第五章　三角计算及其应用

一、教学要求

三角计算是数学的重要内容之一，它源于测量，是测量学的理论基础. 三角计算是相关专业课程学习的基础(如交流电、简谐振动等). 同时，它也是研究自然界周期现象的重要数学工具. 通过学习本章的内容，可以体会到解决实际问题中的作用.

<table>
<tr><th>本章内容</th><th>认知要求</th><th>说　明</th></tr>
<tr><td>第一节　两角和与差的正弦、余弦和正切公式</td><td>理解两角和与差的正弦公式、余弦公式和正切公式</td><td rowspan="6">(1)通过周期现象推广角的概念，任意角的正弦函数、余弦函数和正切函数的讲授要与锐角三角函数相衔接
(2)通过本单元的教学，培养学生的观察能力、计算技能和计算工具使用技能
(3)重点是三角函数的概念、同角三角函数的基本关系式、正弦函数的图像及性质</td></tr>
<tr><td>第二节　二倍角的正弦、余弦和正切公式</td><td>了解二倍角的正弦、余弦和正切公式</td></tr>
<tr><td>第三节　三角函数的积化和差与和差化积</td><td>了解三角函数的积化和差与和差化积</td></tr>
<tr><td>第四节　正弦型曲线</td><td>理解正弦函数的性质，会利用“五点法”作出正弦型函数的图像，了解正弦型函数与正弦函数的图像之间的关系</td></tr>
<tr><td>第五节　解斜三角形</td><td>理解正弦定理和余弦定理，会解三角形问题</td></tr>
<tr><td>第六节　三角计算应用举例</td><td>会利用三角计算，解决一些生活与生产中的实际应用问题</td></tr>
</table>

二、教材说明

本章内容在三角函数的基础上，主要介绍了两角和与差的余弦公式与正弦公式、二倍角公式、三角函数的积化和差与和差化积公式、正弦型函数、正弦定理与余弦定理及其实际应用举例，尽量密切集合生产实际案例，为专业课程的学习奠

定数学基础.

本章教材共分 6 节：

第一节　两角和与差的余弦、正弦和正切公式

本节通过向量及其坐标的关系，借助单位圆介绍两角和与差的余弦公式；利用公式将互余角的三角函数公式由锐角推广到任意角，并利用这组公式推导两角和与差的正弦公式和正切公式.

第二节　二倍角的正弦、余弦和正切公式

在第一节内容的基础上，令 $\alpha=\beta$，推导出二倍角的正弦公式、余弦公式与正切公式.

第三节　三角函数的积化和差与和差化积

本节内容介绍了三角函数的积化和差与和差化积公式，通过这两组三角公式，可以实现三角函数形式的转换.

第四节　正弦型曲线

本节通过正弦函数引出正弦型函数的概念，利用变量替换的方法，讨论正弦型函数的周期性及其最值，然后介绍正弦型函数的“五点法”作图，最后介绍正弦型函数在电工学中的应用.

第五节　解斜三角形

本节利用直角三角形的边角关系得到$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，再在锐角三角形和钝角三角形中加以验证得到正弦定理，继而利用同样的方法得到余弦定理，最后介绍了正弦定理与余弦定理在实际问题中的应用实例.

第六节　三角计算应用举例

本节介绍三角计算在生产、生活的应用实例，为专业课程的学习与岗位实训奠定了数学基础.

三、本章的重点、难点

1. 本章教学重点

(1)运用三角函数公式，进行简单三角函数式的化简及求值.

(2)利用正弦型函数的性质，求三角函数的周期和最值.

(3)利用“五点法”作出正弦型函数的图像,已知正弦型函数的图像写出函数的解析式.

(4)三角计算在生产、生活中的应用.

2. 本章教学难点

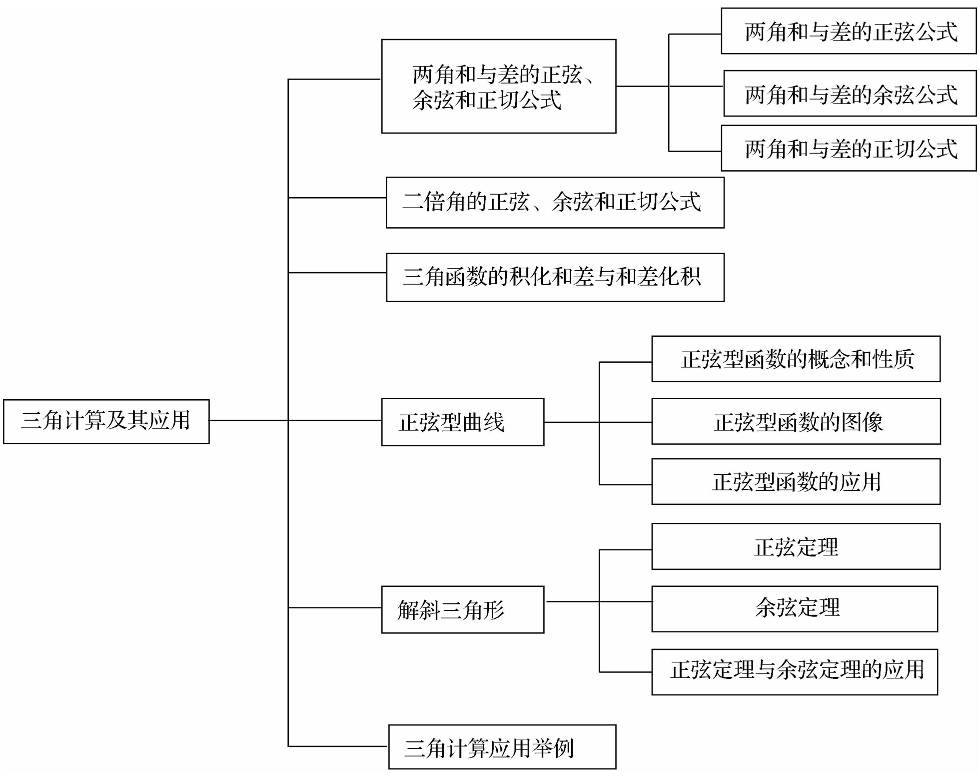
(1)两角差的余弦公式的推导.

(2)运用三角函数公式,解决简单三角函数式的化简及求值问题.

(3)已知正弦型函数的图像写出函数的解析式.

四、教学内容及课时安排建议

1. 本章教学内容的结构框图



2. 本章课时安排建议

本章总共建议安排24课时,具体分配建议如下(仅供参考):

第一节	两角和与差的正弦、余弦和正切公式	约6课时
第二节	二倍角的正弦、余弦和正切公式	约2课时
第三节	三角函数的积化和差与和差化积	约2课时

第四节　正弦型曲线	约 5 课时
第五节　解斜三角形	约 4 课时
第六节　三角计算应用举例	约 2 课时
练习题与复习题	约 3 课时

五、教学建议

第一节　两角和与差的余弦、正弦与正切公式

1. 本节课的教学要求是理解两角和与差的余弦、正弦与正切公式，能正确运用各个公式进行简单的三角函数式的计算和化简；目的是通过对公式的讲授，培养学生逆向思维能力和灵活选用公式解决问题的能力.

2. 本节课的教学重点是两角和与差的余弦公式、正弦公式与正切公式，难点是公式的推导和运用. 而讲清公式的特点与用途，剖析公式的内在联系是突破难点的关键.

3. 在介绍新知识之前，首先利用特殊角的三角函数值，让学生认识到 $\cos(60°+30°)\neq\cos60°+\cos30°$，进而提出如何计算 $\cos(\alpha+\beta)$ 的问题. 这个导入过程是非常重要的，所指出的错误正是学生学习中最容易发生的，在教学中不可忽视.

4. 教材利用向量推导 $\cos(\alpha+\beta)$ 的公式，使得公式推导过程简捷. 而正确理解向量数量积的两种表示方法是理解公式推导过程的关键. 建议教师授课前，让学生复习向量的有关知识，这个公式是推导后各公式的基础，教学的重点放在对公式形式特点的认识和对公式正向与反向的应用上.

5. 例 1～例 5 都是两角和与差的余弦公式的应用，教学中要强调公式的特点，为推导 $\sin(\alpha\pm\beta)$ 做准备. 其中例 1～例 4 为正向应用公式，例 5 为反向应用公式，通过具体例题的分析，使得学生明白正向和反向应用公式的原因，注重方法和思想的教学.

6. $\sin(\alpha+\beta)$ 的公式的推导过程是：首先反向应用公式 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$，然后利用 $\cos(\alpha-\beta)$ 的公式，最后整理得到 $\sin(\alpha+\beta)$ 的公式. 教学关键是引导学生将 $(\alpha+\beta)$ 看作整体，这样才能应用 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 的公式，反向使用公式，培养学生的逆向思维是数学课程教学的一项重要任务，要在不同的例题和不同知识层面的教

学上引起足够的重视.

7.例6～例9是两角和与差的正弦公式的巩固性题目.其中例6～例8为正向应用公式,例9为反向应用公式.教师通过对具体例题的分析,使学生明白正向和反向应用公式的原因,要注重方法和思想的教学.

8.得到两角和与差的余弦公式与正弦公式后,可以得到 $\tan(\alpha\pm\beta)$ 的公式.例10～例12为两角和与差的正切公式的巩固性题目.通过具体例题的分析,使得学生明白正向和反向应用公式的原因,注重方法和思想的教学.

第二节　二倍角的正弦、余弦和正切公式

1.本节课的教学要求是了解二倍角的余弦、正弦与正切公式,能正确运用各个公式进行简单的三角函数式的计算和化简,教学的重点是两角和与差的余弦公式、正弦公式与正切公式;难点是公式的推导和运用,讲清公式的特点与用途.

2.要明确二倍角的概念:2α 是 α 的二倍角,α 是 $\frac{\alpha}{2}$ 的二倍角,3α 是 $\frac{3\alpha}{2}$ 的二倍角.二倍角公式的实质是用一个角的三角函数表示这个角的二倍角的三角函数.要使学生从一开始就对二倍角的含义有正确的认识.

3.二倍角余弦公式的三种形式同等重要,掌握这三种形式各自的特点.公式 $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ 的特点是公式的右边是平方差的形式,可以方便地进行因式分解;公式 $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 和 $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ 分别是用角 α 的余弦和正弦中的一种函数来表示二倍角余弦的公式;变形公式 $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$ 和 $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$ 的特点是公式的左边是三角函数的平方,右边是二倍角余弦函数的一次式.正向使用公式通常把公式叫作降幂公式,反向使用公式通常把公式叫作升幂公式,降幂公式和升幂公式在专业课程及后继课程的学习中有着广泛的应用.教师要引导学生抓住各个公式的特点.理解、记忆和正确使用这些公式.

4.在例1解题过程的教学中,要注意强调以下两点:

(1)如何选用公式.

(2)是否需要讨论符合.

5.例2～例4的作用是强化二倍角公式,一方面使学生正确理解二倍角公式的意义,另一方面强化根据条件灵活选用公式的能力,教学中要引导学生对上面的问题进行反思与讨论.

第三节　三角函数的积化和差与和差化积

1. 本节课的教学要求是了解三角函数的积化和差与和差化积公式的推导过程；了解此组公式与两角和差的正弦、余弦公式的联系；通过对公式的运用，培养学生逻辑推理的能力.

2. 本节课的教学重点是三角函数的积化和差与和差化积；难点是公式的推导与运用. 能正确运用此公式进行简单的三角函数式的化简、求值和恒等式的证明.

3. 两角和与差的正弦公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 和 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ 两式相加，可得到一种三角函数积化和差公式：$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$，从而将三角函数由积的形式转化成了和或差的形式.

4. 在三角函数积化和差公式的基础上，利用二倍角公式，可以得到三角函数的和差化积公式，从而实现三角函数由和或差的形式转化为积的形式.

5. 例 1 的作用是三角函数的和差化积公式的应用，加强学生对公式的理解和应用. 例 2 是半角公式的证明过程. 此部分内容有一定难度，在教学过程中教师可以根据学生的接受程度选择是否进行教学.

第四节　正弦型曲线

1. 本节课的教学要求是使学生掌握正弦型函数的性质及图形的“五点法”作图；理解正弦型函数的系数 A、ω、φ 的意义；会求正弦型函数的最值及相应的角的取值；了解正弦型函数在电工学和物理学中的应用，理解同频率正弦型的合成，从而培养解决问题的能力.

2. 本节课的教学重点是正弦型函数的性质的理解与应用，教学难点是由已知的正弦型曲线写出对应的正弦型函数解析式及正弦型函数在电学中的应用，强化“五点法”画正弦型函数的图像.

3. 教材主要研究正弦型函数的周期性和最大值(最小值)，教师在讲解这部分内容时，一定要注意“变量替换”的运用，要讲清利用“变量替换”的手段进行化归的思想，以利于通过各个部分内容的教学，使得学生切实掌握这个重要的数学思维方法.

4. 例 1 和例 2 介绍了求正弦型函数的性质. 例 1 是应用公式 $T=\frac{2\pi}{\omega}$来求解正

弦型函数的周期. 例2介绍了其正弦型函数的周期性和最大值(最小值)及取得最大值(最小值)时 x 的取值. 在解题过程在设置了新的变量 z,目的是突出、强化"变量替换";熟练之后,可以省略新变量的过程,将 $4x+\frac{\pi}{3}$ 看作一个整体,直接写出取得最大值(最小值)时的角.

5. 研究将函数 $y=a\sin x+b\cos x(a>0,b>0)$ 时,首先要把函数转化为正弦型函数 $y=A\sin(x+\theta)$ 的形式,教材考察以 (a,b) 为坐标的点 P,并借助图形及其三角函数来确定角 θ 的值. 选择 $\tan\theta=\frac{b}{a}$ 确定角 θ 的优点是数值比较容易计算,缺点是容易搞错和忽视确定点 $P(a,b)$ 是第几象限的点这一重要环节;选择 $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 和 $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 确定角 θ 的优点是使用这两个函数,容易确定点 $\mathrm{P}(a,b)$ 是第几象限的点,缺点是数值计算比较复杂. 在实际教学中,教师可以选择其中一种进行教学,也可以像教材中两者结合起来进行.

6. 例3主要是给出逆向使用两角和与差的三角公式的示例,要讲清三角函数式如何转化为正弦型函数. 本例有一定难度,在教学中,可以根据学生的接受程度选择是否进行教学.

7. 在正弦型函数图像的教学中,本教材略去了由函数 $y=\sin x$ 的图像通过平移及伸缩变化得到函数 $y=A\sin(x+\theta)$ 的图像的过程. 教学的重点是正弦型曲线的"五点法"作图的变量替换思想. 利用"五点法"作一个周期内的正弦型曲线时,可以通过列表得到五个关键点的坐标,可以直接写出五个关键点的坐标. 教材开始时使用前者,在学生对正弦型曲线有了一定的认识后,再使用后者.

8. 要正确认识正弦型函数的系数 A、ω、φ 对函数图像(包括形状和位置)的影响,教师在教学时应明确以下几点:

(1)A:决定函数的峰值(振幅),影响函数的最值,函数的最大值为 A,最小值为 $-A$.

(2)ω:决定函数的周期,函数的周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

(3)φ:决定一个周期内的函数图像的起点,起点为 $\left(-\frac{\varphi}{\omega},0\right)$.

9. 例4和例5是给出一个正弦型函数解析式,求峰值、周期、初相位、通过解析式的系数的研究,了解正弦型曲线的特征.

第五节　解斜三角形

1. 本节课的教学要求是让学生理解正弦定理与余弦定理，掌握解斜三角形的常用方法.

2. 本节课的教学重点是正弦定理与余弦定理及其应用，难点是已知两边和其中一边的对角解三角形.

3. 在教材中，利用几何知识讲解正弦定理与余弦定理，降低了难度. 但建议不要利用向量工具进行严格的证明；否则会增加难度. 这部分知识重在应用.

4. 正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，实际上可以写成三个等式，即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. 在解题时，常常只用到其中的一个或两个.

5. 正弦定理可以解决以下两类解三角形问题：

(1)已知三角形的两角和任意一边，求其他两边和一角.

(2)已知三角形的两边和其中一边所对角，求其他的一边和一角.

6. 教材安排了 3 个例题来介绍利用正弦定理理解三角形的方法. 例 1 是基础题，目的是让学生熟悉公式. 例 2 和例 3 是突破难点的题目，介绍了讨论的方法和两种结果. 理解在三角形中“大边对大角，小边对小角”是讨论的基础. 由于三角形中的角的取值范围为$(0,\pi)$，在这个区间内正弦函数不是单调函数，已知正弦值求角时，必须进行讨论. 因此，已知两边及其中一边的对角，求另一边的对角的正弦函数值时，需要判断这个角有可能是钝角. 判断的方法是，结合已知条件，判断角所对的边是否大于另一条已知边. 在例 2 中，由 $b>a$，可知 $30^\circ<\angle B<180^\circ$，$\angle B$ 有可能是钝角，所以有两个解. 教学中要引导学生进行讨论，认清解决问题的关键.

7. 余弦定理是勾股定理的推广，在余弦定理的每个等式中，各包含了四个不同的量，它们分别是三角形的三条边和一个角，这样，已知其中三个量，就可以求出第四个量. 因此，利用余弦定理可以解决以下两类解三角形的问题：

(1)已知三角形的两边及它们的夹角，求第三边及其他的两个角.

(2)已知三角形的三边，求三个角.

8. 例 4 是已知三角形的两边及它们的夹角，求第三边的实例，可以直接应用余弦定理. 例 5 是已知三角形的三遍求角的示例，由于余弦函数在区间$(0,\pi)$内是单调函数，所以通过余弦值求角时，不必再进行讨论. 这里求最大值与最小值，是

强化对“大边对大角,小边对小角”的认识,在求解时,一般利用余弦定理求第一个角,求第二个角时利用余弦定理,也可以利用正弦定理.例6是余弦定理的反向应用,已知两边及对角,应用余弦定理求第三边及另一个角.

9.在解三角形应用举例中,教材列举了解决航海、测量等问题的应用实例,实际教学中可以根据学生所学习的专业进行取舍,也可以增加与学生专业练习紧密的例题.教学的重点是从实际问题中抽象出解三角形的问题,并归纳到某个类型加以解决.要指导学生会看、会画示意图,以提高学生数形结合地研究实际问题的能力.

第六节　三角计算应用举例

1.本节课主要是通过生产、生活中的几个实例介绍三角计算及其应用的讲授,提高学生对应用数学知识解决实际问题的认识,为进一步解决职业岗位中的问题打下基础.

2.本节课的教学难点是实际数学模型,深入生产了解实际,创设情境,展现实物模型.其中,构建现场教学是解决难点的关键.

3.弓形工件又叫作缺圆工件.在实际问题中要搞清楚弓形对应的弧是优弧还是劣弧.

六、典型例题

例1　(1)求值:$\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$,$\cos\frac{3\pi}{4}$.

(2)化简 $\sin(80°+\theta)\cos(20°+\theta)-\cos(80°+\theta)\sin(160°-\theta)$.

(3)若锐角 α、β 满足 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$,$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$,求 $\sin\beta$.

解　(1)$\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

$$=-\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2)$\sin(80°+\theta)\cos(20°+\theta)-\cos(80°+\theta)\sin(160°-\theta)$

$=\sin(80°+\theta)\cos(20°+\theta)-\cos(80°+\theta)\sin[180°-(20°+\theta)]$

$=\sin(80°+\theta)\cos(20°+\theta)-\cos(80°+\theta)\sin(20°+\theta)$

$=\sin 60°$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

(3)因为锐角 α、β 满足 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$.

所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{7}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

又因为锐角 α、β 满足 $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{11}{14}$.

所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{11}{14}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$,

于是 $\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$

$=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}\times\dfrac{1}{7}+\dfrac{11}{14}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

例 2　已知 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$,$\theta=\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,求 $\cos 2\theta$ 和 $\tan 2\theta$ 的值.

解　由二倍角的余弦公式可得

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\frac{9}{25}=\frac{7}{25}.$$

因为 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$,$\theta=\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

所以 $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\dfrac{4}{5}$,$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{3}{4}$.

由二倍角的正切公式可得

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-\frac{24}{7}.$$

例 3 求值.

(1)$\dfrac{\sqrt{3}-\tan15^\circ}{1+\sqrt{3}\tan15^\circ}$;

(2)$\tan15^\circ+\tan30^\circ+\tan15^\circ\tan30^\circ$.

【解析】 (1)$\dfrac{\sqrt{3}-\tan15^\circ}{1+\sqrt{3}\tan15^\circ}=\dfrac{\tan60^\circ-\tan15^\circ}{1+\tan60^\circ\tan15^\circ}$

$=\tan(60^\circ-15^\circ)$

$=1.$

(2)$\tan15^\circ+\tan30^\circ+\tan15^\circ\tan30^\circ$

$=\tan(15^\circ+30^\circ)(1-\tan15^\circ\tan30^\circ)+\tan15^\circ\tan30^\circ$

$=1.$

例 4 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin2x\sin\alpha+\cos^2x\cos\alpha-\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$ $(0<\alpha<\pi)$,其图象过点$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

(1)求 α 的值.

(2)将函数 $y=f(x)$ 的图象上各点的横坐标缩短到原来的$\dfrac{1}{2}$,纵坐标不变,得到新的函数 $y=g(x)$ 的图形,求函数 $y=g(x)$ 在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值.

解 (1)$f(x)=\dfrac{1}{2}\sin2x\sin\alpha+\cos^2x\cos\alpha-\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$

$=\dfrac{1}{2}\sin2x\sin\alpha+\dfrac{1}{2}(1+\cos2x)\cos\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha$

$=\dfrac{1}{2}\sin2x\sin\alpha+\dfrac{1}{2}\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\cos2\mathrm{x}\cos\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha$

$=\dfrac{1}{2}\sin2x\sin\alpha+\dfrac{1}{2}\cos2x\cos\alpha$

$=\dfrac{1}{2}\cos(2x-\alpha).$

又因为图象过点$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

所以$\frac{1}{2}\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$,即$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$0<\alpha<\pi$.

所以$\alpha=\frac{\pi}{6}$.

(2)由函数$y=f(x)$的图象上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$,纵坐标不变,可得$y=g(x)=f(2x)=\frac{1}{2}\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$.

因为$0<x<\frac{\pi}{2}$.

所以$-\frac{\pi}{6}<4x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$.

故$\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{2}\cos(4x-\frac{\pi}{6})\leqslant\frac{1}{2}$.

所以函数函数$y=g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值分别为$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{4}$.

例 5　在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,已知$\cos 2C=\frac{1}{9}$,

(1)求$\sin C$的值.

(2)当$a=3,2\sin A=\sin C$,求b及c的长.

解　(1)$\cos 2C=1-2\sin^2 C=\frac{1}{9}$,解得

$$\sin C=\frac{2}{3}\text{或}-\frac{2}{3}.$$

因为$0<C<\pi$,

所以$\sin C=\frac{2}{3}$.

(2)当$a=3,2\sin A=\sin C$时,由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,得$c=6$.

$\cos 2C=2\cos^2 C-1=\frac{1}{9}$及$0<C<\pi$得

$$\cos C=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 得 $b^2\pm2\sqrt{5}b-27=0$,解得

$$c=\sqrt{5}+4\sqrt{2}\text{或 } c=-\sqrt{5}+4\sqrt{2}.$$

七、课后习题答案

练习题 5-1

1. $(5,0)$.

2. (1)$\sqrt{3}\cos\alpha$;(2)$-\sqrt{2}\sin\beta$.

3. $\dfrac{3\sqrt{3}\pm4}{10}$.

4. $-\dfrac{3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{12}$.

5. $-\dfrac{33}{65}$.

6. (1)$-\dfrac{3}{5}$;(2)$\dfrac{5}{3}$.

练习题 5-2

1. (1)$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;(2)$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;(3)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$;(4)$-\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

2. (1)$1-\sin2\alpha$;(2)$\cos2\beta$;(3)$\tan2\alpha$.

3. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$;$-\sqrt{2}$.

4. 第四象限.

5. 1.

6. (1)$\dfrac{7}{25}$;(2)$-\dfrac{3}{4}$;(3)$\dfrac{7}{24}$.

7. (1)π;(2)$2+\sqrt{2}$.

练习题 5-3

1. (1)$\dfrac{1}{4}$;(2)$\dfrac{\sqrt{21}}{4}$;(3)$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$;(4)$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

2. $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

3. 证略.

练习题 5-4

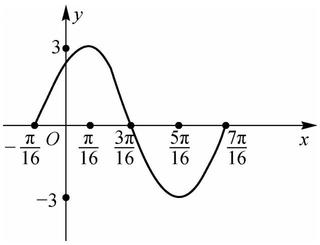
1. (1) $6\pi, 2, -2, x=6k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}), y_{\max}=2; x=6k\pi-\frac{5\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}), y_{\min}=-2.$

(2) $\frac{\pi}{2}, 8, -8, x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{24}(k\in\mathbf{Z}), y_{\max}=8; x=\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{24}(k\in\mathbf{Z}), y_{\min}=-8.$

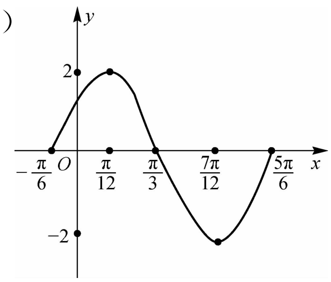
(3) $\frac{1}{2}, 1, -1, x=\frac{k}{2}+\frac{3}{40}(k\in\mathbf{Z}), y_{\max}=1; x=\frac{k}{2}-\frac{7}{40}(k\in\mathbf{Z}), y_{\min}=-1.$

(4) $\frac{2\pi}{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z}), y_{\max}=\sqrt{2}; x=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z}), y_{\min}=-\sqrt{2}.$

2. (1)



(2)



3. $y=2\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right).$

练习题 5-5

1. (1) 3；　(2) $\sqrt{3}$；　(3) $\frac{1}{2}$, 60°；　(4) 30°.

2. 6 或 12.

3. $4\sqrt{6}, 6\sqrt{2}+2\sqrt{6}.$

4. 2 小时.

5. 约 194 km, 10°.

练习题 5-6

1. 40.89°.

2. 略.

3. 17.5 mm.

4. $6\sqrt{35}$ mm.

复习题5

A　组

1. (1)D;(2)A;(3)C;(4)C;(5)C;(6)D;(7)D;(8)B;(9)C;(10)B;(11)B;(12)C.

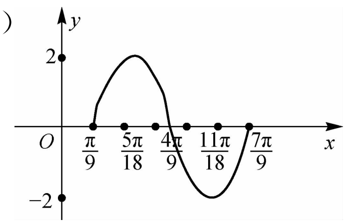
2. (1)$\frac{\sqrt{2}}{2}$;(2)$\frac{2\sqrt{2}}{3}$;(3)$\frac{2\pi}{3}$, 2, $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$, $\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$;(4)$\sqrt{17}$;(5)$\left(\frac{3\pi}{20},0\right)$, $\left(\frac{11\pi}{40},5\right)$, $\left(\frac{2\pi}{5},0\right)$, $\left(\frac{21\pi}{40},-5\right)$, $\left(\frac{13\pi}{20},0\right)$;(6)$\frac{5}{7}$.

3. (1)$\frac{\sqrt{3}}{2}$;(2)$\frac{\sqrt{2}}{2}$;(3)$\frac{\sqrt{2}}{2}$;(4)$\frac{\sqrt{3}}{2}$;(5)$2+\sqrt{3}$.

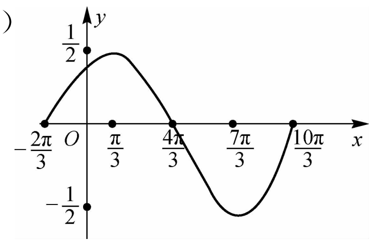
4. (1)$\sin\alpha$;(2)$\sqrt{3}\cos\beta$;(3)$\frac{1}{2}$;(4)$\sin2\beta$;(5)$-\cot\alpha$;(6)$\sqrt{3}$.

5. (1)2, −2, 2π;(2)2, −2, 2π.

6. (1)



(2)



7. (1)钝角;(2)$b=15\sqrt{2}-5\sqrt{6}$;$c=10\sqrt{3}-4$.

8. $-\frac{24}{25}$;$\frac{\sqrt{10}}{10}$;$-\frac{\sqrt{2}}{10}$;$\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$;$\frac{48-25\sqrt{3}}{11}$;$-\frac{24}{7}$.

9. $\frac{7}{25}$.

10. $\frac{50(\sin40^\circ-\cos40^\circ\tan25^\circ)}{\tan25^\circ}$.

11. 47.3 m.

B　　组

1. 到 A 的距离为 $10\sqrt{3}-10$，到 B 的距离为 $10\sqrt{2}$.

2. 323.5 m.

八、阅读材料

［阅读材料］

三角函数简史之角与弦

角的概念会产生歧义，因为它既描述了两条相交直线之间“分离”这个定性的概念，也描述了这种分离程度的数值（角的度量）. 而在两个点之间的“分离”上却没有这种歧义，因为线段和长度这两个概念能分得很清楚. 好在我们不需要担心这种混淆，因为在三角学中，我们只关注线段与角的性质当中可以量化的部分.

三角学算是最古老的学科了，真要说起来，它的历史比平面几何还早，当然如果把早期的三角学计算也算作平面几何的一部分的话那就另当别论了. 如今中学生接触的三角学，是以直角三角形为基准的各边之比的定义得来的；然后到了高中就将三角函数定义放到圆和坐标系里，这一点倒是符合三角学的历史发展的. 数学史上第一份三角学资料，也是拿来解直角三角形的.

一、角度

平面上的运动只有两种——平移和旋转. 平移的程度由距离和面积来度量，而旋转的程度则由角度来度量，对长度的定义一直以来都没什么难度，确定一个单位长度标准就行了. 对角度的定义却没那么简单——角度描述两条相交直线之间的相离程度，到底多大程度才能定为一个标准？相对于距离来说，角度的大小更充满“定性”的味道. 好在巴比伦人利用了圆这一个标准——他们将圆从圆心分成了 360 份，要衡量一个角度大小，只需要将角度的顶点与圆心重合，算出对应的弧长占圆周长的百分数，就能够衡量这个角的大小了. 所以利用圆来衡量角度，大概是古人早已发现圆周角所对弧长与圆周角之间简单的比例关系. 圆与三角学的关系，从一开始就密不可分，往后也是. 至于巴比伦人为何将圆分为 360 份，具体原因已经不可考，但很明显，这与巴比伦人一贯使用的六十进制有很大关系. 其中有一个解释是，因为巴比伦人使用的是六十进制，所以实际上它们是将一个圆分

成了六个进制.这样的一个好处就是分出来的每一份中对应的弦长与半径相等.另一个解释就是360份恰与一年的天数很接近.当然从未有任何证据说明这一点,一切都只是猜测,所以对于360°的规定的具体原因已经不知.但这利用圆来衡量角度的方法一直很有效,流传至今.不久之后,希腊人采用了这一套系统,如托勒密在他的《至大论》中就使用了这一系统.

一直以来,六十进制作为一种计数法,早已被十进制淘汰,但作为角度和时间的度量却一直流传了下来.这种制度是如此受欢迎,即使是在"公制化的创始地"法国也无法被替代.这倒是很有趣的现象.

到了近代,出现了另一种度量制度——弧度制,1弧度就是圆上的弧长等于半径时所对的圆心角.我们经常听说采用弧度制的原因是能够用较小的数字表示角.实际上并非如此,采用弧度制的唯一原因是它能够简化许多公式,如弧长公式将变成$l=\alpha_{\mathrm{r}}$,扇形面积公式也将变得非常简单,弧度的应用去除了这些公式中"多余"的因子$\frac{\pi}{180}$.

另一个事实是,弧度的采用将使得这个事实成立:一个很小的角和它的正弦值在数值上是近似相等的,也就是$\frac{\sin x}{x}$在x趋于零时其极限值为1,这种近似若采用弧度制将使得在x不是很小的时候就变得非常接近.因此,弧度制在微积分学中变得非常重要.

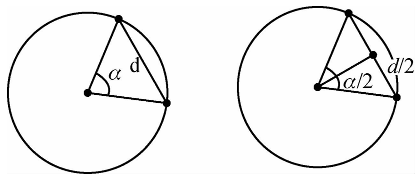
二、弦

三角学一开始和圆扯上了关系,然后就与角度所对的弦长扯上了关系.在数学发展初期的巴比伦时期,人们就已经发现了三角形相似的性质,最后传到希腊,得到了进一步的应用.人类历史上第一位数学家泰勒斯据此计算出了埃及金字塔的高度,可谓是一大奇闻.现代意义上的"三角学"一词,说来还多亏了天文学.天文学的发展亟须科学家求解各种各样的三角形,那时候自然还没有我们今日的什么正弦定理、余弦定理可用.有一位叫西巴尔卡斯的科学家在这方面迈出了重要一步:他将三角形置于圆中,这样三角形的边就变成了弦,为了计算三角形的各部分,就必须考察圆心角与弦长的关系.这事情自此以后成了各个数学家在这方面的研究重点.

第一本三角学著作出自托勒密之手.他编制出了第一套"正弦函数表",当然当时并无正弦这一概念.这个表格继承了西巴尔卡斯的工作,列出了角度从0°～

180°变化时，对应的弦长，托勒密将圆的半径定为 60 单位长度. 为了方便，我们就不谈六十进制了. 实际上相当于十进制中取 10 为半径，根据我们现在的认识，知道托勒密的表格实际上就是给出了一个 $\sin(\frac{\alpha}{2})$表：

$$d=2r\sin(\frac{\alpha}{2})=20\sin(\frac{\alpha}{2}).$$



今天我们可以看到一个有趣的现象：在圆心角 α 与弦长 d 之间的关系中，我们需要先把圆心角除以 2，最后的结果还要乘以 20，这实际上是一个重复的过程. 重复做这样的工作只是在浪费时间而已. 几百年以后，终于有人将此表简化，不再考虑圆心角与弦长的关系，而是考察“弦长的一半”与“圆心角的一半”之间的关系. 我们可以看出，这一看起来简单的简化其实是一次伟大的进步——本来只是等腰三角形的顶角与底边的关系，现在变成了直角三角形一锐角与对边的关系. 如果我们注意到“圆周角是圆心角的一半”这个结论，实际上这一进步已经在孕育着正弦定理. 之后三角学慢慢脱离圆的束缚，转向了以直角三角形为基础. 我们今天熟知的正弦与余弦之比的定义由此变得清晰起来.

[趣味阅读]

三角学发展史简介

三角学简称三角，包括平面三角和球面三角. 传统的三角学以研究平面三角形和球面三角形的边角关系为基础，达到测量上的应用目的，我国中学数学课程中涉及平面三角.

18 世纪，由于三角函数概念的引入，三角函数成了三角学的主要研究对象，其中包括三角函数的性质和图象、三角函数式的恒等变换和解三角形等，这些构成了中学数学三角学的主要内容. 反三角函数曾在中学教材中处于重要位置，现在已渐渐淡化.

三角学起源于对三角形边角关系的定量考察，这始于古希腊的喜帕恰斯、梅

内劳斯和托勒密等人对天文的测量,因此在相当长的一个时期里,三角学隶属于天文学,而在它的形成过程中利用了当时已经积累得相当丰富的算术、几何(包括球面几何)和天文知识.鉴于此种原因,它的贡献者主要是一些天文学家,如印度的阿耶婆多、阿拉伯的尔·坦尼(Al-Batbani)、纳速拉丁等人.

13世纪起,含于天文学中的三角知识传入欧洲,并在欧洲出现新的发展.1464年利国数学家雷基奥蒙坦著《论各种三角形》,独立于天文学之外对三角知识做了较系统的阐说;1595年,德国的皮蒂斯楚斯(Pitiscus,1561～1613年)著《三角学,解三角形的简明处理》,首次将拉丁文"trigonon(三角形)"和"metron(测量)"组合成 trigonametriae,即"三角形".

14～16世纪,三角学曾一度成为欧洲数学的主要内容,研究的方面包括三角函数值表的编制,平面三角形和球面三角形的解法,三角恒等式的建立和推导,主要的方法则是几何的.17世纪,函数概念的引入为三角函数成为三角学的基本概念奠定了基础.1748年,欧拉在他的《无穷分析引论》中对三角函数和三角函数线做出明确区分,使全部的三角公式能从三角函数的定义中逻辑地得到,从而使三角函数与几何脱钩.1807年,法国数学家傅立叶在研究热传导问题时,提出把函数看作三角函数的无穷级数之和,三角函数就成为调和分析的基石,于是三角学成为分析学的一部分.

1631年,三角学传入中国.同年,德国传教士邓玉函、汤若望和明朝学者徐光启编译成《大测》一书."大测者,观三角形之法也."可见"大测"与当时的"三角学"的意义是一样的.不过,"大测"的名称并不通行,三角在中国早期比较通行的名称是"八线"和"三角"."八线"是指在单位圆上的8种三角函数线:正弦线、余弦线、正切线、余切线、正割线、余割线、正矢线、余矢线,如1894年上海美华书馆出版的《八线备旨四卷》和1906年方克猷撰写的《八线法衍》等书督已记载.

由于"八线"中觉的公六线(正弦、余弦、正切、余切、正割、余割)甚至四线(弦、余弦、正切、余切),所以"八线"之名有些名不符实,因而被废弃了.

"三角"这一名称最早见之于1653年薛凤祚和穆尼阁合著的《三角算法》."三角"一词指"三角学"或"三角法"或"三角术".事实上,直到1956年中国科学院编译出版委员会编订《数学名词》时,仍将这三者同义.现在"三角术"和"三角法"已不常用.

三角学的现代发展已经结束.随着现代数学的综合性趋势加强,其中的一些内容已分属于数学的其他学科,如三角函数可归于分析学,三角测量可归于几何学,三角函数式的恒等变形可归于代数学,从这个意义上说,作为独立的数学分科的三角学已渐渐消失.