第八章　数　　列

第一节　数列的概念

一、数列的基本概念

先看几个例子，将正整数从小到大排成一列数为

$$1,2,3,4,5,\cdots;$$

将上列数的倒数排成一列新的数为

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots;$$

将2的正整数指数幂从小到大排成一列数为

$$2,2^2,2^3,2^4,2^5,\cdots.$$

在上面的例子中，按照一定的顺序排成的一列数叫作**数列**．数列中的每一个数都叫作这个数列的**项**．在一个数列中，从开始的项起，自左至右排序，各项按照其位置依次叫作这个数列的第1项（首项），第2项，第3项，…，第n项，…，其中反映各项在数列中位置的数字1，2，3，…，n，…分别叫作对应项的**项数**．

只有有限项的数列叫作**有穷数列**，有无限多项的数列叫作**无穷数列**．

想一想

数列1，2，3，4，5与数列5，4，3，2，1是否为同一个数列？

课堂练习

1．写出下列各组数列，并指出哪些数列是有穷数

列,哪些数列是无穷数列.

(1)自然数1,2,3,4,5的平方组成的一列数;

(2)整数-5,-4,-3,-2,-1,0的绝对值组成的一列数;

(3)正整数1,2,3,4,5,…的立方组成的一列数.

2.设数列为-6,-3,0,3,6,…,则第2项,第5项分别是多少?

二、数列的通项公式

由于数列的项都是按一定的顺序排列的,则每一项都占有一个不同的序号.因此,在一个数列中,每一项与它的序号都有一一对应的关系.

数列的一般形式可以写作

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots (n \in \mathbf{N}^*),$$

记作$\{a_n\}$,其中下脚标的数字代表项数.因此,通常把第n项a_n叫作数列$\{a_n\}$的**通项**或**一般项**.

例如,数列2,3,4,…,$n+1$,…可以简记为$\{n+1\}$;数列$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,…,$\frac{1}{n+1}$,…可以简记为$\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$.

如果数列$\{a_n\}$的第n项a_n能够用关于项数n的一个式子来表示,那么这个式子叫作这个数列的**通项公式**.

例如,数列1,2,3,4,5,…的通项公式是$a_n=n$,可以记为$\{n\}$;

数列1,$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{5}$,…的通项公式是$a_n=\frac{1}{n}$,可以记为$\left\{\frac{1}{n}\right\}$;

数列 $2,2^2,2^3,2^4,2^5,\cdots$ 的通项公式是 $a_n=2^n$，可以记为 $\{2^n\}$.

知道了一个数列的通项公式后，只要用正整数 1，2，3，…依次代替公式中的 n，就可以求出这个数列的每一项. 因此，知道了数列的通项公式也就知道了这个数列的每一项.

思考与讨论

由数列的有限项探求通项公式时，通项公式的答案是唯一的吗？举例讨论一下.

例 1　设数列的通项公式为 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$，写出数列的前 5 项.

解　$a_1=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$；$a_2=\dfrac{2}{2+1}=\dfrac{2}{3}$；$a_3=\dfrac{3}{3+1}=\dfrac{3}{4}$；

$a_4=\dfrac{4}{4+1}=\dfrac{4}{5}$；$a_5=\dfrac{5}{5+1}=\dfrac{5}{6}$.

例 2　已知数列的通项公式为 $a_n=10+2n$，求：

(1)数列的前 4 项；

(2)数列的第 10 项.

解　(1)$a_1=10+2\times1=12$，$a_2=10+2\times2=14$，

$a_3=10+2\times3=16$，$a_4=10+2\times4=18$.

因此，数列的前 4 项是 12，14，16，18.

(2)数列的第 10 项是

$$a_{10}=10+2\times10=30.$$

(3)设该数列的第 n 项为 54，则

$$a_n=10+2n=54,$$

得

$$n=22.$$

因此，54 为该数列的第 22 项.

例 3　某水泥厂生产水泥，今年的产量为 18 万吨，由于技术改造，计划每年增产 15%，写出从今年开始 5 年内每年的产量排成的数列，并写出通项公式.

解　$a_1=18$；

$a_2=18\times(1+0.15)=18\times1.15$；

$a_3=18\times1.15\times(1+0.15)=18\times1.15^2$；

$a_4=18\times1.15^2\times(1+0.15)=18\times1.15^3$;

$a_5=18\times1.15^3\times(1+0.15)=18\times1.15^4$.

故该数列为

$18,18\times1.15,18\times1.15^2,18\times1.15^3,18\times1.15^4$.

其通项公式为

$$a_n=18\times1.15^{n-1},n\in\{1,2,3,4,5\}.$$

三、数列的前 n 项和

一般地,设有数列$\{a_n\}$,称 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}a$.

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \text{ 或 } \sum_{i=1}^{n}a.$$

由数列的通项 a_n 及前 n 项和 S_n 的概念不难得出:

$$a_1=S_1,$$

$$a_2=S_2-S_1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_n=S_n-S_{n-1}.$$

例 4 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=(-1)^n$,求其前 n 项和 S_n.

解 由通项公式 $a_n=(-1)^n$,写出数列$\{a_n\}$为

$$-1,1,-1,1,-1,1,-1,\cdots,$$

不难得到

$$S_n=\begin{cases}-1, n=2k-1,\\ 0, n=2k.\end{cases}\text{其中 } k\in\mathbf{Z}^+.$$

例 5 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2$,试求其通项 a_n.

解 当 $n=1$ 时,

$a_1=S_1=1^2=1$;

当 $n\geqslant2$ 时,

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$;

取 $n=1$ 时，得 $a_n=2n-1=1$，所以数列的通项公式为

$$a_n=2n-1.$$

课堂练习

1. 根据下列各数列的通项公式，写出数列的前5项：

(1) $a_n=10n$；　　(2) $a_n=3^n+1$；

(3) $a_n=5\times(-1)^{n+1}$.

2. 根据下列数列的前4项，写出数列的一个通项公式：

(1) 4, 9, 16, 25；　　(2) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$；

(3) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{12}$.

练习题 8-1

1. 已知下列各数列的通项公式，分别写出各数列的前5项：

(1) $a_n=5n+3$；　　(2) $a_n=n^3\cdot(-1)^{n-1}$；

(3) $a_n=\frac{2n+1}{2^n}$；　　(4) $a_n=\cos\frac{n\pi}{2}$.

2. 根据下列各数列的前5项，写出数列的一个通项公式：

(1) $\frac{1}{1\times2}, \frac{1}{2\times3}, \frac{1}{3\times4}, \frac{1}{4\times5}, \frac{1}{5\times6}$；

(2) $\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{4}, -\sqrt{5}, \sqrt{6}$；

(3) $\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}, \frac{6^2-1}{6}$.

3. 判断22是否为数列 $\{n^2-n-20\}$ 中的项，如果

是,请指出是第几项.

第二节　等差数列

一、等差数列的概念

将正整数中3的倍数从小到大排列,组成数列

$$3,6,9,12,15,\cdots;$$

将正偶数从小到大排列,组成数列

$$2,4,6,8,\cdots.$$

在第一个数列中,从第2项起,数列中的每一项与它前一项的差都为3;在第二个数列中,从第2项起,数列中的每一项与它前一项的差都为2.很显然,这两个数列有一个共同点:从数列的第2项起,数列中的每一项与它前一项的差都为常数.

想一想

如果等差数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公差为 d,那么数列 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1$ 是否为等差数列?如果是等差数列,则公差是多少?

一般地,如果数列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

从第2项起,每一项与它前一项的差都等于一个常数,那么,这个数列叫作**等差数列**.常数叫作等差数列的**公差**,一般用字母 d 表示.

由定义可知,若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,d 为公差,则 $a_{n+1}-a_n=d$,即

$$a_{n+1}=a_n+d. \tag{8-1}$$

在上面的例子中,两个数列都为等差数列,公差分别为3和2.

课堂练习

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,$a_6=8$,公差 $d=-2$,写出这个数列的第10项.

2. 写出等差数列 16,12,8,4,…的第 8 项.

二、等差数列的通项公式

设数列$\{a_n\}$为等差数列,且公差为 d,则

$$a_1=a_1,$$
$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
……

由此可知,首项为 a_1,公差为 d 的等差数列的通项公式为

$$a_n=a_1+(n-1)d. \qquad (8\text{-}2)$$

例 1　已知等差数列的首项为 2,公差为-3,试写出这个数列的通项公式,并求出这个数列的第 5 项和第 10 项.

解　由于 $a_1=2,d=-3$,则通项公式为

$a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times(-3)=-3n+5$,

即 $a_n=-3n+5$. 因此

$$a_5=(-3)\times5+5=-10,$$
$$a_{10}=(-3)\times10+5=-25.$$

学习提示

在等差数列的通项公式中,其有四个量:a_1,d,n,a_n,只要知道其中的任意三个量,就可以求出另外一个量.

例 2　在等差数列$\{a_n\}$中,$a_{50}=25$,公差 $d=\dfrac{1}{7}$,求数列的首项 a_1.

解　设数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

将 $a_{50}=25,d=\dfrac{1}{7}$代入得

$$25=a_1+(50-1)\times\frac{1}{7},$$

解得 $a_1=18$.

例3 求等差数列10,6,2,…的第5项和第15项.

解 因 $a_1=10$,$d=a_2-a_1=6-10=-4$,所以该数列的通项公式为

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+(n-1)d=10+(n-1)\times(-4)\\&=-4n+14.\end{aligned}$$

该数列的第5项为

$$a_5=-4n+14=-4\times5+14=-6.$$

该数列的第15项为

$$a_{15}=-4n+14=-4\times15+14=-46.$$

例4 等差数列2,5,8,…的第几项是59?

解 因 $a_1=2$,$d=a_2-a_1=5-2=3$,所以该数列的通项公式为

$$\begin{aligned}a_n&=a_n+(n-1)d=2+(n-1)\times3\\&=3n-1.\end{aligned}$$

设该数列的第 n 项等于59,则

$$a_n=3n-1=59,$$

解得 $$n=20.$$

因此,该数列的第20项为59.

例5 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_9=38$,公差 $d=5$,求首项 a_1.

解 因 $d=5$,故设等差数列的通项公式为

$$a_n=a_1+5(n-1).$$

因 $a_9=38$,故

$$a_1+5\times(9-1)=38,$$

解得 $$a_1=-2.$$

课堂练习

1. 下列数列是否为等差数列,若是等差数列求出公

差和通项公式：

(1)$-2,2,6,10,14,\cdots$；

(2)$1,4,16,64,256,\cdots$；

(3)$3,3,3,3,3,\cdots$；

(4)$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$.

2. 求等差数列 $10,7,4,1,\cdots$ 的公差、通项公式及第 15 项.

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=-3$，$a_9=-15$，判断-48是否为数列中的项，如果是，请指出是第几项.

三、等差数列的前 n 项和

一般地，设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和是 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n, \qquad (8\text{-}3)$$

也可以写作

$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_3+a_2+a_1. \qquad (8\text{-}4)$$

将(8-3)式和(8-4)式两边相加，得

$$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_{n-2}+a_3)+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1).$$

又由于

$$a_1+a_n=a_n+a_1,$$

$$a_2+a_{n-1}=(a_1+d)+(a_n-d)=a_1+a_n,$$

$$a_3+a_{n-2}=(a_1+2d)+(a_n-2d)=a_1+a_n,$$

……

因此，得

$$2S_n=n(a_1+a_n).$$

由此,得到等差数列$\{a_n\}$的前n项和公式为

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}, \qquad (8\text{-}5)$$

即等差数列前n项的和等于首末两项之和与项数乘积的一半.

又由于$a_n=a_1+(n-1)d$,所以前n项和S_n又可以表示为

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d. \qquad (8\text{-}6)$$

想一想

在实际应用时,应如何对公式(8-5)和(8-6)进行选择?

例6 在等差数列$\{a_n\}$中,

(1)$a_1=1, a_{20}=20$,求S_{20};

(2)$a_1=2, d=-2$,求S_{20}.

解 (1)由已知条件可知,应选择公式(8-5).

因为$a_1=1, a_{20}=20, n=20$,所以

$$S_{20}=\frac{n(a_1+a_{20})}{2}=\frac{20\times(1+20)}{2}=210.$$

(2)由已知条件可知,应选择公式(8-6).

因为$a_1=2, d=-2, n=20$,所以

$$S_{20}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

$$=20\times2+\frac{20\times(20-1)}{2}\times(-2)=-340.$$

例7 等差数列

$$10,6,-2,2,\cdots$$

的前多少项和等于-80?

解 设数列的前n项和是-80,由于$a_1=10, d=6-10=-4$,故

$$-80=10n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-4),$$

即

$$n^2-6n-40=0,$$

解得

$$n_1=10, n_2=-4\text{(舍去)}.$$

所以,该数列的前 10 项和等于-80.

课堂练习

1. 求等差数列 1, 5, 9,…的前 50 项的和.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_4=6$,$a_9=26$,求数列前 20 项的和 S_{20}.

练习题 8-2

1. 写出等差数列

$$\frac{1}{5},\frac{3}{5},1,\frac{7}{5},\cdots$$

的通项公式,并求出数列的第 10 项.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中,

(1)$a_5=-1$,$a_8=2$,求 a_1 和 d;

(2)$a_1=12$,$a_6=27$,求 d;

(3)$d=-\frac{1}{3}$,$a_7=8$,求 a_1.

3. 根据下列各题的条件,求相应等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n:

(1)$a_1=5$,$a_n=85$,$n=15$;

(2)$a_1=10$,$d=2$,$n=25$;

(3)$a_3=15$,$a_9=-9$,$n=10$.

4. 根据下列条件,求相应等差数列$\{a_n\}$的有关未知数:

(1)$d=-2$,$n=8$,$S_n=0$,求 a_1 和 a_n;

(2)$a_1=1$,$d=4$,$S_n=45$,求 n 和 a_n.

第三节　等比数列

一、等比数列的概念

我国古代著名学者庄子曾提出“一尺之锤，日取其半，万世不竭”．用现代语言叙述应是：一尺长的木棒，每日取其一半，永远取不完．这样，每日剩下的部分都是前一日的一半．如果把“一尺之锤”看做是单位“1”，那么就可以得到一个数列

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots.$$

从上面的例子中看到，数列中的每一项与它的前一项的比都等于$\frac{1}{2}$．

想一想

如果等比数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公比为 q，那么数列 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1$ 是否为等比数列？如果是等比数列，则公比是多少？

一般地，如果一个数列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

从第2项起，每一项与它前一项的比都等于一个非零的常数，那么这个数列叫作**等比数列**．非零常数叫作等比数列的**公比**，一般用字母 q 来表示．

由定义可知，若数列$\{a_n\}$为等比数列，公比为 q，则 a_1 与 q 均不为零，且有$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，即

$$a_{n+1}=a_n\cdot q. \tag{8-7}$$

例1　在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$q=2$，求 a_2,a_3,a_4,a_5．

解　$a_2=a_1\cdot q=3\times2=6$，$a_3=a_2\cdot q=6\times2=12$，

$a_4=a_3\cdot q=12\times2=24$，

$a_5=a_4\cdot q=24\times2=48$．

课堂练习

1. 指出下列数列是否为等比数列，若是等比数列求出其公比和通项公式：

(1)$-\frac{1}{2}, 1, -2, 4, \cdots$；

(2)$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \cdots$.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=-6$，$q=2$，求 a_4，a_5 和 a_6.

二、等比数列的通项公式

设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，则

$$a_2=a_1 \cdot q,$$
$$a_3=a_2 \cdot q=(a_1 \cdot q) \cdot q=a_1 \cdot q^2,$$
$$a_4=a_3 \cdot q=(a_1 \cdot q^2) \cdot q=a_1 \cdot q^3,$$
……

由此可知，首项为 a_1，公比为 q 的等比数列的通项公式为

$$a_n=a_1 \cdot q^{n-1}. \tag{8-8}$$

例 2　已知等比数列$\{a_n\}$的首项是 2，公比 $q=-2$，求数列的第 5 项.

解　根据等比数列的通项公式 $a_n=a_1 \cdot q^{n-1}$，得

$$a_5=a_1 \cdot q^{5-1}=2\times(-2)^4=32.$$

想一想

在等比数列$\{a_n\}$中，a_3 是不是 a_1 和 a_5 的等比中项？

例 3　已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=-2$，$a_5=-32$，求公比 q.

解 因为 $a_1=-2, a_5=-32$,所以

$$(-2)\times q^{5-1}=-32,$$

即 $q^4=16$,解得

$$q=\pm 2.$$

一般地,如果在 a 和 b 之间插入一个数 c,使得 a,c,b 成等比数列,那么 c 叫作 a 与 b 的**等比中项**.

如果 c 是 a 与 b 的等比中项,那么 $\frac{c}{a}=\frac{b}{c}$,即 $c^2=ab$,所以

$$c=\pm\sqrt{ab}\ (ab>0).$$

由等比中项的定义可知,在一个等比数列中,从第 2 项起,每一项(有穷等比数列的最后一项除外)都是它前一项与后一项的等比中项.

例 4 求等比数列 4,−2,1,…的第 7 项.

解 这里 $a_1=4, q=-\frac{1}{2}$,故等比数列的通项公式为

$$a_n=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

因此,$a_7=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{7-1}=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{6}=\frac{1}{16}$.

例 5 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=-2, q=3$,问第几项是−162?

解 由 $a_1=-2, q=3$ 知,等比数列的通项公式为

$$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}.$$

设数列的第 n 项是−162,则

$$-162=(-2)\times 3^{n-1},$$

化简,得 $$81-3^{n-1},$$

即 $$3^4=3^{n-1},$$

故 $$n=5.$$

因此,该数列的第 5 项是−162.

例 6　已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=\frac{4}{3}$，$a_5=\frac{1}{6}$，求 a_8.

解　设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，则由题意可列方程组

$$\begin{cases} a_1\cdot q=\frac{4}{3}, \\ a_1\cdot q^4=\frac{1}{6}. \end{cases}$$

解得

$$a_1=\frac{8}{3}, q=\frac{1}{2}.$$

因此

$$a_8=a_1\cdot q^7=\frac{8}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{48}.$$

课堂练习

1. 求等比数列$\frac{1}{3}$，1，3，…的通项公式和第 8 项.

2. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=-\frac{1}{25}$，$a_5=-5$，求等比数列的通项公式，并判断-125是否为数列中的项，如果是，指出是第几项.

3. 求下列各组数的等比中项：

(1)80，45；　　　　(2)$\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

三、等比数列的前 *n* 项和

下面研究如何求等比数列的前 n 项和.

一般地，设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n,$$

根据等比数列的通项公式 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$，上式可以写为

$$S_n=a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1},\qquad(8\text{-}9)$$

将(8-9)式的两边同时乘以公比 q,得

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n,\qquad(8\text{-}10)$$

(8-9)−(8-10)得

$$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n.$$

因此得到,当 $q\neq1$ 时,等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式为

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq1).\qquad(8\text{-}11)$$

又由于 $a_1q^n=(a_1q^{n-1})q=a_nq$,所以式(8-11)还可以写为

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq1).\qquad(8\text{-}12)$$

当 $q=1$ 时,等比数列的各项都相等,此时数列前 n 项和为 $S_n=na_1$.

学习提示

在求等比数列的前 n 项和时,一定要先判断公比 q 是否为1.

例7 求等比数列$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$的前 n 项和公式,并求出数列的前8项和.

解 因为 $a_1=\frac{1}{2}$,$q=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\neq1$,所以根据公式(8-11)得等比数列前 n 项和公式为

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

所以 $$S_8=1-\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{255}{256}.$$

课堂练习

1. 求等比数列$\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},\cdots$的前 n 项和公式,并求出

数列的前10项和.

2. 已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q=2$，$S_4=1$，求a_1和S_{10}.

练习题 8-3

1. 填空题：

(1)在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{9}{8}$，$a_n=\frac{1}{3}$，$q=\frac{2}{3}$，则$n=$________.

(2)已知等比数列$a_n=2^{n-2}$，则$a_1\cdot a_2=$________，$a_3\cdot a_4=$________.

2. 写出等比数列$\frac{8}{3}$，4，6，…的通项公式，并写出它的第5项到第8项.

3. 等比数列$\{a_n\}$的首项是16，公比是$\frac{1}{4}$，写出它的通项公式，并求出第6项.

4. 根据下列各题的条件，求相应等比数列$\{a_n\}$的前n项和S_n：

(1)$a_1=3$，$q=2$，$n=6$；(2)$a_1=1$，$q=2$，$a_n=1\ 024$.

5. 等比数列$\{a_n\}$的首项是3，公比是-2，求其前6项的和.

第四节　数列实际应用举例

在生活实践中，有很多实际问题都可以转化为数列问题，然后用数列的知识求解.

一、等差数列简单应用

例1 安装在一个公共轴上的5个皮带轮的直径成等差数列，其中最大的与最小的皮带轮的直径分别是216 mm与120 mm，求中间3个皮带轮的直径.

解 用$\{a_n\}$表示这5个皮带轮的直径所成的等差数列，由已知条件，有

$$a_1=216, a_5=120,$$

由通项公式，得

$$a_5=a_1+(5-1)d,$$

即

$$120=216+4d,$$

解得

$$d=-24.$$

因此

$a_2=216-24=192, a_3=192-24=168,$

$a_4=168-24=144.$

所以中间3个皮带轮的直径依次是

$$192\ \text{mm}, 168\ \text{mm}, 144\ \text{mm}.$$

例2 已知一个直角三角形的3条边的长度成等差数列，求证它们的比是3∶4∶5.

证明 设这个直角三角形的3条边长分别为

$$a-d, a, a+d,$$

根据勾股定理，得

$$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2.$$

解得

$$a=4d,$$

于是这个直角三角形的三边长是$3d, 4d, 5d$. 即这个直角三角形三边长的比是3∶4∶5.

例3　银行有一种储蓄业务叫作零存整取，即每月定时存入一笔相同数目的现金，到约定日期可以一起取出全部本利和（本金与利息之和）. 若某人每月初存入100元，银行以年利率2.25%计息，试问年终结算时本利和是多少？

解　若年利率为2.25%，则折合月利率为0.187 5%.

年终结算时：

第1个月的存款利息为 $100\times0.187\,5\%\times12$，本利和为 $100+100\times0.187\,5\%\times12$；

第2个月的存款利息为 $100\times0.187\,5\%\times11$，本利和为 $100+100\times0.187\,5\%\times11$；

第3个月的存款利息为 $100\times0.187\,5\%\times10$，本利和为 $100+100\times0.187\,5\%\times10$；

……

第12个月的存款利息为 $100\times0.187\,5\%\times1$，本利和为 $100+100\times0.187\,5\%\times1$.

因此，每月存入100元的到期本利和构成一个等差数列，设为 $\{a_n\}$，则 $n=12$，

$$a_1=100+100\times0.187\,5\%\times12=102.25,$$

$$a_n=100+100\times0.1875\%\times1=100.187\,5,$$

所以

$$\begin{aligned}S_{12}&=\frac{n(a_1+a_{12})}{2}\\&=\frac{12\times(102.25+100.187\,5)}{2}\\&=1\,214.625.\end{aligned}$$

答：年终结算时本利和是1 214.625元.

二、等比数列简单应用

例4　某林场今年计划造林10公顷，此后每一年比上一年多造林10%，那么从今年起，几年内可以使林场

造林达到 60 公顷?(结果保留整数)

解 因为今年计划造林 10 公顷,第二年计划造林 $10+10\times10\%=10\times(1+10\%)$,第三年计划造林 $10\times(1+10\%)+10\times(1+10\%)\times10\%=10\times(1+10\%)^2$,…,由此可知,每年计划造林的公顷数构成一个等比数列,设为$\{a_n\}$,则 $a_1=10$,$q=1+10\%=1.1$,$S_n=60$,所以

$$\frac{10\times(1-1.1^n)}{1-1.1}=60,$$

解得 $n\approx5$.

答:5 年内可以使林场造林达到 60 公顷.

练习题 8-4

1. 银行给某工厂无息贷款 36 000 元,还款方式是一年后的第一个月还 1 000 元,以后每月比前一个月多还 200 元,请问需要多少个月才能全部还清贷款?

2. 某城市 2010 年的生产总值为 100 亿元,如果年增长率保持 8%,试问多少年后该城市的生产总值翻一番?(结果保留整数)

*第五节 数学归纳法

数学归纳法是一种特殊的证明方法,主要用于研究与正整数有关的数学问题. 例如,对于数列$\{a_n\}$,已知 $a_1=1$,$a_{n+1}=2a_n$($n=1,2,3,\cdots$),通过对前四项的归纳,可以猜想出其通项公式为 $a=2^{n-1}$. 但是,我们只能肯定这个猜想对于前四项是成立的,而数列$\{a_n\}$的项数有无限多个,不可能对其进行逐一验证,那么怎样才能证明这个猜想呢?

对于多米诺骨牌游戏，大家都不陌生，这是一种码放骨牌的游戏.码放骨牌时要注意每两块牌之间要有一个合适的距离，以保证后一块牌能因前一块牌倒下而倒下.这样只要推倒第一块骨牌，就可导致第二块骨牌倒下；而第二块骨牌倒下，就可导致第三块骨牌倒下；……；最后，无论有多少块骨牌都能全部倒下.

可以看出，只要满足以下两个条件，所有多米诺骨牌都能全部倒下：

(1)第一块骨牌倒下；

(2)任意相邻的两块骨牌，前一块倒下一定导致后一块倒下.

其中条件(2)给出一个递推关系：

当第 k 块倒下时，相邻的第 $k+1$ 块也倒下.

这样，无论有多少块骨牌，只要第一块骨牌倒下，通过条件(2)给出的递推关系，其他所有的骨牌就能够相继倒下.

同理，对于上面提到的数列 $\{a_n\}$，当 $n=1$ 时，$a_1=2^{1-1}=1$，猜想成立，这就相当于游戏的条件(1)；类比条件(2)，可以尝试证明数列 $\{a_n\}$ 是否满足递推关系：

如果 $n=k$ 时猜想成立，即 $a_k=2^{k-1}$，那么 $n=k+1$ 时猜想也成立，即 $a_{k+1}=2^{(k+1)-1}$.

事实上，如果 $a_k=2^{k-1}$，那么

$$a_{k+1}=2a_k=2\times 2^{k-1}=2^{(k+1)-1},$$

即 $n=k+1$ 时，猜想也成立.

这样，对于猜想，当 $n=1$ 时成立，就有 $n=2$ 时也成立；当 $n=2$ 时成立，就有 $n=3$ 时也成立；当 $n=3$ 时成立，就有 $n=4$ 时也成立……；所以，对于任意的正整数 n，猜想都成立，即数列的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$.

一般地，证明一个与正整数有关的命题，可按下列步骤进行：

(1)证明当 n 取第一个值 n_0($n_0\in N^*$)时,命题成立;

(2)假设 $n=k$($n\geqslant n_0$,$k\in N^*$)时命题成立,证明当 $n=k+1$ 时命题也成立.

学习提示

步骤(1)是奠基步骤,是论证命题的基础;步骤(2)是归纳步骤,是推理的依据,是判断命题是否由特殊推广到一般的依据,它反映了无限递推关系.

根据以上两个步骤,就可以断定命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立,这种证明方法称为数学归纳法.应用数学归纳法,可以对许多数学猜想进行验证,如哥德巴赫猜想、费马猜想、四色猜想等.

应用数学归纳法证明与正整数有关的命题的步骤可用框图表示,如图 8-1 所示.

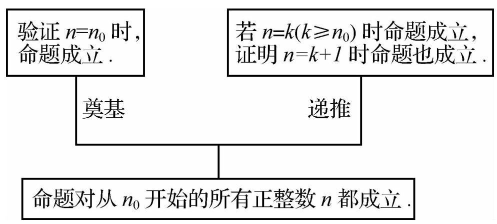

图 8-1

例 1 用数学归纳法证明:如果数列$\{a_n\}$是一个等差数列,公差为 d,那么 $a_n=a_1+(n-1)d$ 对任意$n\in N^*$都成立.

证明 (1)当 $n=1$ 时,左边$=a_1$,右边$=a_1+(1-1)d=a_1$,等式成立.

(2)假设 $n-k$($k\geqslant 1$,$k\in N^*$)时,等式成立,即

$$a_k=a_1+(k-1)d,$$

那么,当 $n=k+1$ 时,由于

$$a_{k+1}=a_k+d,$$

则

$$a_{k+1}=a_k+d=a_1+(k-1)d+d=a_1+[(k+1)-1]d,$$

即当 $n=k+1$ 时,等式也成立.

综上所述,等差数列 $a_n=a_1+(n-1)d$ 对任意 $n\in N^*$ 都成立.

例 2　用数学归纳法证明：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证明　(1)当 $n=1$ 时，左边 $=1^2=1$，右边 $=\frac{1\times2\times3}{6}=1$，等式成立.

(2)假设 $n=k(k\geqslant1,k\in N^*)$时，等式成立，即

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

那么，当 $n=k+1$ 时，则

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\=&\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\=&\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\=&\frac{k(k+1)(2k^2+uk+6)}{6}\\=&\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\=&\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

综上所述，等式对任意 $n\in N^*$ 都成立.

例 3　用数学归纳法证明：x^n-y^n 能被 $x-y$ 整除.

证明　(1)当 $n=1$ 时，$x-y$ 能被 $x-y$ 整除.

(2)假设 $n=k(k\geqslant1,k\in N^*)$时，$x^k-y^k(k\in N^*)$能被 $x-y$ 整除，那么，当 $n=k+1$ 时，则

$$\begin{aligned}x^{k+1}-y^{k+1}&=x\cdot x^k-y\cdot y^k\\&=x\cdot x^k-x\cdot y^k+x\cdot y^k-y\cdot y^k\\&=x(x^k-y^k)+y^k(x-y).\end{aligned}$$

因为 x^k-y^k 与 $x-y$ 都能被 $x-y$ 整除，故当 $n=k+1$ 时，$x^{k+1}-y^{k+1}$ 也能被 $x-y$ 整除.

综上所述，命题对任意 $n\in N^*$ 都成立.

课堂练习

用数学归纳法证明：n^3+5n 能被 6 整除.

练习题 8-5

1. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1$，而 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，

(1)计算这个数列的前 5 项；

(2)根据(1)的结果猜想这个数列的通项公式；

(3)用数学归纳法证明你的猜想.

2. 用数学归纳法证明：

(1)$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$；

(2)$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$；

(3)$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

3. 用数学归纳法证明：$3^{4n+2}+5^{2n+1}$能被 14 整除.

复习题 8

A 组

1. 选择题:

(1)等差数列的通项公式为 $a_n=3n-2$，则前 20 项的和 $S_{20}=$(　　).

A. 390　　B. 590

C. 780　　D. 295

(2)在等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=2$，$a_5=6$，则$a_8=$(　　).

A. 10　　B. 12

C. 18　　D. 24

(3)等差数列$-\frac{7}{2}$，-3，$-\frac{5}{2}$，-2，…的第$n+1$项为(　　).

A. $\frac{n-7}{2}$　　B. $\frac{n-4}{2}$

C. $\frac{n}{2}-4$　　D. $\frac{n}{2}-7$

(4)已知$\sqrt{3}$，$a-1$，$3\sqrt{3}$成等比数列，则$a=$(　　).

A. 3　　B. 3或-3

C. 4或-2　　D. -3

2. 填空题：

(1)数列0，3，8，15，…的一个通项公式是________.

(2)数列$\{a_n\}$是等比数列，$a_1=1$，$q=3$，则$a_6=$________.

(3)一个数列的通项公式是$a_n=n(n-1)$，则$a_{11}=$________，$a_{20}=$________，56是这个数列的第________项.

3. 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_6=33$，求S_{20}.

4. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_5=\frac{3}{4}$，$q=-\frac{1}{2}$，求S_7.

5. 某工厂去年的产值为138万元，计划在今后5年内每年比上一年产值增长10%，则这5年的总产值是多少？(精确到万元)

B　组

1. 在等差数列中，已知$d=2$，且$a_2+a_4+a_6+\cdots+$

$a_{100}=80$,求数列前100项的和.

2.已知等比数列$\{a_n\}$的前3项和为$-\frac{3}{5}$,前6项和为$\frac{21}{5}$,求数列$\{a_n\}$前10项的和.

阅读材料

斐波那契数列

一、斐波那契数列的定义

“斐波那契数列”的发明者是意大利数学家列昂纳多·斐波那契(Leonardo Fibonacci,1175—1250).斐波那契数列指的是这样一个数列:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots.$$

这个数列从第三项开始,每一项都等于前两项之和.它的通项公式为:$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$,又叫“比内公式”,是用无理数表示有理数的一个范例.这样一个完全是自然数的数列,通项公式居然是用无理数来表达的.

二、奇妙的属性

随着数列项数的增加,前一项与后一项之比越来越逼近黄金分割的数值0.618 033 988 7….

从第二项开始,每个奇数项的平方都比前后两项之积多1,每个偶数项的平方都比前后两项之积少1.

斐波那契数列$f(n)$:$f(0)=0$,$f(1)=1$,$f(2)=1$,$f(3)=2$,…的其他性质:

1. $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=f(n+2)-1$;
2. $f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(2n-1)=f(2n)$;
3. $f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(2n)=f(2n+1)-1$;
4. $[f(0)]^2+[f(1)]^2+\cdots+[f(n)]^2=f(n)\cdot f(n+$

1)；

5. $f(0)-f(1)+f(2)-\cdots+(-1)^n f(n)$

$=(-1)^n[f(n+1)-f(n)]+1$；

6. $f(m+n-1)=f(m-1)f(n-1)+f(m)f(n)$；

7. $[f(n)]^2=(-1)^{n-1}+f(n-1)f(n+1)$；

8. $f(2n-1)=[f(n)]^2-[f(n-2)]^2$；

9. $3f(n)=f(n+2)+f(n-2)$；

10. $f(2n-2m-2)[f(2n)+f(2n+2)]$

$=f(2m+2)+f(4n-2m)$ $(n>m\geqslant -1$，且 $n\geqslant 1)$.

在杨辉三角中隐藏着斐波那契数列

1

1　1

1　2　1

1　3　3　1

1　4　6　4　1

……

过第一行的"1"向左下方做 45 度斜线，之后作直线的平行线，将每条直线所过的数加起来，即得一数列 1，1，2，3，5，8，….

三、斐波那契数列别名

斐波那契数列又因数学家列昂纳多・斐波那契以兔子繁殖为例子而引入，故又称为"兔子数列".

一般而言，兔子在出生两个月后，就有繁殖能力，一对兔子每个月能生出一对小兔子来. 如果所有兔子都不死，那么一年以后可以繁殖多少对兔子？

我们不妨拿新出生的一对小兔子分析一下：

第一个月小兔子没有繁殖能力，所以还是一对；

两个月后，生下一对小兔子，总数共有两对；

三个月以后，老兔子又生下一对，因为小兔子还没

有繁殖能力,所以一共是三对;

……

依次类推可以列出下表:

经过月数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
兔子对数	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

表中数字 1,1,2,3,5,8,…构成了一个斐波那契数列.

四、斐波那契数学游戏

一位魔术师拿着一块边长为 8 英尺(1 英尺＝0.304 8 米,下同)的正方形地毯,对他的地毯匠朋友说:“请您把这块地毯分成四小块,再把它们缝成一块长 13 英尺,宽 5 英尺的长方形地毯.”这位地毯匠对魔术师算术之差深感惊异,因为两者之间面积相差达 1 平方英尺呢! 可是魔术师竟让匠师用图 1 和图 2 的办法达到了他的目的.

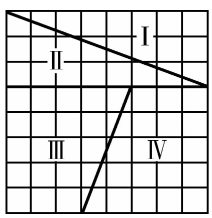

图 1

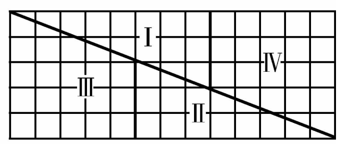

图 2

这真是不可思议的事! 亲爱的读者,你猜得到那神奇的 1 平方英尺究竟跑到哪儿去了吗? 实际上后来缝成的地毯有条细缝,面积刚好就是 1 平方英尺.