第二章　不等式

现实世界与日常生活中既存在相等关系，又存在不等关系，比如早上和傍晚的影子比中午的长，太阳比月亮离地球远，三角形两边和大于第三边等. 其实与相等关系相比，不等关系更为普遍.

本章将研究不等式的概念、性质，一元一次不等式、一元一次不等式组以及一元二次不等式、绝对值不等式，分式的解法，并通过解决一些简单的实际问题来体会不等式在现实生活中的应用.

第一节　不等式的概念与性质

一、不等式的概念

用等号（$=$）连接两个代数式所成的式子称之为等式，比如 $2+3=5$，$2x+1=3$ 等都是等式.

那么什么是不等式呢？

很明显，用不等号（$>$，$\geqslant$，$<$，$\leqslant$，$\neq$）连接两个代数式所成的式子叫作不等式.

比如 $5+2<8$，$3x-1>4$，$4a-2\neq 6$ 等都是不等式.

例 1　用不等式表示下列关系：

(1) x 与 2 的和大于 3；

(2) 实数 a 乘以 b 小于等于 5；

(3) 任意一个实数 a 的平方为非负数.

解 (1)$x+2>3$;

(2)$ab\leqslant 5$;

(3)$a^2\geqslant 0$.

例 2 比较 $3x^2-2x+5$ 与 $3x^2-2x-1$ 的大小.

解 $\because$ $(3x^2-2x+5)-(3x^2-2x-1)=6>0$

$\therefore$ $3x^2-2x+5>3x^2-2x-1$.

课堂练习

1.用不等式比较下列关系:

(1)a 与 2 的差比它的 3 倍大;

(2)实数 a 和实数 b 的平方和不小于它们的乘积的 2 倍;

(3)设三角形的三边长分别为 a,b,c,任意两边之和大于第三边.

2.比较 x^2-3x+4 与 x^2-3x-6 的大小.

二、实数大小的比较

如果没有任何度量工具,怎么才能知道高矮差不多的两个同学的身高之间的不等关系呢?我们一般采用的比较方法是让这两个同学背靠背地站在同一高度的地面上,这时两个同学谁高谁低一看便知.在数学中,我们比较两个实数的大小,只要考察它们的差即可.

对于任意两个实数 a、b,有

$$a-b>0\Leftrightarrow a>b;$$

$$a-b<0\Leftrightarrow a<b;$$

$$a-b=0\Leftrightarrow a=b.$$

例 3　比较$\frac{1}{2}$与$\frac{2}{3}$的大小.

解　$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{3-4}{6}=-\frac{1}{6}$,

因为$-\frac{1}{6}<0$,所以$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$.

思考与讨论

已知实数 a、b,且 $a>b>0$,试比较 a^2b 与 ab^2 的大小.

课堂练习

1. 比较$\frac{2}{3}$与$\frac{3}{5}$的大小.

2. 用符号“>”或“<”填空:

(1)$\frac{5}{6}\underline{\qquad}\frac{3}{4}$;　　(2)$-\frac{13}{14}\underline{\qquad}-\frac{12}{13}$;

(3)$\frac{2}{3}\underline{\qquad}\frac{5}{8}$;　　(4)$1\frac{3}{5}\underline{\qquad}1.63$.

三、不等式的基本性质

在初中我们已经学习了不等式的三条基本性质,本小节将进一步阐述并证明不等式的基本性质.

性质 1　如果 $a>b$,且 $b>c$,则 $a>c$.

证明

$$a>b\Leftrightarrow a-b>0,$$

$$b>c\Leftrightarrow b-c>0,$$

因此,根据两正数之和为正数得

$$(a-b)+(b-c)>0,$$

即

$$a-c>0,$$

所以

$$a>c.$$

性质 1 所描述的不等式的性质称为不等式的**传递性**.

性质2 如果$a>b$,则$a+c>b+c$.

证明 因为$a>b$,所以$a-b>0$.

又因为 $(a+c)-(b+c)=a-b>0$,

所以 $$a+c>b+c.$$

性质2表明,不等式两边都加上(或都减去)同一个数,不等号的方向不变,因此将性质2称为不等式的**加法性质**.

想一想

性质3怎么证明呢?

性质3 如果$a>b$,$c>0$,则$ac>bc$;如果$a>b$,$c<0$,则$ac<bc$.

性质3表明,不等式的两边都乘以(或都除以)同一个正数,不等号的方向不变;不等式的两边都乘以(或都除以)同一个负数,不等号的方向改变.因此将性质3称为不等式的**乘法性质**.

例4 用"$>$"或"$<$"填空,并指出应用了不等式的哪条性质:

(1)已知$a<b$,则$a+3$ ____ $b+3$;

(2)已知$a>b$,则$2a$ ____ $2b$;

(3)已知$a>b$,则$-2a$ ____ $-2b$.

解 (1)$a+3<b+3$,应用了不等式的性质2.

(2)$2a>2b$,应用了不等式的性质3.

(3)$-2a<-2b$,应用了不等式的性质3.

例5 证明下列不等式:

(1)已知$a>b$,$c>d$,求证$a+c>b+d$;

(2)已知$a>b>0$,$c>d>0$,求证$ac>bd$.

证明 (1)因为$a>b$,所以

$$a+c>b+c,$$

又因为$c>d$,所以

$$b+c>b+d.$$

根据不等式的传递性可得

$$a+c>b+d.$$

(2)因为 $a>b$,$c>0$,所以

$$ac>bc,$$

又因为 $c>d$,$b>0$,所以

$$bc>bd.$$

因此,根据不等式的传递性可得

$$ac>bd.$$

例 6　某工人计划在 15 天里加工 408 个零件,最初三天每天加工 24 个,问以后每天至少要加工多少个零件,才能在规定的时间内完成任务?

解　设该工人在以后每天至少加工 x 个零件才能在规定的时间内完成任务,则根据题意有

$$24\times 3+(15-3)x\geqslant 408,$$

解得

$$x\geqslant 28,$$

即该工人以后每天至少加工 28 个零件才能在规定的时间内完成任务.

练习题 2-1

1.用“>”或“<”填空:

(1)$\frac{5}{6}$____$\frac{3}{4}$;

(2)$-\frac{3}{4}$____$-\frac{2}{3}$;

(3)已知 $a<b$,则 $-a$ ____ $-b$;

(4)已知 $a<b$,$c>0$,则 $d+ac$ ____ $d+bc$.

2.已知李红比王丽大 2 岁,又知李红和王丽年龄之和大于 30 且小于 33,求李红的年龄.

3.已知 $a>b$,$c>d$,能否判断出 ac 与 bd 的大小呢?试举例说明.

第二节 区间

区间是数集的一种表示形式,其表示形式与集合的表示形式相同.

一、有限区间

我们知道,实数集是与数轴上的点集一一对应的,如集合$\{x \mid 1<x<3\}$可以在数轴上表示如图2-1所示.

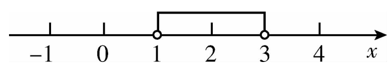

图2-1

由数轴上两点之间的所有实数所组成的集合叫作**区间**,这两个点叫作**区间端点**.

不含端点的区间叫作**开区间**,如图2-1中,集合$\{x \mid 1<x<3\}$即表示的是开区间,记作$(1,3)$.其中1表示区间的左端点,3表示区间的右端点.在数轴上表示区间时,开区间的两个端点用空心点表示(见图2-1).

含有两个端点的区间叫作**闭区间**,如图2-2中,集合$\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$表示的区间即为闭区间,记作$[1,3]$.在数轴上表示闭区间时,其两个端点用实心点表示.

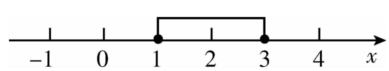

图2-2

只含左端点的区间叫作**右半开区间**,如集合$\{x \mid 1\leqslant x<3\}$表示的区间即为右半开区间,记作$[1,3)$;只含右端点的区间叫作**左半开区间**,如集合$\{x \mid 1<x\leqslant 3\}$表示的区间即为左半开区间,记作$(1,3]$.

例 1　已知集合 $A=(0,3)$，$B=[1,5)$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

解　集合 A、B 用数轴表示如图 2-3 所示，由图可看出

$$A\cup B=(0,5),A\cap B=[1,3).$$

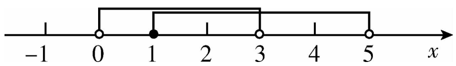

图 2-3

课堂练习

已知集合 $A=[-1,3)$，$B=(0,5)$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

二、无限区间

集合 $\{x\mid x>3\}$ 可在数轴上表示如图 2-4 所示.

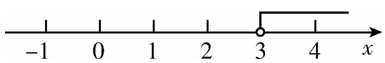

图 2-4

由图 2-4 可以看出，集合 $\{x\mid x>3\}$ 表示的区间的左端点为 3，没有右端点，这时可将其记作 $(3,+\infty)$，其中“$+\infty$”读作“正无穷大”，表示右端点可以没有具体的数，可以任意大. 同样，集合 $\{x\mid x<3\}$ 表示的区间可记作 $(-\infty,3)$，其中“$-\infty$”读作“负无穷大”.

集合 $\{x\mid x\geqslant 3\}$ 表示的区间为 $[3,+\infty)$，是右半开区间；集合 $\{x\mid x\leqslant 3\}$ 表示的区间为 $(-\infty,3]$，是左半开区间.

由上可以看出，一般可以用区间来表示的集合用区间表示会更方便.

例 2　已知全集为实数集 $\mathbf{R}$，集合 $A=(-\infty,4)$，

学习提示

“$+\infty$”与“$-\infty$”只是符号，而不是表示具体的数.

想一想

将实数集 $\mathbf{R}$ 看成一个大区间，怎么用区间来表示呢？表示出的是闭区间还是开区间？

$B=[1,6)$,求:

(1)$A\cup B$,$A\cap B$;(2)$\complement_A$,$\complement_B$;(3)$B\cap\complement_A$.

解 集合 A、B 在数轴上表示如图 2-5 所示.

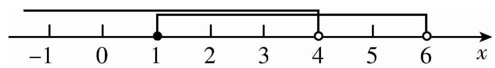

图 2-5

由图可看出:

(1)$A\cup B=(-\infty,6)$,$A\cap B=[1,4)$.

(2)$\complement_A=[4,+\infty)$,$\complement_B=(-\infty,1)\cup[6,+\infty)$.

(3)$B\cap\complement_A=[4,6)$.

课堂练习

1. 已知集合 $A=(-\infty,2]$,$B=(-\infty,4)$,求 $A\cap B$,$A\cap B$.

2. 设全集为 R,集合 $A=(0,3]$,$B=(2,+\infty)$,求

(1)$\complement_A$,$\complement_B$;(2)$A\cap\complement_B$.

练习题 2-2

1. 用适当的区间表示下面的集合,并将其填入空格中:

(1)$\{x\mid 3<x<9\}$可以写成________;

(2)$\{x\mid 1\leqslant x<5\}$可以写成________;

(3)$\{x\mid x\leqslant -1\}$可以写成________;

(4)$\{x\mid x>5\}$可以写成________.

2. 已知集合 $A=[-1,2)$,$B=(0,3]$,求 $A\cup B$,$A\cap B$.

3. 已知集合 $A=(-\infty,3)$,$B=(1,+\infty)$,求 $A\cup B$,$A\cap B$.

4. 已知全集为实数集 **R**，集合 $A=(-\infty,-1]$，$B=[-5,+\infty)$，求：

(1) $A\cup B$，$A\cap B$；

(2) $\complement A$，$\complement B$；

(3) $A\cap\complement B$，$B\cap\complement A$.

第三节　一元二次不等式及解法

观察下面两个不等式：

(1) $x^2-2x+1>0$；

(2) $x^2-3x+10\leqslant0$.

可以看出，这两个不等式的共同特点是：

(1) 都只含一个未知数 x；

(2) 未知数 x 的最高次数都是 2.

一般地，像上述那样，含有一个未知数，并且未知数的最高次数是二次的不等式，叫作**一元二次不等式**，它的一般形式为

$$ax^2+bx+c>(\geqslant)0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<(\leqslant)0,$$

其中，a、b、c 为常数，且 $a\neq0$.

上述一元二次不等式的一般形式的左边恰好是自变量为 x 的一元二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的解析式. 下面我们将通过实例来研究一元二次不等式的解法，以及它与相应的函数、方程之间的关系.

例如，求不等式

$$x^2-x-2>0 \text{ 与 } x^2-x-2<0$$

的解集.

首先，解方程 $x^2-x-2=0$ 得 $x_1=-1$，$x_2=2$.

然后，画出函数 $y=x^2-x-2$ 图像，如图 2-6 所示.

由图 2-6 可看出：

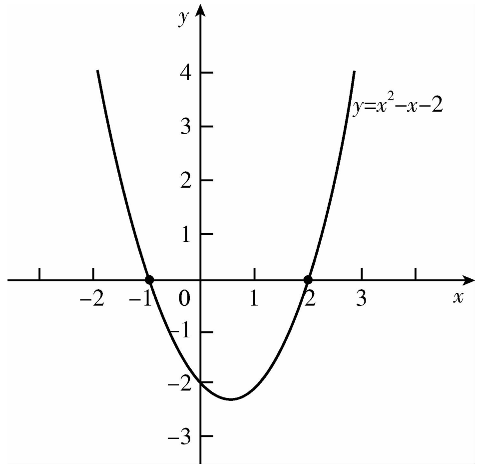

图 2-6

(1)函数 $y=x^2-x-2$ 的图像与 x 轴的交点为 $(-1,0)$ 和 $(2,0)$,这两点的横坐标恰好是方程 $x^2-x-2=0$ 的两个解;

(2)当 $x=-1$ 或 $x=2$ 时,函数图像与 x 轴相交,$y=0$;

(3)当 $-1<x<2$ 时,函数图像位于 x 轴下方,$y<0$;

(4)当 $x<-1$ 或 $x>2$ 时,函数图像位于 x 轴上方,$y>0$.

因此,不等式 $x^2-x-2>0$(即 $y>0$)的解集是

$$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty);$$

不等式 $x^2-x-2<0$(即 $y<0$)的解集是

$$(-1,2).$$

软件练习

用“几何画板”绘制函数图像

图 2-7 是用“几何画板”软件绘制出的一元二次函数 $y=x^2-x-6$ 的图像,其主要步骤如下:

在工具栏中点击“绘图”，在打开的对话框中选择“绘制新函数”，然后输入所要绘制的函数（图 2-7 为 $y=x^2-x-6$ 的图像），即可绘制出图中的函数图像.

同学们可以自己尝试练习绘制不同的函数图像，并标记出图像中的某些点的坐标.

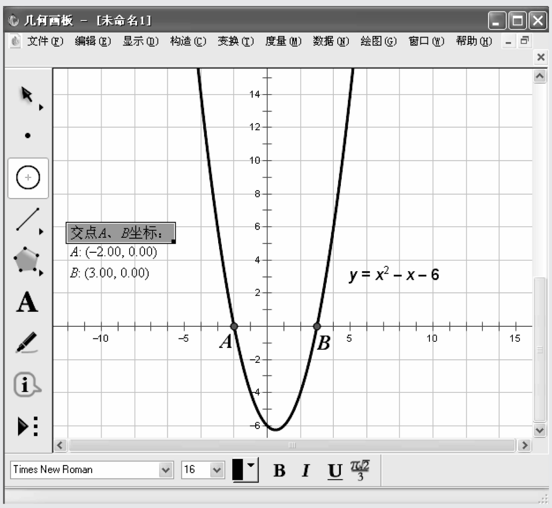

图 2-7

由上可知，可以利用一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图像来解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$，一般可分为如下三种情况：

（ⅰ）当方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根 x_1、x_2 $(x_1<x_2)$，此时函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图像与 x 轴有两个交点，即 $(x_1,0)$、$(x_2,0)$，如图 2-8(a) 所示，则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$；不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 (x_1,x_2).

（ⅱ）当方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根，此时函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图像与 x 轴没有交点，如图 2-8(b) 所示，则不等式

学习提示

如果一元二次不等式中的二次项系数是负数，即 $a<0$，则可以根据不等式的性质，将不等式两边同乘以 -1，使其二次项系数化为正数，然后再求解.

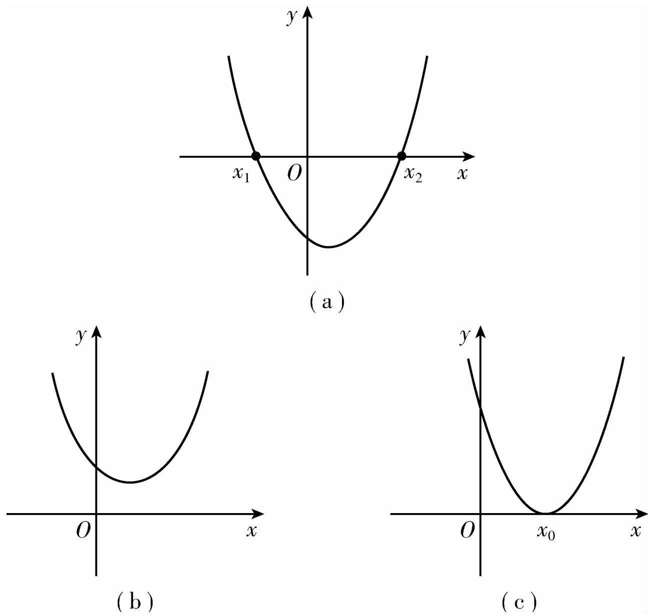

图 2-8

$ax^2+bx+c>0$ 的解集为实数集 $\mathbf{R}$,不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为$\varnothing$.

(ⅲ)当方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时,方程有两个相等的实数根 x_0,此时函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像与 x 轴只有一个交点,即$(x_0,0)$,如图 2-8(c)所示,则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为$(-\infty,x_0)\cup(x_0,+\infty)$,不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为$\varnothing$.

想一想

不等式 $x^2+x-2\geqslant 0$ 的解集是什么?不等式 $x^2+x-2\leqslant 0$ 的解集是什么?

例 1 解下列一元二次不等式:

(1)$x^2+x-2>0$; (2)$x^2+x-2<0$.

解 方程 $x^2+x-2=0$ 的判别式为

$$\Delta=1^2-4\times1\times(-2)=9>0,$$

解方程得

$$x_1=-2,x_2=1.$$

(1)不等式 $x^2+x-2>0$ 的解集为$(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$;

(2)不等式 $x^2+x-2<0$ 的解集为$(-2,1)$.

例 2　解一元二次不等式 $4x^2-4x+1>0$.

解　方程 $4x^2-4x+1=0$ 的判别式为

$$\Delta=(-4)^2-4\times4\times1=0,$$

解方程得

$$x=\frac{1}{2},$$

所以不等式 $4x^2-4x+1>0$ 的解集为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

例 3　解一元二次不等式 $-x^2-3x-5\geqslant0$.

解　根据不等式的性质，将原不等式两边同乘以 -1，整理得

$$x^2+3x+5\leqslant0.$$

方程 $x^2+3x+5=0$ 的判别式为

$$\Delta=3^2-4\times1\times5=-11<0,$$

所以方程 $x^2+3x+5=0$ 没有实数根，则不等式 $x^2+3x+5\leqslant0$ 的解集为 $\varnothing$.

思考与讨论

不等式 $-x^2-3x-5\geqslant0$ 的解集与不等式 $x^2+3x+5\leqslant0$ 的解集有什么区别？

例 4　k 为何值时，方程 $2x^2-kx+x+8=0$ 无实数解.

解　$2x^2-kx+8=0$ 可化为 $2x^2+(1-k)x+8=0$. 依题意知，此方程的判别式 $\Delta=b^2-4a<0$，即

$$(1-k)^2-4\times2\times8<0$$

$$1-2k+k^2-64<0$$

$$k^2-2k-63<0$$

因此，需要解不等式 $k^2-2k-63<0$. 解方程 $k^2-2k-63=0$ 得

$$k_1=-7, k_2=9$$

由于二次项系数为 $1>0$，所以不等式的解集为 $(-7,9)$.

即当 $k\in(-7,9)$ 时，方程 $2x^2-kx+8=0$ 无实

数解.

课堂练习

1. 解下列一元二次不等式.

(1)$x^2-x\geqslant 0$；　　(2)$x^2-3x+2>0$.

2. 当 x 为何值时，$\sqrt{6+x-x^2}$有意义.

练习题 2-3

1. 完成下面的表 2-1：

表 2-1

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$的根	有两相异实根 x_1、$x_2(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 x_0	无实根
一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图像			
一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集			
一元二次不等式 $ax^2+bx+c\geqslant 0$ $(a>0)$的解集			
一元二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集			
一元二次不等式 $ax^2+bx+c\leqslant 0$ $(a>0)$的解集			

2. 解下列一元二次不等式：

(1) $x^2+3x-4>0$；

(2) $3x^2-x-4<0$；

(3) $x^2-2x-3\leqslant 0$；

(4) $-2x^2+5x+3\leqslant 0$；

(5) $4x^2-4x+1\geqslant 0$；

(6) $x^2-2x+7\leqslant 0$.

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(m+2)x+4=0$ 有两个不相等的正实数根，求实数 m 取值的范围.

第四节　分式不等式和绝对值不等式

一、分式不等式

在不等式中含有分式，这样的不等式叫作分式不等式，例如 $\frac{1}{x}>0$，$\frac{1}{x^3}<0$ 等都是分式不等式.

分式不等式都可以转化为不等式组的形式求解.

例 1　解不等式 $\frac{2x-1}{x-4}>0$.

解　原不等式可化为 $\begin{cases}2x-1>0\\x-4>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-1<0\\x-4<0\end{cases}$

第一个不等式组的解集是 $\{x\mid x>4\}$，

第二个不等式组的解集是 $\left\{x\mid x<\frac{1}{2}\right\}$，

所以原不等式的解集是 $\left\{x\mid x>4 \text{ 或 } x<\frac{1}{2}\right\}$，写成区间的形式为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(4,+\infty)$.

例 2　解不等式 $\frac{3x+1}{x+2}\leqslant 1$.

解 原不等式可变形为$\dfrac{2x-1}{x+2}\leqslant 0$.

进而可化为

$$\begin{cases}2x-1\geqslant 0\\ x+2<0\end{cases}\text{或}\begin{cases}2x-1\leqslant 0\\ x+2>0\end{cases}$$

第一个不等式组的解集是$\varnothing$,

第二个不等式组的解集是$\left\{x \mid -2<x\leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$,

所以原不等式的解集是$\left\{x \mid -2<x\leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$,写成区间的形式为$\left(-2,\dfrac{1}{2}\right]$.

课堂练习

解下列不等式.

(1)$\dfrac{x-2}{x+3}<0$; (2)$\dfrac{1-x}{5x+1}\geqslant 0$;

(3)$\dfrac{2x+1}{x-3}\geqslant 0$; (4)$1-\dfrac{2-x}{1+x}>0$.

二、绝对值不等式

在初中我们已经学过,对任意实数x,都有$|x|\geqslant 0$,且有

$$|x|=\begin{cases}x, x>0,\\ 0, x=0,\\ -x, x<0.\end{cases}$$

$|x|$的几何意义是在数轴上表示实数x的点到原

点的距离.

绝对值符号内含有未知数的不等式叫作**含绝对值的不等式**.

1. $|x|>a$ 或 $|x|<a(a>0)$型不等式

根据绝对值的几何意义,不等式 $|x|>1$ 表示的是数轴上到原点的距离大于 1 的所有点的集合,在数轴上表示如图2-9(a)所示;$|x|<1$ 表示的是数轴上到原点的距离小于 1 的所有点的集合,在数轴上表示如图 2-9(b)所示.

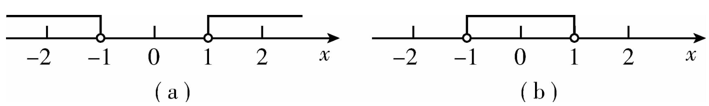

图 2-9

由图 2-9(a)可看出,不等式 $|x|>1$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$;由图 2-9(b)可看出,不等式 $|x|<1$ 的解集为$(-1,1)$.

一般地,不等式 $|x|>a(a>0)$的解集为$(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$,不等式 $|x|<a(a>0)$的解集为$(-a,a)$.

例 3　解下列不等式:

(1)$2|x|>1$;　　　　(2)$5|x|-2\leqslant 0$.

解　(1)由 $2|x|>1$ 可得

$$|x|>\frac{1}{2},$$

则原不等式的解集为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(2)由 $5|x|-2\leqslant 0$ 可得

$$|x|\leqslant\frac{2}{5},$$

则原不等式的解集为$\left[-\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right]$.

课堂练习

解下列不等式：

(1)$1-|x|\leqslant 0$；　　(2)$3|x|-2\geqslant 0$.

2. $|ax+b|>c$ 或 $|ax+b|<c(c>0)$型不等式

对于 $|ax+b|>c$ 或 $|ax+b|<c(c>0)$型不等式可以转化为 $|x|>a$ 或 $|x|<a(a>0)$型来求解. 例如，解不等式 $|2x+1|<1$，可先设 $2x+1=m$，则不等式 $|2x+1|<1$ 可化为

$$|m|<1,$$

可解得
$$-1<m<1,$$

即
$$-1<2x+1<1,$$

根据不等式的性质可得

$$-1<x<0,$$

则原不等式 $|2x+1|<1$ 的解集为$(-1,0)$.

像上述那样，将 $|ax+b|>c$ 或 $|ax+b|<c(c>0)$型不等式转化为 $|x|>a$ 或 $|x|<a(a>0)$型不等式来求解的方法称为“变量替换法”或“换元法”，即用新的简单的变量(如上述的“m”)来替换原来的变量(如上述的“$2x+1$”)，从而将复杂的问题简单化. 在实际的运算过程中，变量替换的过程可以省略不写.

想一想

不等式 $|2-x|>5$ 的解集与不等式 $|x-2|>5$ 的解集一样吗？

例 4　解不等式 $|2-x|>5$.

解　由原不等式可得

$$2-x>5 \text{ 或 } 2-x<-5,$$

解得
$$x<-3 \text{ 或 } x>7,$$

所以不等式 $|2-x|>5$ 的解集为$(-\infty,-3)\cup(7,+\infty)$.

例 5　解不等式 $|3x+5|\leqslant 7$.

解　由原不等式可得

$$-7\leqslant 3x+5\leqslant 7,$$

解得

$$-4\leqslant x\leqslant \frac{2}{3},$$

所以不等式 $|3x+5|\leqslant 7$ 的解集为 $\left[-4,\frac{2}{3}\right]$.

课堂练习

解下列各不等式：

(1) $|2x+7|>1$；　(2) $2\leqslant|1-x|$.

练习题 2-4

解下列不等式：

(1) $|3x|<7$；　(2) $|3-x|\geqslant 2$；

(3) $|3-5x|<8$；　(4) $\left|\frac{2}{3}x+2\right|\geqslant 5$；

(5) $\left|\frac{1}{2}+2x\right|\leqslant 5$；　(6) $|2x+6|+1<3$.

第五节　线性规划的有关概念

线性规划是运筹学中研究最早、发展较快、应用广泛、方法较成熟的一个重要分支. 它是辅助人们进行科学管理的一种数学方法. 在经济管理、交通运输、工农业生产等经济活动中，提高经济效益是人们不可缺少的要求，而提高经济效益一般通过两种途径：一是技术方面的改进，如改善生产工艺、使用新设备和新型原材料等；

二是生产组织与计划的改进,即合理分配人力、物力、财力等资源.

引例1 某工厂需要生产甲、乙两种产品,这两种产品都需要A原料和B原料.已知每一件甲产品需要A原料10 kg和B原料15 kg,每一件乙产品需要A原料12 kg和B原料8 kg.现在该工厂共有A原料300 kg和B原料250 kg,见表2-2.甲产品获利200元,乙产品获利150元,问该工厂生产甲、乙产品各多少件时才能保证利润最大?

表2-2 单位:kg

	甲产品	乙产品	总供应量
A原料	10	12	300
B原料	15	8	250

分析 设该工厂生产甲产品x件,乙产品y件,可获利润为Z元,则

$$Z=200x+150y. \tag{1}$$

由于生产一件甲产品需要A原料10 kg,生产一件乙产品需要A原料12 kg,而该工厂共有A原料300 kg,这是一个限制产量的条件,因此在确定甲、乙产品的产量时,必须考虑A原料的用量不能超过该工厂的总量,即可用不等式表示为

$$10x+12y\leqslant 300. \tag{2}$$

同理,由于生产一件甲产品需要B原料15 kg,生产一件乙产品需要B原料8 kg,而该工厂共有B原料250 kg,可以用不等式表示为

$$15x+8y\leqslant 250. \tag{3}$$

又由于产品的产量x,y不可能为负数,且都是产品的件数,所以

$$x\geqslant 0,y\geqslant 0,\text{且 }x,y\text{ 都为整数}. \tag{4}$$

因此,问题变为怎样选择x,y,在满足上述一系列

限制条件下，使得利润 Z 取得最大值，即满足

$$\begin{cases}10x+12y\leqslant 300,\\ 15x+8y\leqslant 250,\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,\text{且 } x,y \text{ 为整数}\end{cases}\tag{5}$$

的 x,y，使得利润 $Z=200x+150y$ 取得最大值. 这个最大值通常记为

$$\max Z=200x+150y.$$

学习提示

max 表示最大的意思，是英文 maximum 的缩写.

引例 1 中，甲、乙产品的生产量 x,y 称为**决策变量**. 式(5)中的几个不等式称为**约束条件**. 由于这组约束条件都是关于 x,y 的一次不等式，所以又称为**线性约束条件**. Z 关于 x,y 的函数式(1)称为**目标函数**. 一般地，制约变量取值的关于 x,y 的二元一次不等式组称为**线性约束条件**.

函数式(1)就是引例 1 中的目标函数，不等式组(5)就是引例 1 的线性约束条件，则引例 1 就是求目标函数 $Z=200x+150y$ 在线性约束条件(5)下的最大值问题.

满足线性约束条件(5)的变量 x,y 的值有许多组. 例如，$\begin{cases}x=1,\\ y=2.\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=3,\\ y=5.\end{cases}$ 就是两组解.

通过上面的分析，引例 1 就转化为求一组变量 x,y 的值，使 x,y 满足线性约束条件

$$\begin{cases}10x+12y\leqslant 300,\\ 15x+8y\leqslant 250,\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,\text{且 } x,y \text{ 为整数}.\end{cases}$$

并且使得 $Z=200x+150y$ 取得最大值.

引例 2　某工厂现有两种大小不同规格的钢板可截成 A，B，C 三种规格，每张钢板可同时截得三种规格的小钢板的块数见表 2-3.

表 2-3

	A 规格	B 规格	C 规格
第一种钢板	2	1	1
第二种钢板	1	2	3

某顾客需要 A,B,C 三种规格的成品分别为 15,18,27 块,问各截这两种钢板多少张才能既满足顾客的要求又使得所用的钢板张数最少.

分析 设需截第一种钢板 x 张,第二种钢板 y 张,所用钢板的总张数为 Z,则

$$Z=x+y.$$

因为某顾客需要 A 规格的成品为 15 块,这是一个限制条件,在确定两种钢板的用量时,要考虑满足顾客的要求,即可用不等式表示为

$$2x+y\geqslant 15.$$

同理,对于 B 规格和 C 规格可以得到以下的不等式

$$x+2y\geqslant 18,$$
$$x+3y\geqslant 27.$$

于是,线性约束条件为

$$\begin{cases}2x+y\geqslant 15,\\ x+2y\geqslant 18,\\ x+3y\geqslant 27,\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,\text{且 } x,y \text{ 为整数}.\end{cases}$$

学习提示

min 表示最小的意思,是英文 minimum 的缩写.

该工厂的目标是在满足顾客要求的条件下,如何确定 x,y 的值使所用钢板张数最少,这时,

$$Z=x+y$$

即为目标函数,求所用钢板张数最少即求目标函数的最小值,即

$$\min Z=x+y.$$

从引例 1 和引例 2 可以看到,虽然这两个问题的背景不同,但是具有一个共同的特点:求满足线性约束条

件的变量值,使目标函数达到最大值或最小值.

一般地,求目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值的问题,统称为**线性规划问题**. 满足线性约束条件的解称为**可行解**. 由所有可行解构成的集合称为**可行域**. 在可行域中,能使目标函数取得最大值或最小值的解称为**最优解**.

在实际生产中,有许多问题都可以归结为线性规划问题. 解决上述两个实际问题的过程就是建立数学模型的过程. 在用线性规划方法解决任何实际问题时,首先必须建立数学模型.

例 1　某工厂在计划期内要安排生产甲、乙两种产品,已知生产单位产品所需的设备台时以及 A,B 两种原材料的消耗,见表 2-4.

表 2-4

	甲产品	乙产品	消耗
设备/台时	1	2	8
原材料 A/kg	4	0	16
原材料 B/kg	0	4	12
利润/元	2	3	

问:如何安排计划使该工厂获利最多? 写出该问题的线性约束条件和目标函数.

解　设 x, y 分别表示在计划期内甲、乙产品的产量.

因为设备的有效台时是 8,这是一个限制产量的条件,所以在确定甲、乙产品的产量时,要考虑不要超过设备的有效台时数,即可用不等式表示为

$$x+2y\leqslant 8.$$

同理,因原材料 A,B 的限量,可以得到以下不等式

$$4x\leqslant 16,$$

$$4y\leqslant 12.$$

该工厂的目标是在不超过所有资源限量的条件下，如何确定产量 x,y 以得到最大的利润. 若用 Z 表示利润，这时

$$Z=2x+3y.$$

综上所述，约束条件为

$$\begin{cases}x+2y\leqslant 8,\\4x\leqslant 16,\\4y\leqslant 12,\\x\geqslant 0,y\geqslant 0,\end{cases}$$

求目标函数的最大值

$$\max Z=2x+3y.$$

例 2 某工厂用钢与橡胶生产三种产品 A,B,C，有关资料如表 2-5 所示.

表 2-5

产品	单位产品钢的消耗量	单位产品橡胶的消耗量	单位产品利润
A	2	3	40
B	3	3	45
C	1	2	24

已知每天可获得 100 单位的钢和 120 单位的橡胶，问每天应安排生产 A,B,C 三种产品各多少，才能使总利润最大？写出问题的线性约束条件和目标函数.

解 设每天应安排生产 A,B,C 三种产品分别为 x_1,x_2,x_3 个单位.

分别考虑单位产品钢消耗量与橡胶消耗量的限制以及 x_1,x_2,x_3 的非负性，可得约束条件为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3\leqslant 100,\\3x_1+3x_2+2x_3\leqslant 120,\\x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0,\end{cases}$$

求目标函数的最大值

$$\max Z=40x_1+45x_2+24x_3.$$

练习题 2-5

1. 某养鸡场有一万只鸡，用动物饲料和谷物饲料混合喂养，每天每只鸡平均吃混合饲料 0.5 kg，其中动物饲料占的比例不得少于$\frac{1}{5}$，动物饲料 2.70 元/kg，谷物饲料 1.50 元/kg，养鸡场至多能供应谷物饲料 12 500 kg. 应该怎样混合饲料才能使养鸡场每周的成本最低？写出这个问题中的线性约束条件和目标函数.

2. 某家具厂有方木料 90 m^3，木工板 600 m^3，准备加工成书桌和书橱出售. 已知生产每张书桌需要方木料 0.1 m^3，木工板 2 m^3；生产每个书橱需要方木料 0.2 m^3，木工板 1 m^3，出售一张书桌可以获利 80 元，出售一个书橱可以获利 120 元. 怎样安排生产可以获利最大？写出该问题的线性约束条件和目标函数.

3. 火车站有某公司特运的甲种货物 1 530 t，乙种货物 1 190 t，现计划用 A，B 两种型号的货厢共 51 节运送这批货物. 已知 35 t 甲种货物和 15 t 乙种货物可装满一节 A 型货厢；25 t 甲种货物和 35 t 乙种货物可装满一节 B 型货厢. 若每节 A 型货厢的运费是 0.5 万元，每节 B 型货厢的运费是 0.8 万元，哪种方案的运费最少？写出该问题的线性约束条件和目标函数.

*第六节　二元线性规划问题的解法

建立了线性规划问题的数学模型后,下一步是如何求出变量的值,使它们既满足线性约束条件,又能使目标函数达到最大值或最小值,即如何找出线性规划问题的最优解.

一、二元一次不等式(组)表示的平面区域

一般地,把含有两个未知数且未知数的次数都是一次的不等式称为**二元一次不等式**,使不等式成立的未知数的值称为它的**解**.

由平面解析几何知识可以知道 $Ax+By+C=0$(A,B 不同时为 0)在平面直角坐标系中表示一条直线,这条直线将一个平面划分为两个半平面.

现考察 $Ax+By+C\geqslant 0$ 或 $Ax+By+C\leqslant 0$ 的几何意义.

想一想

试作出不等式 $x\leqslant 2$ 表示的平面区域.

例 1　在平面直角坐标系中,指出 $2x-3y-6\geqslant 0$ 所表示的区域.

解　将 $2x-3y-6=0$ 整理,得 $y=\dfrac{2}{3}x-2$,它在平面直角坐标系中表示斜率为$\dfrac{2}{3}$,截距为 -2 的直线. 当该直线上的点的横坐标取 x 时,纵坐标取$\dfrac{2}{3}x-2$.

于是 $2x-3y-6\geqslant 0$ 整理得 $y\leqslant\dfrac{2}{3}x-2$,可以看成横坐标取 x,纵坐标取小于等于$\dfrac{2}{3}x-2$ 的点的全体. 在平面直角坐标系中,表示直线 $y=\dfrac{2}{3}x-2$ 下方(包括直

线)的阴影区域,如图 2-10 所示,即 $2x-3y-6\geqslant0$ 表示直线 $2x-3y-6=0$ 下方(包括直线)的阴影区域.

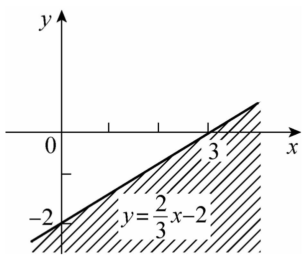

图 2-10

例 2　在平面直角坐标系中,指出 $2x-y+4\leqslant0$ 所表示的区域.

解　将 $2x-y+4=0$ 整理,得 $y=2x+4$,它在平面直角坐标系中表示斜率为 2,截距为 4 的直线.当该直线上的点的横坐标取 x 时,纵坐标取 $2x+4$.

于是 $2x-y+4\leqslant0$ 整理得 $y\geqslant2x+4$,可以看成横坐标取 x,纵坐标取大于等于 $2x+4$ 的点的全体.在平面直角坐标系中,表示直线 $y=2x+4$ 上方(包括直线)的阴影区域,如图 2-11 所示,即 $2x-y+4\leqslant0$ 表示直线 $2x-y+4=0$ 上方(包括直线)的阴影区域.

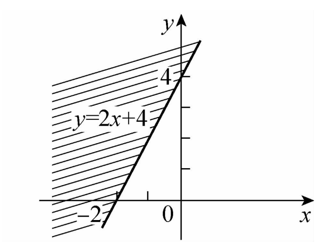

图 2-11

由例 1 和例 2 可以看出 $Ax+By+C\geqslant0$ 或 $Ax+By+C\leqslant0$ 的几何意义:

(1)当 $B\neq0$ 时,不等式可以化为 $y\geqslant kx+b$ 或 $y\leqslant kx+b$. $y\geqslant kx+b$ 表示平面直角坐标系内,在直线

$y=kx+b$上方(包括直线)的半平面区域;$y\leqslant kx+b$ 表示平面直角坐标系内,在直线 $y=kx+b$ 下方(包括直线)的半平面区域.

(2)当 $B=0$ 时,不等式可化为 $x\geqslant m$ 或 $x\leqslant m$,它们分别表示在平面直角坐标系内,在直线 $x=m$ 右方(包括直线$x=m$)或在直线 $x=m$ 左方(包括直线 $x=m$)的平面区域.

对于由二元一次不等式组所表示的平面区域就是各个不等式所表示平面区域的公共部分.

例 3 指出决策变量分别为 x,y 的约束条件

$$\begin{cases}0.1x+0.2y\leqslant 90,\\ 2x+y\leqslant 600,\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,\end{cases}$$

在平面直角坐标系中所表示的平面区域.

思考与讨论

不等式 $2x+y\leqslant 600$ 与不等式 $2x+y<600$ 表示的平面区域有何不同?

解 约束条件在平面直角坐标系中所表示的平面区域是直线 $x+2y-900=0$,$2x+y-600=0$ 以及两条坐标轴 x 轴和 y 轴所围成的阴影部分(包括直线),如图 2-12 所示.

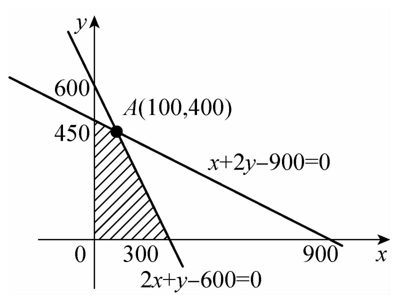

图 2-12

课堂练习

1. 画出不等式组$\begin{cases}x-y+5\geqslant 0,\\x+y\geqslant 0,\\x\leqslant 3\end{cases}$表示的平面区域.

2. 在平面直角坐标系中画出下列二元一次不等式组的解所表示的区域：

(1) $\begin{cases}x-y>2,\\x-y\leqslant 3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 10,\\0\leqslant y\leqslant 15,\\x+y\leqslant 12.\end{cases}$

二、图解法

只有两个决策变量的线性规划问题称为二元线性规划问题.

下面通过实例来介绍如何用图解法解二元线性规划问题.

例 4　求解下面的线性规划问题，约束条件为

$$\begin{cases}2x+y\leqslant 40,\\x+2y\leqslant 50,\\x\geqslant 0, y\geqslant 0,\end{cases}$$

求目标函数的最大值 $\max Z=3x+2y$.

解　在平面直角坐标系中，分别作出约束条件中各不等式对应的平面区域，满足线性约束条件的点集是由四个半平面区域的公共部分组成，如图 2-13 中的阴影部分所示.

图 2-13 中阴影区域(包括边界)上任何一点的坐标都能同时满足四个不等式；反之，阴影区域外的任何一点，其坐标都不能同时满足这四个不等式. 因此，阴影区

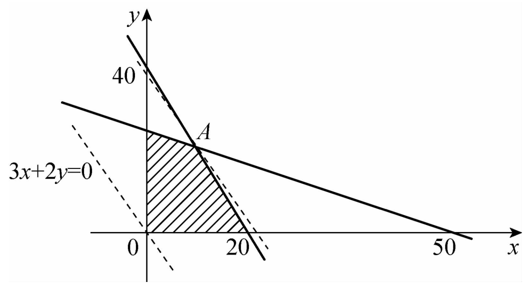

图 2-13

域(包括边界)内每一点的坐标都是这个线性规划问题的可行解,所有可行解的全体就构成了这一线性规划问题的可行域.

下面在可行域中找一个使目标函数 $Z=3x+2y$ 取得最大值的最优解.

观察目标函数 Z 的取值.不妨令 $Z=0$,则得到一条直线 $3x+2y=0$,这条直线上任何一点都能使得目标函数 Z 取同一个常数值(此时 $Z=0$).对于每一个固定的 Z 值,使目标函数值等于 Z 的点构成的直线称为目标函数的**等值线**.当 Z 变动时,得到一组直线,这些直线构成了一组互相平行的直线族.让等值线沿着目标函数值增大的方向移动,直到等值线与可行域有交点的最后位置,此时的交点(一个或多个)即为线性规划问题的最优解.由图 2-13 可见,经过点 A 的等值线符合这一要求,即点 A 为最优解.

求点 A 的坐标,解方程组

$$\begin{cases}2x+y=40,\\x+2y=50,\end{cases}$$

得点 A 的坐标为(10,20),则当 $x=10$,$y=20$ 时,目标函数$Z=3x+2y$ 取得最大值

$$Z_{\max}=3\times10+2\times20=70.$$

所以问题的最优解是当 $x=10$,$y=20$ 时 $Z_{\max}=70$.

由例 4 的求解过程可以看到,求目标函数 Z 的最大

值只需在经过阴影区域顶点的等值线中寻找.

综上所述，利用图解法解二元线性规划问题的步骤是：

(1)确定决策变量，在平面上建立直角坐标系；

(2)由线性约束条件，在平面直角坐标系中画出可行域；

(3)过原点作出目标函数的 0 等值线，即目标函数值等于 0 的直线；

(4)将目标函数的 0 等值线平行移动，观察确定可行域最优解的位置，一般最优解在可行区域的某个边界点取得；

(5)将最优解的坐标代入目标函数得到目标函数的最值.

对一个线性规划问题建立数学模型后，就面临着如何求解的问题.在线性规划问题仅含有两个决策变量的情况下，只介绍图解法，因为图解法简单直观，由此便可以了解线性规划问题求解的基本原理.

例 5　求满足下面约束条件的目标函数的最小值，约束条件为

$$\begin{cases}2x+2y\geqslant 10,\\ x+3y\geqslant 9,\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,\end{cases}$$

求目标函数的最小值 $\min Z=400x+500y$.

解　作出可行域，如图 2-14 所示.

作出目标函数 $Z=400x+500y$ 的 0 等值线，即 $4x+5y=0$. 将 0 等值线向可行域平行移动至点 A 处，这时目标函数取得最小值.

解方程组

$$\begin{cases}2x+2y=10,\\ x+3y=9,\end{cases}$$

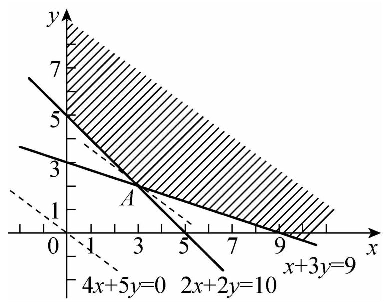

图 2-14

得点 A 的坐标为(3,2),则当 $x=3$,$y=2$ 时,目标函数 Z 取得最小值

$$Z_{\min}=400\times3+500\times2=2\ 200,$$

所以问题的最优解是当 $x=3$,$y=2$ 时,$Z_{\min}=2\ 200$.

课堂练习

用图解法求解第五节中的例 1.

三、表格法

下面通过实例来学习表格法.

例 6 用表格法求下列线性规划问题.约束条件为

$$\begin{cases}2x_1+x_2\leqslant10,\\x_1+x_2\leqslant8,\\x_2\leqslant7,\\x_1\geqslant0,x_2\geqslant0,\end{cases}$$

求目标函数的最大值 $\max Z=4x_1+3x_2$.

解 先将线性规划问题化为标准型.此线性规划问题的标准型为

$$\max Z=4x_1+3x_2+0x_3+0x_4+0x_5,$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=10,\\x_1+x_2+x_4=8,\\x_2+x_5=7,\\x_j\geqslant 0(j=1,2,3,4,5).\end{cases}$$

下面用表格法求解线性规划问题.

首先,要列出初始表格,下面分以下几个步骤来说明.

(1)先把标准型中的约束条件方程转换成表格 2-6 的形式.

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+0x_4+0x_5=10,\\x_1+x_2+0x_3+x_4+0x_5=8,\\0x_1+x_2+0x_3+0x_4+x_5=7,\\x_j\geqslant 0(j=1,2,3,4,5).\end{cases}$$

表 2-6

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
2	1	1	0	0	10
1	1	0	1	0	8
0	1	0	0	1	7

表格中的列数为变量的个数加 1,行数为方程的个数加 1.

(2)从约束方程中可以看出,当 $x_1=0$,$x_2=0$ 时,有 $x_3=10$,$x_4=8$,$x_5=7$. 显然,这是一组可行解,称为**初始解组**. 将其中三个取非 0 值的变量 x_3,x_4,x_5 列成一列,对应地加在表 2-6 的最左侧,然后再在所得表的左侧添加一列对应于初始解组变量的目标函数系数,最后在表的上侧添加一行对应于各变量的目标函数系数,得到表 2-7.

表 2-7

$c_j\to$		4	3	0	0	0	
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_3	2	1	1	0	0	10
0	x_4	1	1	0	1	0	8
0	x_5	0	1	0	0	1	7

其中,初始解组中的变量必须满足对应行的约束方程中系数为1,而同列中其他系数为0(如果约束方程中不满足这一要求,可以通过对约束方程做加减消元法得到).

(3)在表2-7的基础上,增加一行检验数行 σ_j 和一列比值列 θ_i 得到表2-8.

表 2-8

$c_j\to$		4	3	0	0	0		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_i
0	x_3	2	1	1	0	0	10	
0	x_4	1	1	0	1	0	8	
0	x_5	0	1	0	0	1	7	
	σ_j							

下面计算检验数行 σ_j 和比值列 θ_i 的值,并将相应的值填入表2-8中.

根据检验数计算公式 $\sigma_j=c_j-\sum\limits_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$ 来计算,即为 x_j 所在列的目标函数系数行中的 c_j 值减去该列系数与第一列初始解组的目标函数系数的对应乘积和.例如

$$\sigma_1=4-(2\times0+1\times0+0\times0)=4,$$

$$\sigma_2=3-(1\times0+1\times0+1\times0)=3,$$

$$\sigma_3=0-(1\times0+0\times0+0\times0)=0,$$

$$\sigma_4=0-(0\times0+1\times0+0\times0)=0,$$

$$\sigma_5=0-(0\times0+0\times0+1\times0)=0.$$

选取检验数最大的正数所在的列记为 k 列,表中用【 】表示,然后计算比值 θ_i.

根据比值的计算公式 $\theta_i=\dfrac{b_i}{a_{ik}}$，$a_{ik}>0$，如

$$\theta_1=\frac{10}{2}=5,\theta_2=\frac{8}{1}=8.$$

选取最小的 θ_i，记所在行为 i 行，表中用【　】表示.

最后添上目标函数 Z 值这一格，其中目标函数 Z 为第一列 C_B 与 b_i 所在列对应乘积和.

得表 2-9，表 2-9 称为**初始表格**.

表 2-9

$c_j \to$		4	3	0	0	0		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_i
0	x_3	(2)	1	1	0	0	10	【5】
0	x_4	1	1	0	1	0	8	8
0	x_5	0	1	0	0	1	7	—
	σ_j	【4】	3	0	0	0	0	

显然，前面所得到的初始解组并不是最优解，所以，必须要对初始解组中的变量进行替换来求出最优解. 通常按下述方法进行变量的替换.

根据上面所选的第 k 列第 i 行(如表 2-9 中 x_1 所在的列和 x_3 所在的行，将两者的交叉点用(　)表示)，对初始解组做调整，将变量 x_k 换入，替代第 i 行中的初始变量(即表中换入 x_1，换出 x_3). 根据表格法的要求，必须同时将换入变量 x_k 在(　)中的系数通过加减消元法化为 1，且同列其他系数为 0，而初始解组中其他未换出变量所在列的系数不变，通常可用加减消元法来求得.

下面具体来说说表格的转换，见表 2-10.

表 2-10

$c_j \to$		4	3	0	0	0			
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_i	
0	x_3	(2)	1	1	0	0	10		<a>
0	x_4	1	1	0	1	0	8		<b>
0	x_5	0	1	0	0	1	7		<c>

表 2-10 中<a>行除以 2 得<a′>行,<b>行减去<a′>行得<b′>,<c>行不变,于是得到表 2-11.

表 2-11

c_j→		4	3	0	0	0	0		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_i	
4	x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	5		<a′>
0	x_4	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	3		<b′>
0	x_5	0	1	0	0	1	7		<c>

再依次填上检验数行 σ_j 和比值列 θ_i 以及其他值,得到表 2-12.

表 2-12

c_j→		4	3	0	0	0		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_i
4	x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	5	10
0	x_4	0	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	1	0	3	【6】
0	x_5	0	1	0	0	1	7	7
	σ_j	0	【1】	-2	0	0	20	

如果检验数全部为非正数,那么所得的解就是最优解;否则,继续按上面的方法修改可行解,直到得到最优解.

显然,在表 2-12 中变量 x_2 换入,变量 x_4 换出,得到表 2-13.

表 2-13

c_j→		4	3	0	0	0		
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_i
4	x_1	1	0	1	-1	0	2	
3	x_2	0	1	-1	2	0	6	
0	x_5	0	0	1	-2	1	1	
	σ_j	0	0	-1	-2	0	26	

这时，所有检验数都为非正数，故可得可行解 $x_1=2, x_2=6, x_3=0, x_4=0, x_5=1$，这就是最优解. 删去松弛变量，得原线性规划问题的最优解为 $x_1=2, x_2=6$，最大值$Z=26$.

通过例 6，可以归纳出一般用表格法解线性规划问题的步骤：

(1)将线性规划问题化为标准型，建立初始表格.

(2)检查：若所有的检验数 $\sigma_j \leqslant 0$，则当前的可行解即为最优解；否则，转入(3).

(3)检查：若存在 $\sigma_k>0$，且 $a_{ik} \leqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m)$，则无最优解；否则转入(4).

(4)由

$$\sigma_k=\max_j\{\sigma_j \mid \sigma_j>0\}$$

确定 x_k 为换入变量，再由

$$\theta_r=\min_i\left\{\theta_i=\frac{b_i}{a_{ik}} \,\middle|\, a_{ik}>0\right\}=\frac{b_r}{a_{rk}}$$

确定第 r 行中可行解变量 x_h 为换出变量.

(5)用加减消元法化 x_k 的系数 a_{ik} 为 1，同列其他系数为 0；以 x_k 取代 x_h，得新表，转入(2).

学习提示

(1) $\max\limits_j\{\sigma_j \mid \sigma_j>0\}$ 表示取集合中值最大的元素.

(2) $\min\limits_i\left\{\theta_i=\frac{b_i}{a_{ik}} \,\middle|\, a_{ik}>0\right\}$ 表示取集合中值最小的元素.

(3)当有几个相等的最大的正检验数时，可以任取一个作为换入变量，一般选标号较小的那一个量. 选取换出变量时也如此.

练习题 2-6

1. 用图解法求解二元线性规划问题. 约束条件为

$$\begin{cases} x-y \geqslant -2, \\ x+2y \leqslant 6, \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, \end{cases}$$

求目标函数的最大值 $\max Z=3x+6y$.

2. 用图解法求解二元线性规划问题. 约束条件为

$$\begin{cases}12-x-y\geqslant 0,\\ 7-x\geqslant 0,\\ 8-y\geqslant 0,\\ x+y-7\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,\end{cases}$$

求目标函数的最小值 $\min Z=x-2y+12$.

3. 用表格法求解下列线性规划问题：

(1)约束条件为

$$\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 7,\\ 2x_1+x_2\leqslant 10,\\ -2x_1+x_2\leqslant 4,\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\end{cases}$$

求目标函数的最大值 $\max Z=10x_1+5x_2$；

(2)约束条件为

$$\begin{cases}4x_1+x_2\leqslant 120,\\ 2x_1-x_2\leqslant 50,\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\end{cases}$$

求目标函数的最大值 $\max Z=50x_1+30x_2$；

复习题 2

A 组

1. 填空题:

(1) 集合 $\{x\mid -1<x<3\}$ 可用区间表示为________，集合 $\{x\mid x\geqslant 5\}$ 可用区间表示为________.

(2)设全集为实数集 **R**,集合 $A=(-2,5]$,$B=(0,7)$,则$A\cap B=$__________,$A\cup B=$__________,$\complement_A=$__________,$\complement_B=$__________.

(3)一元二次不等式 $x^2+3x+2\geqslant 0$ 的解集为________.

(4)一元二次不等式 $x^2+4x+4<0$ 的解集为________.

(5)不等式 $|5x|<1$ 的解集为________.

(6)不等式 $|2x-1|>3$ 的解集为________.

2. 选择题:

(1)设全集为实数集 **R**,集合 $A=[-5,0)$,$B=(-2,7)$,则 $A\cap B=$(　　).

A. $[-5,-2)$　　B. $(0,-2)$

C. $(-2,0)$　　D. $[-2,0]$

(2)不等式 $x^2-3x<0$ 的解集为(　　).

A. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　　B. $(-\infty,0]\cup(0,+\infty)$

C. $(0,3)$　　D. $[0,3]$

(3)不等式 $x^2-x+1>0$ 的解集为(　　).

A. $\varnothing$　　B. **R**

C. $(-1,1)$　　D. 以上选项都不正确

(4)不等式 $|2x|\geqslant 1$ 的解集为(　　).

A. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

B. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

D. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

3. 解下列不等式:

(1)$x^2+x-6<0$;　　(2)$x^2-x+\frac{1}{4}>0$;

(3) $x^2+2x-8\geqslant 0$；　　(4) $-2x^2+x+3<0$.

4. 解下列不等式：

(1) $|x-8|<0$；　　(2) $\left|-x+\frac{1}{3}\right|>0$；

(3) $|3x-2|\geqslant 7$；　　(4) $|-2x-1|+5<10$.

B 组

1. 已知全集为实数集 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x \mid |3x-2|>4\}$，$B=\{x \mid x^2-2x-8<0\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

2. 已知关于 x 的方程 $2x^2-4(m-1)x+m^2+7=0$ 有两个不相等的实数根，求满足该方程的实数 m 的取值范围.

阅读材料

数学家夏道行与夏氏不等式

数学家夏道行

夏道行，国际知名数学家，江苏泰州人，1950 年毕业于山东大学数学系，1952 年浙江大学数学系研究生毕业，1978 年，担任复旦大学数学研究所副所长、教授，1980 年当选为中国科学院院士(学部委员).

他长期从事数理研究，专于函数论、泛函分析与数学物理，在算子理论、线性拓扑代数理论及广义函数理论等研究领域都取得了突出成就，并独创“夏道行函数”. 他在泛函积分和不变测度论方面的研究成果被国际数学界称为“夏氏不等式”.

夏教授的学术著作有很多，他著的《无限维空间上测度和积分论》已经被译成英文出版，在国外有较大的影响；在算子理论研究方面，夏教授的《关于非正常算子》一文是国际上这个研究方向的开创性论文之一，十多年来经常被国外学者的论文引用，他的这个研究结果

已被收入美国数学家普特拉姆的《希尔柏脱空间算子交换性质》一文，其专著《线性算子谱理论》已由科学出版社出版；在线性拓扑代数理论研究方面，夏教授系统地建立了半赋范代数和局部有界代数的理论，其研究结果被收入苏联数学家奈玛依克著的《赋荡理论》一书中；在广义函数论研究方面，夏教授的关于正定广义函数的研究成果已被苏联科学院院士盖尔芳特收入他和别人合作的《广义函数论》第四卷中；此外，夏教授与严绍崇合著的《实变函数论》和《泛函分析》等两本为高校推荐教材. 夏教授还发表数学论文七十余篇，国内外有百余种著作、论文曾引用过.

2008 年 5 月 20 日，夏教授在山东大学做的关于数学理论的讲座中曾说过，研究数学对世界都有很大的影响，因为数学是很多研究的基础，这对大家学习数学产生了潜移默化的影响.