第十二章　直　　线

第一节　两个基本公式

在本节内容中，我们主要学习两个常用的公式，即两点间的距离公式和中点坐标公式.

一、两点间的距离公式

在初中的数学知识中，我们学习了怎么求数轴上的两点间的距离. 一般地，如果 x 轴上的两点 A 与 B 的坐标分别是 x_1，x_2，那么 A 与 B 的距离为

$$|AB| = |x_2 - x_1| ,$$

即 x 轴上的两点的距离是这两点坐标差的绝对值. 同样，y 轴上的两点间的距离也是两点坐标差的绝对值.

下面我们来讨论已知平面直角坐标系中任意两点的坐标，如何计算这两点的距离.

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 是平面直角坐标系内的任意两点，从 A，B 两点出发分别向 x 轴、y 轴作垂线，垂足分别为 A_1，A_2，B_1，B_2，再过 A 作 BB_1 的垂线，垂足为 C，如图 12-1 所示. 在直角三角形 ABC 中，根据勾股定理有

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{|AC|^2 + |CB|^2} \\ &= \sqrt{|A_1B_1|^2 + |A_2B_2|^2} \end{aligned}$$

学习提示

我国古代把直角三角形较短的直角边称为“勾”，较长的直角边称为“股”，斜边称为“弦”. 于是勾股定理可叙述为：勾方加股方等于弦方.

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

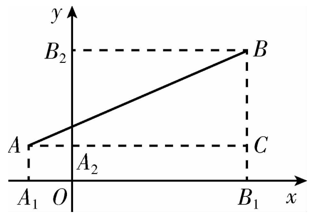


图 12-1

由此得到坐标平面上任意两点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$间的距离为

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (12\text{-}1)$$

特别地,原点 O 与任意一点 $A(x,y)$间的距离为

$$|OA|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

例 1 计算 $A(-3,2)$、$B(3,-6)$两点间的距离.

解 A、B 两点间的距离为

$$|AB|=\sqrt{[3-(-3)]^2+(-6-2)^2}=10.$$

课堂练习

计算下列两点间的距离:

(1)$A(-1,4)$,$B(3,7)$;

(2)$A(1,1)$,$B(5,7)$.

二、线段中点坐标公式

设 $A(x_1,y_2)$,$B(x_2,y_2)$是平面直角坐标系内的任意两点,点 $M(x_0,y_0)$是线段 AB 的中点.过点 A,B,M 分别向 x 轴、y 轴作垂线,垂足分别为 A_1,A_2,B_1,B_2,M_1,M_2,如图 12-2 所示.

因为点 M 为线段 AB 的中点,根据平行线的性质,

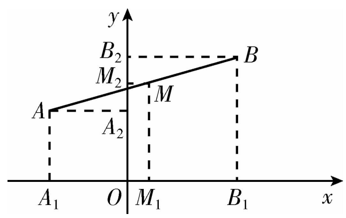


图 12-2

点 M_1 和点 M_2 分别是线段 A_1B_1 和 A_2B_2 的中点，即

$$A_1M_1=M_1B_1,A_2M_2=M_2B_2,$$

所以 $x_0-x_1=x_2-x_0$，$y_0-y_1=y_2-y_0$，即

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},y_0=\frac{y_1+y_2}{2}, \qquad (12\text{-}2)$$

这就是线段中点坐标的计算公式，简称**中点公式**.

例 2　求连结下列两点的线段的中点坐标：

(1)$A(-2,4)$，$B(3,-7)$；

(2)$A(a,0)$，$B(0,b)$.

解　(1)设线段 AB 的中点坐标为(x_0,y_0)，则根据中点坐标公式可得

$$x_0=\frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2},y_0=\frac{4-7}{2}=-\frac{3}{2},$$

所以线段 AB 的中点坐标为$(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$.

(2)设线段 AB 的中点坐标为(x_0,y_0)，则根据中点坐标公式可得

$$x_0=\frac{a+0}{2}=\frac{a}{2},y_0=\frac{0+b}{2}=\frac{b}{2},$$

所以线段 AB 的中点坐标为$\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$.

例 3　已知三角形 ABC 的三个顶点坐标分别为 $A(1,0)$，$B(-2,1)$，$C(0,3)$，求 BC 边上的中线 AD 的长度.

解　设 BC 边上的中点坐标为 $D(x_0,y_0)$，则由点 $B(-2,1)$，$C(0,3)$得

$$x_0=\frac{-2+0}{2}=-1, y_0=\frac{1+3}{2}=2,$$

所以 BC 边上的中点 D 的坐标为 $(-1,2)$.

根据两点间的距离公式可得 AD 的长度为

$$|AD|=\sqrt{(-1-1)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}.$$

课堂练习

1. 求连结下列两点的线段的中点坐标：

(1) $A(-7,4)$, $B(3,8)$;

(2) $A(3,1)$, $B(2,5)$.

2. 已知三角形 ABC 的三个顶点坐标分别为 $A(2,-2)$, $B(0,-1)$, $C(-2,5)$，求 BC 边上的中线 AD 的长度.

练习题 12-1

1. 求连结下列两点的线段的长度及中点坐标：

(1) $A(-1,-3)$, $B(-1,5)$;

(2) $A(0,-2)$, $B(-2,2)$.

2. 已知点 $A(-4,-5)$，线段 AB 的中点 M 的坐标为 $(1,-2)$，求线段端点 B 的坐标.

3. 已知三角形 ABC 的三个顶点坐标分别为 $A(2,2)$, $B(-4,6)$, $C(-2,-3)$，求 AB 边上的中线 CD 的长度.

4. 已知点 $M(4,n)$ 是点 $A(m,2)$ 和点 $B(3,8)$ 连线的中点，求 m, n 的值.

第二节　直线的方程

一、直线的倾斜角与斜率

直线 l 在直角坐标系中与两个坐标轴有不同的夹角，其中直线 l 向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角，叫作直线 l 的**倾斜角**，如图 12-3 所示的角 α.

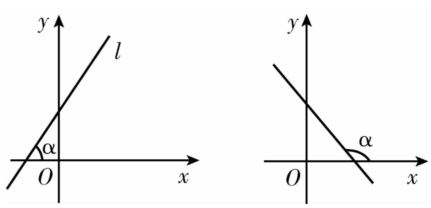


图 12-3

学习提示

倾斜角可用来表示直线对于 x 轴的倾斜程度.

规定：当直线 l 与 x 轴平行或重合时，直线 l 的倾斜角为零度角.

这样，对任意的直线 l，它的倾斜角 α 的取值范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$.

直线 l 的倾斜角为 $\alpha(\alpha\neq90°)$，则 α 的正切值叫作这条直线的**斜率**，通常用小写字母 k 表示，即

$$k=\tan\alpha. \tag{12-3}$$

当 $\alpha=90°$时，直线 l 的斜率不存在，当 $\alpha\neq90°$时，直线 l 都有确定的斜率.

根据直线倾斜角的取值范围，直线的斜率可以分为以下 4 种情况：

(1)当 $\alpha=0°$时(直线平行或重合于 x 轴)，$k=0$；

(2)当 α 为锐角时，$k>0$；

(3)当 $\alpha=90°$时(直线平行或重合于 y 轴)，k 不存在；

(4)当 α 为钝角时，$k<0$.

下面我们研究如何根据直线上的任意两个点的坐标来确定倾斜角和斜率的大小.

如图 12-4 所示，设图中点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 为直线 l 上的任意两点，我们可以得到：

如图 12-4(a)、(b)所示，当 $\alpha\neq90^\circ$ 时，$x_1\neq x_2$，

$$k=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1};$$

如图 12-4(c)所示，当 $\alpha=90^\circ$ 时，$x_1=x_2$，$k=\tan\alpha$ 的值不存在，此时直线 l 与 x 轴垂直.

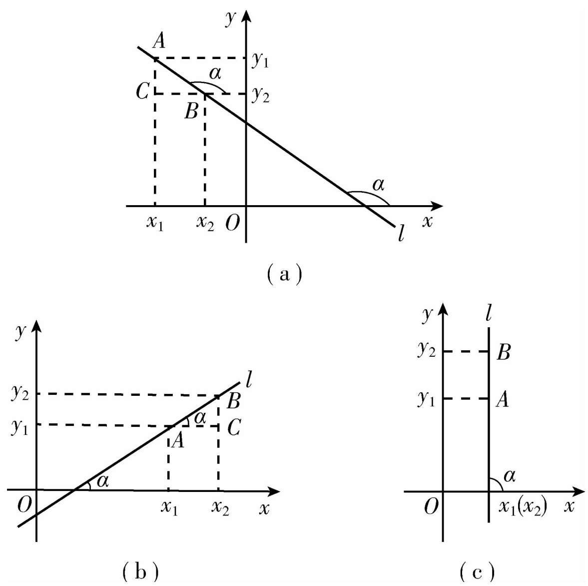


图 12-4

因此，设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 为直线 l 上的任意两点，则直线 l 的斜率为

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2). \qquad (12\text{-}4)$$

学习提示

确定直线的两个几何要素可以是直线上的两个点，也可以是直线上的一个点和倾斜角(或斜率).

例 1 根据下面各直线满足的条件，分别求出直线的斜率：

(1)倾斜角为 60°；

(2)直线经过点 $A(-2,3)$，$B(2,-1)$.

解　(1)由于倾斜角为 60°,故直线的斜率为

$$k=\tan\alpha=\tan60^\circ=\sqrt{3}.$$

(2)由于直线经过点 $A(-2,3)$,$B(2,-1)$,$x_1\neq x_2$,所以直线的斜率为

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-3}{2-(-2)}=-1.$$

课堂练习

1. 判断满足下列条件的直线的斜率是否存在,若存在,求出斜率的值.

(1)直线的倾斜角为 45°;

(2)直线过点 $A(2,-1)$,$B(3,5)$;

(3)点 $A(5,-2)$,$B(5,4)$在直线上.

2. 设点 $A(-3,1)$,$B(-5,3)$在直线 l 上,求直线 l 的斜率和倾斜角.

二、直线的点斜式和斜截式方程

已知直线 l 的斜率为 k,并且经过点 $P_0(x_0,y_0)$,如图 12-5 所示,求直线 l 的方程.

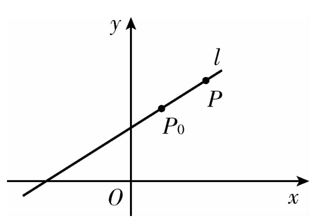


图 12-5

设点 $P(x,y)$是直线上不同于点 P_0 的任意一点,因为直线 l 的斜率为 k,则根据过两点的直线的斜率公式,得

$$k=\frac{y-y_0}{x-x_0}(x\neq x_0),$$

即 $y-y_0=k(x-x_0)$，也即斜率为 k，并且经过点 $P_0(x_0,y_0)$ 的直线的方程为

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (12\text{-}5)$$

由于这个方程是由直线上的一点和直线的斜率确定的，所以叫作直线的**点斜式方程**.

例 2　直线经过点 $P(2,3)$，倾斜角为 $45°$，求直线的方程.

解　由于倾斜角 α 为 $45°$，故直线的斜率为

$$k=\tan\alpha=\tan 45°=1,$$

又因为直线经过点 $P(2,3)$，则根据点斜式方程得直线方程为

$$y-3=1\times(x-2),$$

即

$$x-y+1=0.$$

这说明直线上任意一点的坐标都是方程 $x-y+1=0$ 的解.

设点 $P_1(x_1,y_1)$ 的坐标为方程 $x-y+1=0$ 的解，即 $x_1-y_1+1=0$，则

$$\frac{y_1-3}{x_1-2}=1=\tan 45°.$$

又已知直线经过点 $P(2,3)$，倾斜角为 $45°$，只可以确定一条直线. 这说明点 $P_1(x_1,y_1)$ 在经过点 $P(2,3)$、倾斜角为 $45°$ 的直线上.

一般地，如果直线(或曲线) L 与方程 $F(x,y)=0$ 满足下列关系：

(1) 直线(或曲线) L 上的点的坐标都是方程 $F(x,y)=0$ 的解；

(2) 以方程 $F(x,y)=0$ 的解为坐标的点都在直线(或曲线) L 上.

那么，直线(或曲线) L 叫作**二元方程** $F(x,y)=0$ **的**

直线(或**曲线**),方程 $F(x,y)=0$ 叫作**直线**(或**曲线**)L **的方程**,记作曲线 L:$F(x,y)=0$ 或者曲线 $F(x,y)=0$.

例 3　直线经过点 $P_1(1,2)$,$P_2(-1,-3)$,求直线的方程.

解　因为直线经过点 $P_1(1,2)$,$P_2(-1,-3)$,由斜率公式得直线的斜率为

$$k=\frac{-3-2}{-1-1}=\frac{5}{2},$$

根据点斜式方程得直线的方程为

$$y-2=\frac{5}{2}(x-1),$$

即

$$5x-2y-1=0.$$

如图 12-6 所示,直线 l 与 x 轴交于点 $A(a,0)$,与 y 轴交于点 $B(0,b)$,则 a 叫作直线 l 在 x 轴上的**截距**(或**横截距**),b 叫作直线在 y 轴上的**截距**(或**纵截距**).

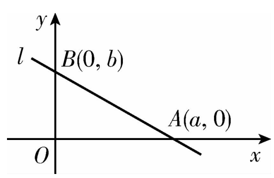


图 12-6

设直线 l 的斜率为 k,并且在 y 轴上的截距为 b,即直线经过点 $(0,b)$,则直线 l 的方程为

$$y-b=k(x-0),$$

即

$$y=kx+b.$$

斜率为 k,在 y 轴上的截距为 b 的直线的方程为

$$y=kx+b, \tag{12-6}$$

这个方程叫作直线的**斜截式方程**.

例 4　直线 l 的倾斜角为 $150°$,且在 y 轴上的截距为 -2,求直线 l 的方程.

解　因为直线的倾斜角为 $150°$,所以直线的斜率为

学习提示

直线在 x 轴、y 轴上的截距可能是正数、负数或 0.

想一想

在实际应用时,应如何对方程的点斜式方程和斜截式方程进行选择?

$$k=\tan150°=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

又因为直线在 y 轴上的截距为 -2,所以根据直线的斜截式方程得直线的方程为

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-2.$$

下面,我们考虑两种特殊情况,如图 12-7 所示.

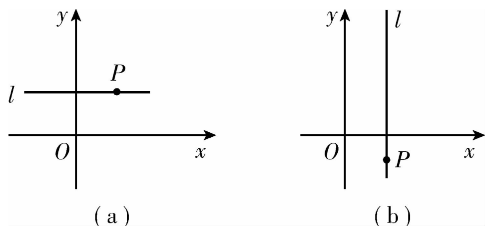


图 12-7

如图 12-7(a)所示,直线 l 经过点 $P(x_0,y_0)$,且平行于 x 轴. 因为 l 平行于 x 轴,所以倾斜角 $\alpha=0°$,斜率 $k=0$,且经过点 $P(x_0,y_0)$,根据点斜式方程可得直线 l 的方程为

$$y-y_0=0\times(x-x_0),$$

化简得

$$y=y_0.$$

这就是经过点 $P(x_0,y_0)$,且平行于 x 轴的直线 l 的方程. 特别地,当直线 l 与 x 轴重合时,直线的方程为 $y=0$.

如图 12-7(b)所示,直线 l 经过点 $P(x_0,y_0)$,且平行于 y 轴. 因为 l 平行于 y 轴,所以倾斜角 $\alpha=90°$,斜率 k 不存在,不能用点斜式和斜截式表示. 但因为直线 l 上的每一点的横坐标都等于 x_0,所以直线 l 的方程可以表示为

$$x=x_0.$$

这就是经过点 $P(x_0,y_0)$,且平行于 y 轴的直线 l 的方程. 特别地,当直线 l 与 y 轴重合时,直线的方程为 $x=0$.

课堂练习

1. 已知直线经过下列两点,求出它们的方程:

(1)$P_1(2,1)$,$P_2(0,-3)$;

(2)$P_1(-1,-5)$,$P_2(2,1)$.

2.写出符合条件的直线的斜截式方程:

(1)$k=\frac{1}{3}$,$b=-3$;

(2)$\alpha=45°$,$b=4$.

三、直线的两点式方程

如图 12-8 所示,已知直线 l 经过点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$,由斜率公式可得

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

故直线 l 的方程为

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

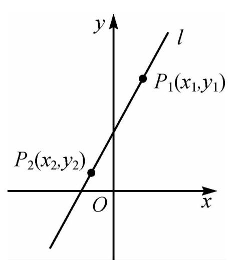


图 12-8

当 $y_1\neq y_2$ 时,方程可写成

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2 \text{ 且 } y_1\neq y_2).$$

由于上述方程是由直线上的两点确定的,所以称为直线的两点式方程.

例 5　写出经过下列两点的直线方程.

(1)$A(1,3)$,$B(-4,6)$;(2)$A(0,3)$,$B(-6,0)$.

解 (1)直线经过点 $A(1,3)$,$B(-4,6)$,由直线的两点式方程得

$$\frac{y-3}{6-3}=\frac{x-1}{-4-1},$$

整理得

$$y=-\frac{3}{5}x+\frac{18}{5}.$$

因此,直线方程为 $y=-\frac{3}{5}x+\frac{18}{5}$.

(2)直线经过点 $A(0,3)$,$B(-6,0)$,由直线的两点式方程得

$$\frac{y-3}{0-3}=\frac{x-0}{-6-0},$$

整理得

$$y=\frac{1}{2}x+3.$$

因此,直线方程为 $y=\frac{1}{2}x+3$.

课堂练习

1. 写出经过下列两点的直线方程.

(1)$A(4,-1)$,$B(2,2)$; (2)$A(-1,5)$,$B(3,0)$.

2. 已知两点 $A(2,5)$,$B(-1,2)$,若点 $P(6,m)$在直线 AB 上,求实数 m 的值.

四、直线的一般式方程

直线的点斜式方程 $y-y_0=k(x-x_0)$可以化为

$$kx-y+y_0-kx_0=0;$$

直线的斜截式方程 $y=kx+b$ 可以化为

$$kx-y+b=0.$$

由此可以知道，直线的点斜式方程和斜截式方程都可以转化为二元一次方程的一般形式

$$Ax+By+C=0.$$

(1)当 $A\neq0$，$B\neq0$ 时，二元一次方程 $Ax+By+C=0$ 可化为 $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$. 它表示斜率为 $k=-\dfrac{A}{B}$，在 y 轴上的截距 $b=-\dfrac{C}{B}$ 的直线.

(2)当 $A=0$，$B\neq0$ 时，方程可化为 $y=-\dfrac{C}{B}$. 它表示经过点 $P(0,-\dfrac{C}{B})$ 且平行于 x 轴的直线.

(3)当 $A\neq0$，$B=0$ 时，方程可化为 $x=-\dfrac{C}{A}$. 它表示经过点 $P\left(-\dfrac{C}{A},0\right)$ 且平行于 y 轴的直线.

因此，二元一次方程 $Ax+By+C=0$（其中 A，B 不全为零）表示一条直线.

方程

$$Ax+By+C=0（其中 A，B 不全为零）\quad(12\text{-}7)$$

叫作直线的**一般式方程**.

思考与讨论

直线的点斜式、斜截式、两点式和一般式方程之间如何相互转换？试举例说明.

例 6　将方程 $y+3=\dfrac{3}{2}(x-1)$ 化为直线方程的一般式方程，并求出该直线方程在 x 轴和 y 轴上的截距.

解　由 $y+3=\dfrac{3}{2}(x-1)$ 得

$$3x-2y-9=0,$$

这就是直线的一般式方程.

令 $x=0$，则 $y=-\dfrac{9}{2}$，故直线在 y 轴上的截距为 $-\dfrac{9}{2}$；令 $y=0$，则 $x=3$，故直线在 x 轴上的截距为 3.

例7 已知直线 l 经过 $A(4,2)$，斜率为 -3，求直线 l 的点斜式方程、斜截式方程和一般式方程.

解 因直线 l 经过点 $A(4,2)$，斜率为 -3，故其点斜式方程为 $y-2=-3(x-4)$.

将上述方程变形后可得直线的斜截式方程 $y=-3x+14$，将斜截式方程移项后可得直线的一般式方程：

$$3x+y-14=0.$$

课堂练习

1. 根据下列条件写出直线方程，并化为一般式：

(1)经过点 $P(-3,5)$，斜率为 -2；

(2)倾斜角为 $120°$，在 y 轴上的截距为 3.

2. 将下列直线的方程化为一般式方程：

(1) $y=\frac{1}{2}x+2$；

(2) $y-2=\frac{3}{4}(x+1)$.

练习题 12-2

1. 选择题：

(1)已知点 $M(1,-4)$，$N(-4,1)$，则直线 MN 的倾斜角为(　　).

A. $45°$　　B. $135°$

C. $60°$　　D. $120°$

(2)直线 $x-5y+10=0$ 在 x 轴和 y 轴上的截距分别为(　　).

A. -10 和 2　　B. 2 和 -10

C. 1 和 -5　　D. -5 和 1

(3)垂直于 x 轴，且过点(1，4)的直线方程为(　　).

A. $x=1$　　B. $y=4$

C. $y=4x$　　D. $x=4y$

(4)平行于 x 轴，且过点(2，5)的直线方程为(　　).

A. $x=2$　　B. $y=5$

C. $y=\frac{5}{2}x$　　D. $y=\frac{2}{5}x$

2. 已知直线的倾斜角 $\alpha=30°$，且经过点 $A(4,3)$，求该直线的方程.

3. 求斜率为 $\frac{1}{5}$，且在 y 轴上的截距为 3 的直线的方程.

4. 求过点 $M(-2,1)$，$N(4,3)$的直线的方程.

5. 求下列直线在 x 轴和 y 轴上的截距：

(1)$x-4y-2=0$；

(2)$3x+7y+3=0$.

第三节　两直线的位置关系

一、两条相交直线的交点

设两条直线的方程是：

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0.$$

如果这两条直线相交，由于交点同时在 l_1 和 l_2 上，交点坐标同时要满足两个方程，是这两个方程的唯一的公共解；反之，如果这两个直线方程只有一个公共解，那么以这个解为坐标的点必是直线 l_1 和 l_2 的交点.

因此,两条直线是否有交点,主要是看方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$$

是否有唯一解.

例1 求下列两条直线的交点:

$$l_1:x-2y+2=0,$$

$$l_2:x+2y-9=0.$$

解 解方程组 $\begin{cases}x-2y+2=0\\x+2y-9=0\end{cases}$

得

$$\begin{cases}x=\dfrac{7}{2},\\y=\dfrac{11}{4}.\end{cases}$$

所以直线 l_1 和 l_2 的交点是 $P\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{11}{4}\right)$.

课堂练习

求下列两条直线的交点:

(1) $l_1:2x-y-3=0$ 与 $l_2:4x+5y+1=0$;

(2) $l_1:2x-5y+3=0$ 与 $l_2:x-2y-2=0$.

学习提示

两条直线都与第三条直线相交时,"同位角相等"是"两条直线平行"的充要条件.

二、两条直线平行的条件

平面内不重合的两条直线只有相交和平行两种位置关系.前面我们学习了两条相交直线的交点,下面我们将利用直线的斜截式方程来讨论两条直线平行的条件.

如图12-9(a)所示,两条直线 l_1,l_2 的斜率都存在且都不为0,如果直线 l_1 平行于 l_2,那么这两条直线与 x

轴相交的同位角相等,即两条直线的倾斜角相等,故两条直线的斜率相等;反之,两条直线 l_1,l_2 的斜率都存在且都不为 0,如果直线的斜率相等,那么这两条直线的倾斜角相等,即两条直线与 x 轴相交的同位角相等,故两条直线平行.

如图 12-9(b)所示,两条直线 l_1,l_2 的斜率都为 0,则这两条直线都与 x 轴平行,所以直线 l_1,l_2 平行.

如图 12-9(c)所示,两条直线 l_1,l_2 的斜率都不存在,则这两条直线都与 y 轴平行,所以直线 l_1,l_2 平行.

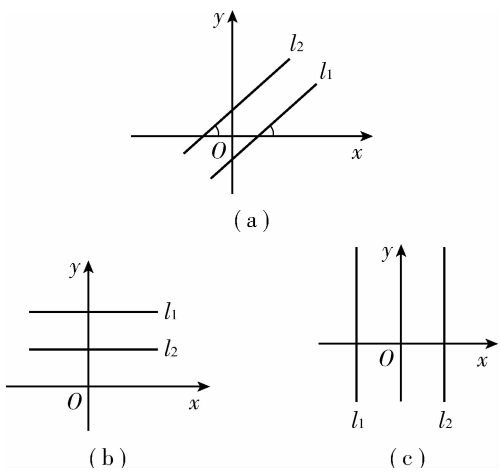


图 12-9

所以,当两条直线的斜率都存在但不相等或一条直线的斜率存在而另一条直线的斜率不存在时,两条直线相交,这样我们就可以利用前面的知识求两条直线的交点.

当两条直线的斜率都存在时,可以利用直线的斜率及直线在 y 轴上的截距,来判断两条直线的关系. 设两条直线的方程分别为 $l_1: y=k_1x+b_1$,$l_2: y=k_2x+b_2$,则

(1)如果 $k_1\neq k_2$,则两条直线 l_1,l_2 相交;

(2)如果 $k_1=k_2$,当 $b_1\neq b_2$ 时,则两条直线 l_1,l_2 平行;当 $b_1=b_2$,则两条直线 l_1,l_2 重合.

因此,判断两条直线是否平行的一般步骤是:

(1)判断两条直线的斜率是否存在,若都不存在,则

两条直线平行(或重合),若只有一个不存在,则两条直线相交;

(2)若两条直线的斜率都存在,将它们都化成斜截式方程,若斜率不相等,则相交;

(3)若斜率相等,比较两条直线在 y 轴上的截距,截距相等,则两条直线重合,截距不相等,则两条直线平行.

例 2 判断下列各组直线的位置关系,若相交的话求出交点.

(1)$l_1: x+3y+2=0$,$l_2: 2x-6y=0$;

(2)$l_1: y=\frac{5}{4}x+3$,$l_2: 5x-4y-2=0$;

(3)$l_1: 2x+3y-1=0$,$l_2: -4x-6y+2=0$.

解 (1)将方程 $x+3y+2=0$ 化为斜截式方程得

$$y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3},$$

所以直线 l_1 的斜率为 $-\frac{1}{3}$,在 y 轴上的截距为 $-\frac{2}{3}$.

将方程 $2x-6y=0$ 化为斜截式方程得

$$y=\frac{1}{3}x,$$

所以直线 l_2 的斜率为 $\frac{1}{3}$,在 y 轴上的截距为 0.

因为 $k_1 \neq k_2$,所以直线 l_1 与 l_2 相交.

解两条直线方程所组成的方程组,得到两条直线 l_1 与 l_2 的交点为 $P\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$.

(2)由方程 $y=\frac{5}{4}x+3$ 可知,直线 l_1 的斜率为 $\frac{5}{4}$,在 y 轴上的截距为 3.

将方程 $5x-4y-2=0$ 化为斜截式方程得

$$y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2},$$

所以直线 l_2 的斜率为$\frac{5}{4}$,在 y 轴上的截距为$-\frac{1}{2}$.

因为 $k_1=k_2$,$b_1\neq b_2$,所以直线 l_1 与 l_2 平行.

(3)将方程 $2x+3y-1=0$ 化为斜截式方程得

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3},$$

所以直线 l_1 的斜率为$-\frac{2}{3}$,在 y 轴上的截距为$\frac{1}{3}$.

将方程$-4x-6y+2=0$ 化为斜截式方程得

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3},$$

所以直线 l_2 的斜率为$-\frac{2}{3}$,在 y 轴上的截距为$\frac{1}{3}$.

因为 $k_1=k_2$,$b_1=b_2$,所以直线 l_1 与 l_2 重合.

例 3　已知直线 l 过点 $A(-3,5)$,且与直线 $y=2x+3$ 平行,求直线 l 的方程.

解　因为直线 $y=2x+3$ 的斜率为 2,且直线 l 与直线$y=2x+3$平行,所以直线 l 的斜率$k=2$.

又因为直线 l 经过点 $A(-3,5)$,所以直线 l 的方程为

$$y-5=2(x+3),$$

即

$$2x-y+11=0.$$

课堂练习

1. 判断下列各组直线的位置关系:

(1)l_1:$x+y=0$,l_2:$2x-3y+1=0$;

(2)l_1:$2x-5y+2=0$,l_2:$4x-10y+1=0$;

(3)l_1:$3x-y+\frac{1}{2}=0$,l_2:$6x-2y+1=0$.

2. 已知直线 l 过点 $A(1,-4)$,且与直线$x-3y+4=0$ 平行,求直线 l 的方程.

三、两条直线垂直的条件

在这里我们利用直线的斜截式方程讨论两条相交直线的一种特殊情形,即直线垂直的情形.

两条直线 l_1 和 l_2 的斜率都存在也都不为 0,设直线方程分别为

$$l_1: y=k_1x+b_1; l_2: y=k_2x+b_2.$$

如图 12-10 所示,若 $l_1 \perp l_2$,则

$$k_1=\tan\alpha_1=\frac{BC}{AB},$$

$$k_2=\tan\alpha_2=\tan(180°-\alpha_3)=-\tan\alpha_3=-\frac{AB}{BC},$$

所以 $k_1 \cdot k_2=\frac{BC}{AB} \cdot \left(-\frac{AB}{BC}\right)=-1$ 或 $k_1=-\frac{1}{k_2}$.

反之,如果 $k_1 \cdot k_2=-1$ 或 $k_1=-\frac{1}{k_2}$,则 $l_1 \perp l_2$.

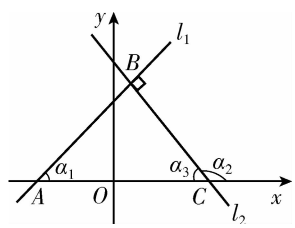


图 12-10

由上述可知,当两条直线的斜率都存在且不等于 0 时,如果它们互相垂直,那么它们的斜率互为负倒数;反之,如果它们的斜率互为负倒数,那么它们互相垂直,即

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2=-1 \text{ 或 } l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1=-\frac{1}{k_2}.$$

显然,平行于 x 轴的直线与平行于 y 轴的直线互相垂直,即斜率为零的直线与斜率不存在的直线互相垂直.

例 4 已知直线方程为

$$l_1: x-2y+5=0, l_2: 2x+y-1=0,$$

判断两条直线是否垂直.

解　将直线 l_1 和 l_2 的方程化为斜截式,得

$$l_1: y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}, l_2: y=-2x+1,$$

所以 $k_1=\frac{1}{2}$,$k_2=-2$. 显然 $k_1 \cdot k_2=-1$,因此两条直线 l_1 和 l_2 垂直.

例 5　求过点 $A(2,-1)$且与直线 $3x+2y-1=0$ 垂直的直线的方程.

解　将直线 $3x+2y-1=0$ 化为斜截式为 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$,所以斜率为 $-\frac{3}{2}$,而所求直线与该直线垂直,所以所求直线的斜率为$\frac{2}{3}$.

根据直线的点斜式方程,所求直线为

$$y+1=\frac{2}{3}(x-2),$$

即

$$2x-3y-7=0.$$

思考与讨论

例 5 中,与直线 $Ax+By+c=0$ 垂直的直线方程可设为 $Bx+Ay+D=0$,请同学们求解一下.

课堂练习

1. 判断下列各组直线是否垂直:

(1)$2x-5y+3=0$ 与 $10x+4y-5=0$;

(2)$y=x+2$ 与 $3x-3y-1=0$.

2. 已知直线 l 经过点 $A(3,-4)$,且垂直于直线 $2x+y-3=0$,求直线 l 的方程.

练习题 12-3

1. 判断下列各组直线的位置关系，若相交的话判断是否垂直，并求出交点：

(1) $3x+4y-6=0$ 与 $6x+8y-12=0$；

(2) $5x-3y-2=0$ 与 $3x+5y+4=0$；

(3) $4x+9y-3=0$ 与 $2x+3y+6=0$；

(4) $2x-7y+10=0$ 与 $7x-2y-8=0$.

2. 求过点 $A(3,1)$ 且与直线 $2x-3y-3=0$ 平行的直线方程.

3. 求过点 $A(-3,-2)$ 且与直线 $3x-5y-2=0$ 垂直的直线方程.

4. 求斜率为 -3，且过直线 $3x-y+4=0$ 与直线 $x+y-4=0$ 交点的直线方程.

5. 求过直线 $2x+y-8=0$ 与直线 $x-2y+1=0$ 的交点，且与直线 $5x-4y+1=0$ 平行的直线方程.

6. 求过直线 $2x-3y+1=0$ 与直线 $6x-8y-4=0$ 的交点，且与直线 $3x+2y-4=0$ 垂直的直线方程.

第四节　点到直线的距离

一、点到直线的距离

我们知道，在直角坐标系中，直线外一点和直线上的点连结所组成的线段中，垂线段最短，称为**点到直线的距离**，常用 d 表示. 如图 12-11 所示，P_0Q 的长度为点 P_0 到直线 l 的距离.

设点 $P_0(x_0,y_0)$ 为直线 $Ax+By+C=0$ 外一点，则

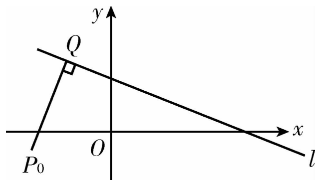


图 12-11

点到直线的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.\qquad (12\text{-}8)$$

证明略.

例 1　根据条件,求下列点到直线的距离:

(1)$P_0(1,2)$,l:$3x+y-6=0$;

(2)$P_0(-2,-3)$,l:$y=-2x-4$.

解　(1)由点到直线的距离公式得

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3\times1+1\times2-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

(2)将直线的方程化为一般式方程,得

$$2x+y+4=0,$$

由点到直线的距离公式得

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2\times(-2)+1\times(-3)+4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

学习提示

使用直线外一点到直线的距离公式时,直线的方程应为一般式方程.

课堂练习

根据下列条件,求点到直线的距离:

(1)$P_0(3,0)$,l:$3x+4y-1=0$;

(2)$P_0(4,2)$,l:$12x-5y-6=0$;

(3)$P_0(-3,5)$,l:$2x+6y-5=0$.

二、两平行直线间的距离

例 2 求平行线 l_1:$2x-3y-7=0$ 和 l_2:$4x-6y-3=0$ 间的距离.

解 由于 $l_1 /\!/ l_2$,所以 l_1,l_2 中任一直线上的任一点到另一直线的距离都相等. 在 l_2 上取一点 $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$(如图 12-12 所示),则点 P 到 l_1 的距离为

$$d=\frac{\left|2\times0-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)-7\right|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{\frac{11}{2}}{\sqrt{13}}=\frac{11\sqrt{13}}{26}.$$

即为两平行线 l_1,l_2 间的距离.

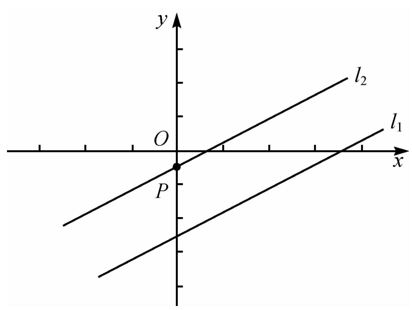


图 12-12

由例 2 可知,求两平行线间的距离可归结为求点到直线间的距离,即在两平行线中的任一条上任取一点,则该点到另一条直线的距离就是这两条平行直线间的距离.

依此法可以证明平行直线 l_1:$Ax+By+C_1=0$ 和 l_2:$Ax+By+C_2=0$ 的距离公式为

$$d=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{12-9}$$

在例 2 中，若首先把 l_1，l_2 方程中 x，y 前面的系数化成一致，如

$$l_1: 4x-6y-14=0,$$
$$l_2: 4x-6y-3=0,$$

则 $A=4$，$B=-6$，$C_1=-14$，$C_2=-3$，代入公式(12-9)，得

$$d=\frac{|-14-(-3)|}{\sqrt{4^2+6^2}}=\frac{11}{2\sqrt{13}}=\frac{11\sqrt{13}}{26}.$$

练习题 12-4

1. 点 $M(-3,0)$到直线 $x-2=0$ 的距离是多少？到直线 $y+3=0$ 的距离又是多少？

2. 求下列点到直线的距离.

(1)$A(-2,3)$，$l: 3x+4y+3=0$；

(2)$B(1,0)$，$l: \sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$；

(3)$C(0,0)$，$l: x=y$；

(4)$D(0,0)$，$l: 3x+2y-26=0$；

(5)$E(1,-2)$，$l: 4x+3y=0$.

3. 求两平行线 $y-1-0$ 与 $y+2-0$ 的距离.

4. 求下列两条平行线的距离.

(1)$l_1: 2x+3y-8=0$，$l_2: 2x+3y+18=0$；

(2)$l_1: 3x+4y=10$，$l_2: 3x+4y=0$.

5. 正方形的中心在 $A(-1,0)$，一条边所在的直线方程是 $x+3y-5=0$，求其他三边所在的直线方程.

复习题12

A 组

1. 填空题:

(1)若直线 $x=1$ 的倾斜角为 α,则 $\alpha=$________.

(2)过点 $A(2,3)$ 且与直线 $2x+y-5=0$ 垂直的直线方程为________.

(3)经过两点 $A(-m,6)$,$B(1,3m)$ 的直线的斜率是12,则 m 的值为________.

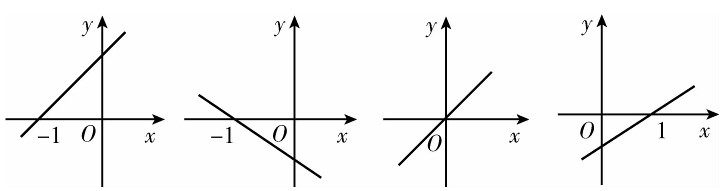
(4)一条直线经过点 $A(2,-3)$,它的倾斜角等于直线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ 的倾斜角的2倍,则该直线的方程为________.

(5)圆 $x^2+y^2+4x-6y+3=0$ 的圆心坐标是________,半径为________.

(6)已知直线 $5x+12y+a=0$ 与圆 $x^2-2x+y^2=0$ 相切,则 a 的值为________.

2. 选择题:

(1)若 $a+b=0$,则直线 $y=ax+b$ 的图像可能是(　　).



A　　B　　C　　D

(2)斜率为 $-\dfrac{1}{2}$,在 y 轴上的截距为5的直线方程是(　　).

A. $x-2y=10$　　　　B. $x+2y=10$

C. $x-2y+10=0$　　　　　D. $x+2y+10=0$

(3) 经过 $(1,2)$ 点，倾斜角为 $135°$ 的直线方程是(　　).

A. $y-2=x-1$　　　　　B. $y-1=-(x-2)$

C. $y-2=-(x-1)$　　　　D. $y-1=x-2$

(4)如果直线 $ax+2y+2=0$ 与 $3x-y-2=0$ 直线平行，那么系数 $a=$(　　).

A. -3　　　　　B. -6

C. $-\frac{3}{2}$　　　　　D. $\frac{2}{3}$

(5)如果直线 $(2a+5)x+(a-2)y+4=0$ 与直线 $(2-a)x+(a+3)y-1=0$ 互相垂直，则 a 的值等于(　　).

A. 2　　　　　B. -2

C. $2,-2$　　　　　D. $2,0,-2$

(6)已知点 $A(3,-2)$，$B(-5,4)$，以线段 AB 为直径的圆的方程为(　　).

A. $(x+1)^2+(y-1)^2=25$

B. $(x-1)^2+(y+1)^2=100$

C. $(x-1)^2+(y+1)^2=25$

D. $(x+1)^2+(y-1)^2=100$

(7)设直线过点 $(0,a)$，其斜率为 1，且与圆 $x^2+y^2=2$ 相切，则 a 的值为(　　).

A. ±4　　　　　B. $\pm2\sqrt{2}$

C. ±2　　　　　D. $\pm\sqrt{2}$

(8)直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 绕原点按逆时针方向旋转 $30°$ 后所得直线与圆 $(x-2)^2+y^2=3$ 的位置关系是(　　).

A. 直线过圆心

B. 直线与圆相交，但不过圆心

C. 直线与圆相切

D. 直线与圆没有公共点

3. 直线 l 与两坐标轴相交,截得的线段以 $M(5,2)$ 为中点,求直线 l 的方程.

4. 已知直线 $4x+3y=10$ 和 $2x-y=10$.

(1)直线 $ax+2y+8=0$ 过两条直线的交点,求 a 的值;

(2)求过两条直线的交点,且与直线 $4x-y+5=0$ 平行的直线方程.

5. 求下列圆的方程:

(1)圆的半径为 $\sqrt{2}$,圆心在直线 $x+y=0$ 上,且过原点;

(2)圆过原点、点 $A(-2,0)$ 和 $B(0,4)$.

6. 判断直线 $x-2y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2-2x-3=0$ 的位置关系.

B 组

1. 设与直线 $x-y-1=0$ 相切的圆过点 $(2,-1)$,且圆心在直线 $2x+y=0$ 上,求圆的方程.

2. 判断 $A(1,4)$,$B(-2,3)$,$C(4,-5)$,$M(4,3)$ 四点是否在同一圆上.

阅读材料

最速降线

在一个斜面上,摆两条轨道,一条是直线,一条是曲线,起点高度以及终点高度都相同.两个质量、大小一样的小球同时从起点向下滑落,曲线的小球反而先到终点.这是由于曲线轨道上的小球先达到了最高速度,所以先到达.然而,两点之间的直线只有一条,曲线却有无

数条.那么,哪一条才是最快的呢?伽利略于1630年提出了这个问题,当时他认为这条线应该是一条弧线,可是后来人们发现这个答案是错误的.1696年,瑞士数学家约翰·伯努利解决了这个问题,他还拿这个问题向其他数学家公开挑战.牛顿、莱布尼兹、洛比达以及雅克布·伯努利等解决了这个问题.这条最速降线就是一条摆线,也叫旋轮线.

意大利科学家伽利略在1630年提出一个分析学的基本问题——“一个质点在重力作用下,从一个给定点到不在它垂直下方的另一点,如果不计摩擦力,问沿着什么曲线滑下所需时间最短.”他说这曲线是圆,可是这是一个错误的答案.

瑞士数学家约翰·伯努利在1696年再次提出这个最速降线的问题(problem of brachistochrone),征求解答.次年已有多位数学家得到了正确答案,其中包括牛顿、莱布尼兹、洛比达和伯努利家族的成员.这个问题的正确答案是连结两个点上凹的唯一一段旋轮线.

旋轮线与1673年荷兰科学家惠更斯讨论的摆线相同.因为钟表摆锤做一次完全摆动所用的时间相等,所以摆线(旋轮线)又称为等时曲线.

看约翰·伯努利对最速降线的解答:

如果使分成的层数 n 无限地增加,即每层的厚度无限地变薄,则质点的运动边趋于空间 A,B 两点间质点运动的真实情况,此时折线也就无限增多,其形状就趋近我们所要求的曲线——最速降线.而折线的每一段趋向于曲线的切线,因而得出最速降线的一个重要性质:任意一点的切线和铅垂线所成的角度的正弦与该点落下的高度的平方根的比是常数.而具有这种性质的曲线就是摆线.所谓摆线,是一个圆沿着一条直线滚动(无滑动)时,圆周上任意一点的轨迹.

因此,最速降线就是摆线,只不过在最速降线问题中,这条摆线是上、下颠倒过来的罢了.

以上便是约翰·伯努利当时所给出的最速降线问题的解答.当然,这个解答在理论上并不算十分严谨.但是,这个解答所蕴含的基本观点的发展导致了一门新的学科——变分学的出现.最速降线问题的最终而完备的解答需要用到变分学的知识.