2}|b|\cdot|-2b|=12,$$

解得 $b=\pm2\sqrt{3}$.

故所求直线的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x\pm2\sqrt{3}$,

即 $x-2y+4\sqrt{3}=0$ 或 $x-2y-4\sqrt{3}=0$.

例 8 已知点 $P_1(2,3)$,$P_2(-4,5)$和 $A(-1,2)$,求过点 A 且与点 P_1,P_2 距离相等的直线方程.

解 设所求直线方程为 $y-2=k(x+1)$,即 $kx-y+(k+2)=0$,由点 P_1,P_2 到直线的距离相等得

$$\frac{|2k-3+k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|-4k-5+k+2|}{\sqrt{k^2+1}},$$

化简得

$$|3k-1|=|3k+3|,$$

解得 $k=-\dfrac{1}{3}$或方程无解.

当 $k=-\dfrac{1}{3}$时,直线方程为 $y-2=-\dfrac{1}{3}(x+1)$,即 $x+3y-5=0$.

当方程无解时表明 k 不存在,但过点 A,故直线方程为 $x=-1$.

所以,所求直线为 $x+3y-5=0$ 或 $x+1=0$.

例 9　过点 $P(2,1)$ 作直线 l 与 x 轴、y 轴正半轴交于 A、B 两点,求$\triangle AOB$ 面积的最小值及此时直线 l 的方程.

解法一　由题意可知,直线 l 的斜率是存在的,因此设直线 l 的方程为$y-1=k(x-2)$.

令 $y=0$,得 $x=\frac{2k-1}{k}$.

令 $x=0$,得 $y=1-2k$.

因为直线 l 与 x 轴、y 轴交于正半轴上,

所以$\frac{2k-1}{k}>0$,且 $1-2k>0$.

所以 $k<0$.

因此,$\triangle AOB$ 面积为

$$S=\frac{1}{2}\frac{2k-1}{k}(1-2k)=\frac{1}{2}\left(-4k-\frac{1}{k}+4\right)\geqslant\frac{1}{2}\left[2\sqrt{(-4k)\left(-\frac{1}{k}\right)}+4\right]=4.$$

当且仅当$-4k=-\frac{1}{k}$时成立,解得 $k=\pm\frac{1}{2}$.

由于 $k<0$,所以 $k=-\frac{1}{2}$.

所以,$\triangle AOB$ 面积的最小值为 4,此时的直线方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$,即 $x+2y-4=0$.

解法二　设 A、B 两点坐标分别为$(a,0)$、$(0,b)(a>0,b>0)$,则直线方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. 此时$\triangle AOB$ 面积为 $S=\frac{1}{2}ab$.

因为点 $P(2,1)$在直线上,故$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$.

由均值不等式 $1=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{2}{ab}}$得 $ab\geqslant8$.

当且仅当$\frac{2}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$,即 $a=4$,$b=2$ 时取等号.

因此,$S=\frac{1}{2}ab=4$ 为最小值,直线方程为$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$.

七、课后习题答案

练习题 12-1

1.(1)$|AB|=8$,$(-1,1)$;(2) $|AB|=2\sqrt{5}$,$(-1,0)$.

2.$(6,1)$.

3.$|CD|=5\sqrt{2}$.

4.$m=n=5$.

练习题 12-2

1.(1)B;(2)A;(3)A;(4)B.

2.$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}+3$.

3.$y=\frac{1}{5}x+3$.

4.$y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

5.(1) 在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 $2,-\frac{1}{2}$;(2) 在 x 轴和 y 轴上的截距分别为$-1,-\frac{3}{7}$.

练习题 12-3

1.(1)重合;(2)垂直,$\left(-\frac{1}{17},-\frac{13}{17}\right)$;(3)相交不垂直,$\left(-\frac{21}{2},5\right)$;(4)相交不垂直,$\left(\frac{76}{45},\frac{86}{45}\right)$.

2.$y=\frac{2}{3}x-1$.

3.$y=-\frac{5}{3}x-7$.

4.$y=-3x+4$.

5. $y=\frac{5}{4}x-\frac{7}{4}$.

6. $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.

练习题 12-4

1. 5，3.

2. (1)$d=\frac{9}{5}$；(2)$d=0$；(3)$d=0$；(4)$d=2\sqrt{13}$；(5)$d=\frac{2}{5}$.

3. 3.

4. (1)$d=2\sqrt{13}$；(2)$d=2$.

5. $x+3y+7=0$；$3x-y-3=0$；$3x-y+9=0$.

复习题 12

A　组

1. (1)$\frac{\pi}{2}$；(2)$y=\frac{1}{2}x+2$；(3)-2；(4)$y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}-3$；(5)$(-2,3)$，$\sqrt{10}$；(6) 8 或-18.

2. (1)D；(2)B；(3)C；(4)B；(5)C；(6)A；(7)C；(8)C.

3. $y=-\frac{2}{5}x+4$.

4. (1)-1；(2)$y=4x-18$.

5. (1)$(x-1)^2+(y+1)^2=2$ 或 $(x+1)^2+(y-1)^2=2$.

(2)$x^2+y^2+2x-4y=0$.

6. 相交.

B　组

1. $(x-1)^2+(y+2)^2=2$ 或 $(x-9)^2+(y+18)^2=338$.

2. 四点在同一圆上.

八、阅读资料

[阅读材料]

最速降线

在一个斜面上,摆两条轨道,一条是直线,一条是曲线,起点高度以及终点高度都相同.两个质量、大小一样的小球同时从起点向下滑落,曲线的小球反而先到终点.这是由于曲线轨道上的小球先达到了最高速度,所以先到达.然而,两点之间的直线只有一条,曲线却有无数条.那么,哪一条才是最快的呢?伽利略于1630年提出了这个问题,当时他认为这条线应该是一条弧线,可是后来人们发现这个答案是错误的.1696年,瑞士数学家约翰·伯努利解决了这个问题,他还拿这个问题向其他数学家公开挑战.牛顿、莱布尼茨、洛比达,以及雅克布·伯努利等解决了这个问题.这条最速降线就是一条摆线,也叫旋轮线.

意大利科学家伽利略在1630年提出一个分析学的基本问题——“一个质点在重力作用下,从一个给定点到不在它垂直下方的另一点,如果不计摩擦力,问沿着什么曲线滑下所需时间最短.”他说这曲线是圆,可这是一个错误的答案.

瑞士数学家约翰·伯努利在1696年再次提出这个最速降线的问题(problem of brachistochrone),征求解答.次年已有多位数学家得到了正确答案,其中包括牛顿、莱布尼茨 、洛比达和伯努利家族的成员.这个问题的正确答案是连结两个点上凹的唯一一段旋轮线.

旋轮线与1673年荷兰科学家惠更斯讨论的摆线相同.因为钟表摆锤做一次完全摆动所用的时间相等,所以摆线(旋轮线)又称为等时曲线.

看约翰·伯努利对最速降线的解答:

如果使分成的层数n无限地增加,即每层的厚度无限地变薄,则质点的运动边趋于空间A,B两点间质点运动的真实情况,此时折线也就无限增多,其形状就趋近我们所要求的曲线——最速降线.而折线的每一段趋向于曲线的切线,因而得出最速降线的一个重要性质:任意一点的切线和铅垂线所成的角度的正弦与该点落下的高度的平方根的比是常数.而具有这种性质的曲线就是摆线.所谓摆线,是一个圆沿着一条直线滚动(无滑动)时,圆周上任意一点的轨迹.

因此，最速降线就是摆线，只不过在最速降线问题中，这条摆线是上、下颠倒过来的罢了.

以上便是约翰·伯努利当时所给出的最速降线问题的解答. 当然，这个解答在理论上并不算十分严谨. 但是，这个解答所蕴含的基本观点的发展导致了一门新的学科——变分学的出现. 最速降线问题的最终而完备的解答需要用到变分学的知识.

[趣味阅读]

解析几何创始人——笛卡儿

解析几何，又叫坐标几何，它是用代数方法来研究几何图形和变换性质的一门科学，是17世纪初期产生的一门数学分科，它包括平面解析几何和空间解析几何两部分. 通过在几何空间中建立坐标系，就可将空间中的点用坐标表出，从而图形的几何性质可以表为图形上的点的坐标之间的关系，特别是代数关系.

我们知道，几何学源远流长，远在5 000多年前，埃及、巴比伦、中国、印度等文明古国的人民，在从事农牧业的生产中，通过测量土地，疏通河道，制造工具和日常生活用品等，积累了大量的有关几何图形的知识，掌握了计算面积、容积，测量距离的方法等.

据《史记》记载，我国古代夏禹在治水时就用到“准绳”和“规矩”. 在公元前1世纪左右编著的《周髀算经》中载有“径一而周三”，意思是说圆周率$\pi=3$；还载有“故折矩，以为句广三，股修四，径隅五”，意思是说“如果将一根直尺折成一个直角，较短的一边(称为勾)长为3，较长的一边(称为股)长为4，那么厚有尺两端的距离(称为径)一定为5”，因此至今还有人有“勾三股四径五”来代表勾股定理，尽管中国数学起源早，但中国长期处于封建统治之下，生产力发展缓慢，科学研究得不到重视，对几何的研究也就停滞不前了.

公元前7世纪，几何学从埃及传到希腊，许多希腊学者做出了卓越的贡献，他们注意阐明几何事实之间的相互关系，并逐步演变为几何原理之间的逻辑推理. 欧几里德(前3世纪)系统地总结了前人的研究成果，写成《几何原本》一书，将几何上升为系统的数学理论，创立了古典公理法(又称综合法)，尽管后来阿基米德(前287～212)、阿波罗尼斯(前260—200)等人在面积、体积和圆锥曲线等方面做

了深入的研究,但以后2 000多年来的几何教科书与几何原本并没有什么本质上的差异,这与欧洲整个中古时期陷入了动乱和宗教迷信的黑暗年代不无关系.

15、16世纪,欧洲由封建社会向资本主义社会过渡,进入文艺复兴时期.特别是从17世纪起,资本主义生产开始发展起来,天文、航海、机械、造船,以及军事工业等都有了飞速发展.生产实践向自然科学提出了许多新的研究课题,迫切需要力学、天文学等基础科学来解决,也就相应地要求数学提出新的概念与方法,于是产生解析几何的条件便成熟了.

必须指出:解析几何的产生是与法国哲学家、数学家笛卡儿(Descartes,1596—1650)与数学家费尔马(P. de Fermat,1601—1665)的名字联系在一起的.1637年他发表了著名的哲学著作《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》,其中有一个著名的附录——《几何学》,它概括了他的关于坐标几何和代数的思想,主张将代数和几何中一切好的东西互相取长补短.他在分析传统、静止的数学时指出:以前认为直线是静止的,如今应将它看作由一个变动着的点产生出来的,这就是轨迹的观念.过去对圆锥曲线的研究只重视了几何学方面,而忽视了代数学方面;东方高度发展的代数学,又有忽视几何学的倾向.他努力寻求把两者结合起来的途径,终于建立了平面坐标系,找到了点与数对之间的对应关系,把曲线用含有两个未知数的方程表示出来,将几何问题通过坐标系变成了代数问题,用代数方法加以解决,再用几何语言叙述出来.他用这种思想研究了二次方程,使二次方程和圆锥曲线建立了对应关系.为此,马克思和恩格斯都曾高度地评价了笛卡儿的贡献,马克思说:“由于笛卡儿把代数应用于几何,也就是解析几何与高等几何,函数概念获得了新的发展和重要意义.”

《几何学》作为笛卡儿哲学著作《方法论》的附录,意味着他的几何发现乃至其他方面的发现都是在其方法论原理指导下获得的,笛卡儿方法论原理的本旨是寻求发现真理的一般方法,他在另一部较早的哲学著作《指导思维的法则》中称自己设想的一般方法为“通用数学”(mathesis univer salis)并概述了这种数学的思想,在这部著作里,笛卡儿提出了一种大胆的计划:

任何问题→数学问题→代数问题→方程求解.

为了实施这一计划,笛卡儿首先通过“广延”(extension)(他对有形物广延的

一种推广)的比较,将一切度量问题化为代数方程问题,为此需要确定比较的基础,即定义“广延”单位,以及建立“广延”符号系统及其算术运算,特别是要给出算术运算与几何图形的对应,这就是笛卡儿几何学的方法论背景.

由于笛卡儿在研究几何学方法上做了与传统的方法大相径庭的创新,从而产生了解析几何学,这样不仅为研究空间形式开辟了新的途径,而且把整个几何学的研究从原来“定性的层面”,推进到能进行计算的“定量的层面”. 17 世纪出现的解析几何与微积分,使数学面貌为之改观,数学从此由常量数学时期进入变量数学的新时期.