

第8章 构件的应力和变形

学习目标

- 理解并掌握应力的概念。
- 掌握几种基本变形的应力分布特点及计算。
- 理解压杆稳定的概念及临界荷载的意义。
- 掌握欧拉公式的使用条件及应用。
- 理解并掌握应力状态的概念,能够求解不同截面的应力。
- 理解并掌握几种基本变形的变形描述方法,能够应用公式求解变形。

8.1 应力的概念

通过前面的讨论,用截面法求出的构件截面上的内力既可以是作用在截面上的集中力也可以是集中力偶,实际上,内力是分布在整个横截面上的,即内力是分布力,用截面法求出的内力是截面上分布内力的合力。力学中把内力在截面某点处的分布集度称为该点处的应力。

如图 8-1(a)所示的杆件,为求截面 $m-m$ 上某点的应力,可过该点的周围取一微小面积 ΔA ,设在 ΔA 上分布内力的合力为 ΔF ,一般情况下 ΔF 不与截面垂直,则该点的应力为

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (8-1)$$

全应力 p 是一个矢量,其方向与内力方向相同,使用时常将其分解成与截面垂直的分量 σ 和与截面相切的分量 τ ,称垂直截面的应力 σ 为正应力,与截面相切的应力 τ 为切(剪)应力,如图 8-1(b)所示。

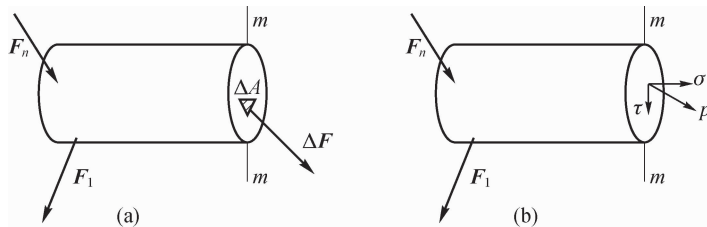


图 8-1

在国际单位制中,应力的单位为 Pa(帕), $1 \text{ Pa}=1 \text{ N/m}^2$,在实际应用中,这一单位太小,常用 MPa(兆帕)或 GPa(吉帕),其关系为

$$1 \text{ MPa}=1 \text{ N/mm}^2=10^6 \text{ Pa} \quad 1 \text{ GPa}=10^9 \text{ Pa}=10^3 \text{ MPa}$$

8.2 轴向拉(压)杆的应力和变形

8.2.1 拉(压)杆横截面上的正应力

为了求得拉(压)杆横截面上任意一点的应力,必须了解内力在横截面上的分布规律,这可通过变形实验来分析研究。

如图 8-2 所示,取一等截面直杆,在杆上画出与杆轴线垂直的横向线 ab 和 cd ,再画上与杆轴线平行的纵向线,然后在杆两端沿杆的轴线作用拉力 F ,使杆件产生拉伸变形。

1. 实验现象

横向线在变形后均为直线,且都垂直于杆的轴线,只是间距增大;纵向线在变形后亦是直线且仍沿着纵向,只是间距减小。如图 8-2(b)所示,所有正方形的网格均变成大小相同的长方形。

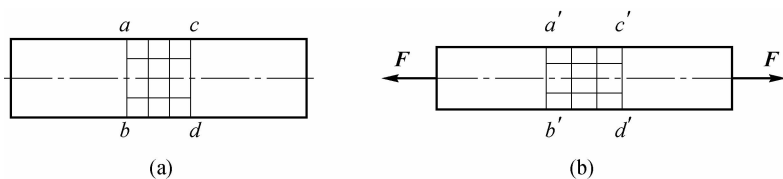


图 8-2

2. 平面假设

根据上述现象,可做如下假设:变形前的横截面,变形后仍为平面,仅沿轴线产生相对平移,仍与杆的轴线垂直。这个假设称为平面假设,它意味着拉杆的任意两个截面之间所有纵向线段的变形相同。

3. 应力分布

由材料的均匀连续性假设,可以推断出拉(压)杆的内力在横截面上的分布是均匀的,即横截面上各点处的应力大小相等,其方向与 F_N 一致,垂直于横截面,因此,拉(压)杆横截面上只有均匀分布的正应力,没有切应力,如图 8-3 所示,其计算式为

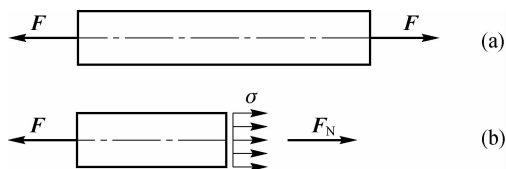


图 8-3

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \quad (8-2)$$

且规定正应力以拉为正,压为负。

【例 8-1】 如图 8-4(a)所示的三角架,其中 AB 杆为圆截面钢杆,直径 $d=30$ mm,BC 杆为正方形截面木杆,边长为 $a=100$ mm,已知荷载 $P=50$ kN。试求各杆的工作应力。

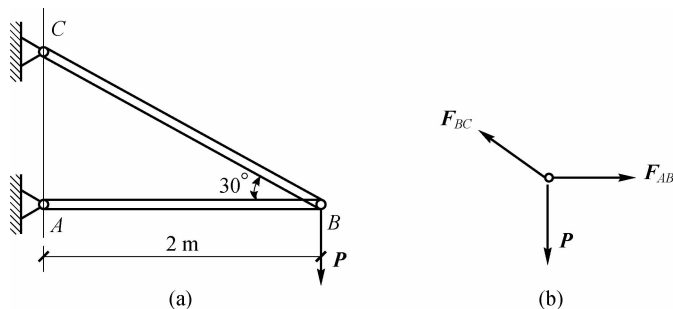


图 8-4

【解】 (1)外力分析。以 B 点为研究对象,受力图如图 8-4(b)所示,列平衡方程以求两根杆所受的外力。

$$\sum F_{ix} = 0 \quad F_{AB} - F_{BC} \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad F_{BC} \sin 30^\circ - P = 0$$

求得 $F_{AB} = 1.732P = 86.6$ kN, $F_{BC} = 2P = 100$ kN。

(2)内力分析。

杆 AB 轴力为压力: $F_{NAB} = F_{AB} = 86.6$ kN

杆 BC 轴力为拉力: $F_{NBC} = F_{BC} = 100$ kN

(3)应力计算。

$$\text{杆 AB:} \quad \sigma_{AB} = \frac{F_{NAB}}{A_{AB}} = -\frac{86.6 \times 10^3}{\frac{3.14 \times 30^2}{4}} = -122.6 \text{ MPa (压应力)}$$

$$\text{杆 BC:} \quad \sigma_{BC} = \frac{F_{NBC}}{A_{BC}} = \frac{100 \times 10^3}{100 \times 100} = 10 \text{ MPa (拉应力)}$$

【例 8-2】 有阶梯杆如图 8-5(a)所示。设 AC 段的横截面面积为 $A_1=800$ mm²,CD 段的横截面面积为 $A_2=500$ mm²,试求杆的正应力最大值。

【解】 (1)求轴力。将 1—1 截面左侧部分去掉,根据右侧部分上的轴向外力直接可得 $F_{N1} = -50$ kN;同理可得 2—2 截面上轴力 $F_{N2} = 70$ kN。据此,可作出全杆的轴力图,如图 8-5(b)所示。

(2)求正应力最大值。正应力最大值在轴力最大处或截面面积最小处,因此正应力有可能在 AB 段或 CD 段。

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{NAB}}{A_{AB}} = \frac{F_{N2}}{A_1} = \frac{70 \times 10^3}{800} = 87.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{F_{NCD}}{A_{CD}} = \frac{F_{N1}}{A_2} = \frac{-50 \times 10^3}{500} = -100 \text{ MPa}$$

因此正应力的最大值在 CD 段, $\sigma_{\max} = 100 \text{ MPa}$, 为压应力。

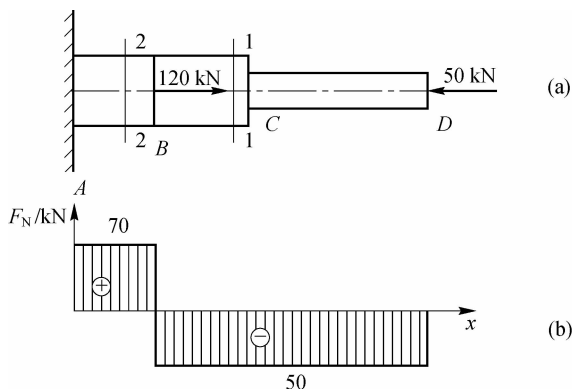


图 8-5



除了等直杆以外,小锥度直杆横截面上的应力也可以用式(8-2)计算。

以上拉(压)杆横截面上正应力的计算公式是在平面假设的基础上推导的。实际上,在外力作用点附近的区域,由于加载方式的不同,横截面上的应力分布并非均匀,也不一定只有正应力。实验和理论的研究指出:外力作用于杆端的方式不同,只会使杆端的距离不大于横向尺寸的范围内的应力分布受到影响,但可以通过加大端部横截面等方法去解决。

8.2.2 拉(压)杆斜截面上的应力

为了全面分析拉(压)杆的强度,揭示杆件破坏的原因,还需研究拉(压)杆斜截面上的应力情况。如图 8-6 所示,一等直杆中的斜截面与横截面成 α 角,其上的应力情况分析如下。

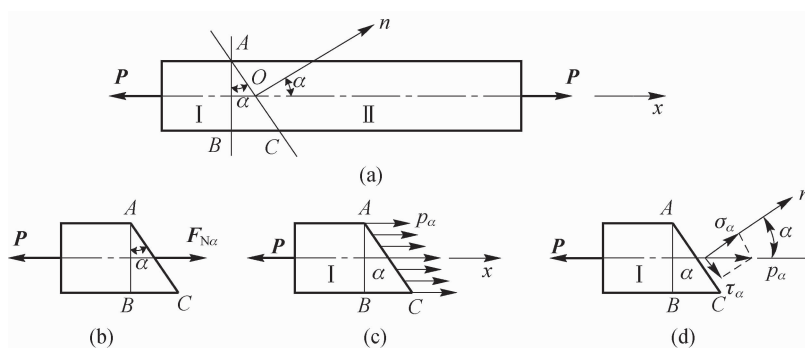


图 8-6

斜截面上的内力,仍为轴力,采用截面法,得轴力 $F_{N_\alpha} = P$ 。由横截面上的应力分布特点可知,斜截面上的应力 p_α 也是均匀分布的,其值为

$$p_\alpha = \frac{F_{N_\alpha}}{A_\alpha}$$



式中, A_α 为斜截面的面积。设横截面的面积为 A , 则 $A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}$, 从而有

$$p_\alpha = \frac{F_N}{A_\alpha} = \frac{F_N}{A} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha$$

式中, σ 为杆横截面上的正应力。

由于应力 p_α 即不与斜截面垂直也不与斜截面相切, 是斜截面上的全应力, 可将其分解成正应力和切应力, 其大小分别为

$$\text{正应力:} \quad \sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha \quad (8-3)$$

$$\text{切应力:} \quad \tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha \quad (8-4)$$

即轴向拉(压)杆斜截面上既有正应力又有切应力, 二者的数值与截面的夹角 α 有关, 且随夹角的变化而变化。

当 $\alpha = 0^\circ$ 时, 为横截面。横截面上只有正应力没有切应力, 且正应力有最大值, 即

$$\sigma_{0^\circ} = \sigma_{\max} = \sigma, \tau_{0^\circ} = 0$$

当 $\alpha = 45^\circ$ 时, 斜截面上切应力有最大值, 即

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{1}{2} \sigma, \tau_{45^\circ} = \tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma$$

当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 为纵向截面。纵向截面上两种应力都是零, 即

$$\sigma_{90^\circ} = \tau_{90^\circ} = 0$$

也就是说, 纵向截面上没有应力, 因此当杆发生轴向拉、压变形时, 绝对不会在纵向截面发生破坏。

8.2.3 轴向拉(压)杆的变形

1. 轴向变形及轴向线应变

如前所述, 直杆受轴向拉力或压力作用时, 杆件会产生沿轴线方向的伸长或缩短。如图 8-7 所示, 设杆的原长为 l , 变形后的长度为 l_1 , 则杆长的变形量 Δl 称为轴向绝对变形, 即

$$\Delta l = l_1 - l$$

显然, 杆件受拉时, Δl 为正值; 杆件受压时, Δl 为负值。

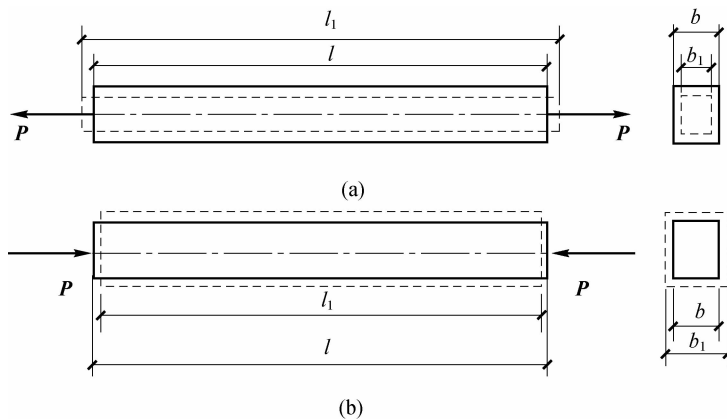


图 8-7

轴向变形 Δl 与杆的原长 l 之比,即单位长度的变形称为轴向相对变形,亦称纵向线应变,用符号 ϵ 表示。即

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (8-5)$$

式中, ϵ 是一个无量纲的量,其正负号与 Δl 一致。

2. 横向变形及横向线应变

轴向拉(压)杆在轴向伸长(缩短)的同时,也要发生横向尺寸的减小(增大)。设杆件原横向尺寸为 b ,变形后的尺寸为 b_1 ,则杆的横向变形量 Δb 称为横向绝对变形,即

$$\Delta b = b_1 - b$$

Δb 也是代数量,杆件受拉时,为负值;杆件受压时,为正值。相应地,杆件的横向线应变为

$$\epsilon' = \frac{\Delta b}{b} \quad (8-6)$$

式中, ϵ' 也是一个无量纲的量,其正负与 Δb 一致。

3. 横向变形系数(泊松比)

实验表明,在弹性范围内 ϵ' 与 ϵ 之比的绝对值 ν 为一个常数,这是一个无量纲的数,称为横向变形系数或泊松比。

$$\nu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right| \quad (8-7)$$

考虑到 ϵ' 与 ϵ 的正负号总是相反的,故有

$$\epsilon' = -\nu\epsilon \quad (8-8)$$

一些材料的 ν 值可参见表 8-1。

表 8-1 常用材料的 E, ν 值

材 料	$E/10^5 \text{ MPa}$	ν
低碳钢	2~2.20	0.24~0.28
低碳合金钢	1.96~2.16	0.25~0.33
合金钢	1.86~2.06	0.25~0.30
灰铸铁	1.15~1.57	0.23~0.27
木材(顺纹)	0.09~0.12	—
砖石料	0.027~0.035	0.12~0.2
混凝土	0.15~0.36	0.16~0.18
花岗岩	0.49	0.16~0.34

4. 胡克定律

实验证明,在线弹性范围内,轴向拉(压)杆的伸长(缩短)值 Δl 与轴力 F_N 及杆长 l 成正比,而与杆的横截面面积成反比,这就是胡克定律。引入比例常数 E ,得

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA} \quad (8-9)$$



E 称为材料的拉(压)弹性模量,是表明材料力学性能的物理量,其量纲及单位均与应力相同。它和泊松比 ν 是材料的两个最基本的弹性常数,数值取决于材料的性质。常用材料的 E 值参见表 8-1。

式(8-9)表明,在 F_N, l 不变的情况下, EA 的乘积越大,则 Δl 越小。因此, EA 的乘积反映了杆件抵抗弹性变形能力的大小,故称为杆件的抗拉(压)刚度。

将式(8-9)的两端同时除以 l ,由式(8-5)和式(8-2)可知 $\frac{\Delta l}{l} = \epsilon$ 和 $\frac{F_N}{A} = \sigma$,则有

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (8-10)$$

式(8-9)和式(8-10)是胡克定律的两种不同表达形式。由式(8-10)可知,在线弹性范围内,应力与应变成正比。

【例 8-3】 图 8-8 为一正方形截面混凝土柱,上段柱横截面边长是 $a_1 = 240 \text{ mm}$,下段柱横截面边长是 $a_2 = 3000 \text{ mm}$,荷载 $F_1 = 200 \text{ kN}$, $F_2 = 135 \text{ kN}$,不计自重,其拉(压)弹性模量为 $E = 25 \text{ GPa}$,试求柱的总变形。

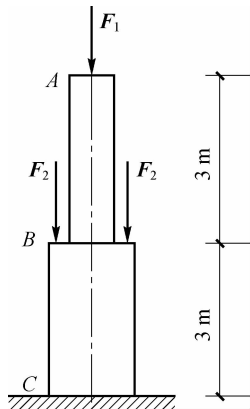


图 8-8

【解】 (1)求轴力。杆的各段轴力值分别为

$$F_{NAB} = -F_1 = -200 \text{ kN}$$

$$F_{NBC} = -F_1 - 2F_2 = -200 - 2 \times 135 = -470 \text{ kN}$$

(2)求变形。分别求 AB 段和 BC 段的轴向变形。

$$\Delta l_{AB} = \frac{F_{NAB} l_{AB}}{EA} = \frac{-200 \times 10^3 \times 3 \times 10^3}{25 \times 10^3 \times 240^2} = -0.42 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{F_{NBC} l_{BC}}{EA} = \frac{-470 \times 10^3 \times 3 \times 10^3}{25 \times 10^3 \times 300^2} = -0.63 \text{ mm}$$

(3)求 AC 杆的总伸长。

$$\Delta l = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = -0.42 - 0.63 = -1.05 \text{ mm (压缩)}$$

即杆缩短了 1.05 mm。

8.3 圆轴扭转时的应力和变形

8.3.1 圆轴扭转横截面上的应力

圆轴扭转时,用截面法求得横截面上的扭矩后,还应进一步确定横截面上应力分布规律,以便求出最大应力。解决这一问题的途径与推导拉(压)杆横截面上的正应力公式相类似,必须从轴的变形特点入手考虑。

1. 圆轴扭转变形的几何特点

如图 8-9 所示,取一圆轴,加载前在圆轴表面上画平行于轴线的纵向线,画垂直于轴线的圆周线,然后在杆两端施加扭转外力偶 m_e ,如图 8-9 所示。在弹性范围内,所观察到的杆表面变形情况如下。

各圆周线的形状、大小、间距都无改变,只是绕轴线发生了相对转动。

各纵向线都向相同方向倾斜了同一微小角度 γ ,方格歪斜成了菱形,如图 8-9(b)所示。

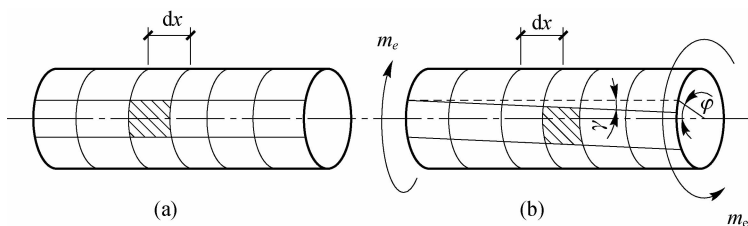


图 8-9

2. 平面假设

根据上述变形特点可以对实心等直圆轴受扭后内部的变形情况做出如下假设:圆轴受扭时,原横截面变形后仍为平面,其形状、大小不变,半径仍为直线,且截面仍为横截面,此即圆轴扭转时的平面假设,并为实验所证实。据此假设,圆轴扭转时各横截面就像刚性平面一样绕轴线旋转了一个角度。

3. 应力分布特点

根据以上变形现象可以推出:①横截面刚性绕轴线旋转,杆表面方格歪斜成了菱形,产生了剪应变,这说明横截面上必然存在切应力 τ ;②各圆周线的形状、大小和间距不变,说明横截面上的切应力必然垂直半径,且无正应力。

在图 8-9 中,用相距为 dx 的两个横截面 1—1、2—2 从轴上截取一小段,如图 8-10 所示。若截面 2—2 相对截面 1—1 转动了一个角度 $d\varphi$,则表示截面的半径 O_2D 绕圆心 O_2 转过了一角度 $d\varphi$, D 点移动到 D' ,圆轴表面原有的直角改变量即为剪应变 γ 。

根据变形后横截面仍保持平面的假设,可知半径仍为直线。半径上各点都有一个位移,但距圆心距离不等的点的位移不同,距圆心越近,点的位移越小;距圆心越远,点的位移越



大。经理论分析可知,横截面上任意点的剪应变 γ_ρ 与该点到圆心的距离 ρ 成正比。与圆心等距离的所有点处的剪应变都相等。这就是剪应变的变形规律。

由剪切胡克定律可知,半径上各点的应力也不等,离圆心越近,点受应力越小;离圆心越远,点受应力越大,而且应力与点到圆心的距离为线性关系。因而横截面上任意一点处的切应力 τ_ρ 与该点到圆心的距离 ρ 成正比。所有与圆心等距离的各点,其切应力数值相等,在周边的切应力最大,圆心处有最小值,是零,其应力分布如图 8-11 所示。

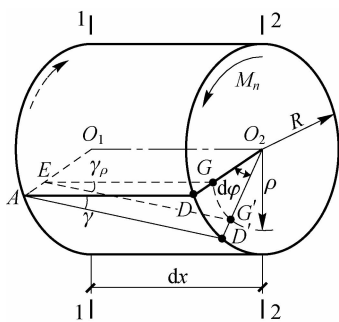


图 8-10

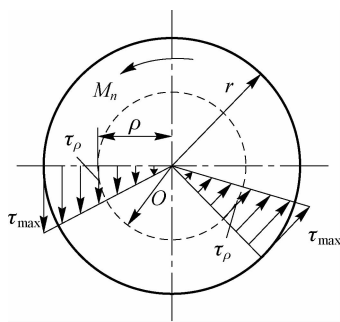


图 8-11

4. 应力的计算

经理论推导(略)可确定圆轴扭转时,横截面上任意一点的切应力的计算公式为

$$\tau_\rho = \frac{M_n \rho}{I_\rho} \quad (8-11)$$

式中, M_n 为截面上的扭矩; ρ 为点到圆心的距离; I_ρ 是与圆截面尺寸有关的几何量,称为横截面对圆心 O 的极惯性矩,其定义式为

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA \quad (8-12)$$

由式(8-11)可知,当 ρ 达到最大值时,即 $\rho_{\max} = R$ 时,切应力为最大值

$$\tau_{\max} = \frac{M_n R}{I_\rho}$$

令 $W_n = \frac{I_\rho}{R}$, 则横截面周边各点处的最大切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{M_n}{W_n} \quad (8-13)$$

式中, W_n 称为圆轴的抗扭截面模量。

式(8-11)和式(8-13)是以平面假设为基础导出的,实验结果表明只有对直径不变的圆轴,平面假设才是成立的,因此这些公式只适用于圆截面等直杆,对小锥度圆杆可近似使用。此外,导出以上公式时,还使用了胡克定律,所以它们只适用于 τ_{\max} 不超过圆轴材料的剪切比例极限 τ_ρ 的情况。

8.3.2 极惯性矩 I_ρ 和抗扭截面模量 W_n 的确定

由前述的分析可知,截面的极惯性矩和抗扭截面模量取决于截面的形状和尺寸,利用公

式可推出圆轴的计算公式。

1. 空心圆轴

如图 8-12 所示, 设空心圆轴外径为 D , 内径为 d 。取距圆心为 ρ 、宽为 $d\rho$ 的环形微单元, 其微面积 $dA=2\pi\rho d\rho$ 。由

$$I_{\rho} = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$

取 $\alpha = \frac{d}{D}$, 得

$$I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \quad (8-14)$$

$$W_n = \frac{I_{\rho}}{\rho_{\max}} = \frac{I_{\rho}}{R} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \quad (8-15)$$

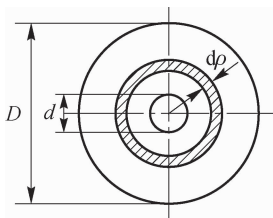


图 8-12

2. 实心圆轴

当 $\alpha=0$ 时, 即为实心圆轴, 有

$$I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} \quad (8-16)$$

$$W_n = \frac{\pi D^3}{16} \quad (8-17)$$

极惯性矩 I_{ρ} 的单位是 m^4 或 mm^4 等, 抗扭截面模量 W_n 的单位是 m^3 或 mm^3 等。

8.3.3 圆轴扭转时的变形

圆轴扭转时, 两横截面间绕轴线相对转过的角称为扭转角, 如图 8-13 所示。扭转变形用扭转角表示。相距为 l 的两横截面间的扭转角为

$$\varphi = \frac{M_n l}{GI_{\rho}} \quad (8-18)$$

式中, φ 为扭转角 (rad); GI_{ρ} 称为截面抗扭刚度, 反映了轴抵抗扭转变形的能力, GI_{ρ} 越大, 扭转变形 φ 越小。

将式(8-18)的等号两边同除 l , 得到单位长度的扭转角, 用 θ 表示。即

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_n}{GI_{\rho}} \quad (8-19)$$

式中, θ 的单位为 rad/m , 在工程计算中, 也常用 $^{\circ}/\text{m}$ 为单位, 则式(8-19)可改写成



$$\theta = \frac{M_n}{GI_\rho} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

(8-20)

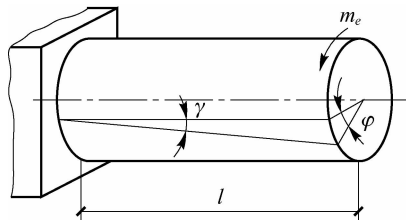


图 8-13

【例 8-4】 图 8-14(a)所示阶梯轴, AB 段直径 $d_1 = 120 \text{ mm}$, 长 $l_1 = 400 \text{ mm}$, BC 段直径 $d_2 = 100 \text{ mm}$, 长 $l_2 = 350 \text{ mm}$ 。扭转力偶矩为 $m_A = 22 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $m_B = 36 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $m_C = 14 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 已知材料的剪切弹性模量 $G = 80 \text{ GPa}$, 试求 AC 轴最大切应力, 并求 C 点处的截面相对于 A 点处截面的扭转角。

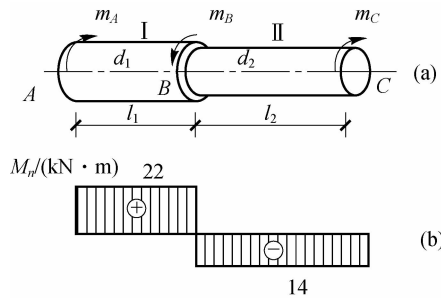


图 8-14

【解】 (1) 作扭矩图。采用截面法, 得

$$AB \text{ 段截面上的扭矩 } M_{n1} = (\text{左侧}) \quad \sum m_i = m_A = 22 \text{ kN} \cdot \text{m} (+)$$

$$BC \text{ 段截面上的扭矩 } M_{n2} = (\text{右侧}) \quad \sum m_i = m_C = 14 \text{ kN} \cdot \text{m} (-)$$

(2) 应力计算。虽两段扭矩 $M_{n1} > M_{n2}$, 但两段直径 $d_1 > d_2$, 故两段应力须分别计算后再比较。

$$AB \text{ 段内应力 } \tau_{1\max} = \frac{M_{n1}}{W_{n1}} = \frac{22 \times 10^6}{\frac{\pi}{16} \times 120^3} = 64.84 \text{ MPa}$$

$$BC \text{ 段内应力 } \tau_{2\max} = \frac{M_{n2}}{W_{n2}} = \frac{14 \times 10^6}{\frac{\pi}{16} \times 100^3} = 71.30 \text{ MPa}$$

根据计算结果可知, 轴最大剪应力在 BC 段, 值为 $\tau_{\max} = 71.30 \text{ MPa}$ 。

(3) 变形计算。两段扭矩、直径不同, 故两段变形需分别计算后再叠加。

$$AB \text{ 段内变形 } \varphi_{AB} = \frac{M_{n1} l_1}{GI_\rho} = \frac{22 \times 10^6 \times 400}{80 \times 10^3 \times \frac{\pi \times 120^4}{32}} = 5.4 \times 10^{-3} \text{ rad} (+)$$

$$BC \text{ 段内应力 } \varphi_{BC} = \frac{M_{n2} l_2}{GI_{\rho^2}} = \frac{14 \times 10^6 \times 350}{80 \times 10^3 \times \frac{\pi \times 100^4}{32}} = 6.24 \times 10^{-3} \text{ rad}(-)$$

则 AC 轴上的总变形 $\varphi_{AC} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} = 5.4 \times 10^{-3} - 6.24 \times 10^{-3} = -8.4 \times 10^{-4} \text{ rad}$

即 C 点处的截面相对于 A 点处截面的扭转角为 $8.4 \times 10^{-4} \text{ rad}$, 转角的转向与 m_C 一致。

8.4 平面弯曲梁横截面上的应力

在对梁进行强度计算时,除了确定梁在弯曲时横截面上的内力外,还需进一步研究梁横截面上的应力情况。剪力和弯矩是截面上分布内力的合成结果。如图 8-15 所示,在一横截面上取一微面积 dA ,由静力学关系可知,只有切向微内力 τdA 才能组成剪力 F_s ,只有法向微内力 σdA 才能组成弯矩 M 。所以在横截面的某点上,一般情况下既有正应力 σ 又有切应力 τ 。本节讨论平面弯曲时的应力,所讨论的梁至少有一个纵向对称面,且外力作用在该对称面内。

梁的横截面上只有弯矩而剪力为零的平面弯曲称为纯弯曲,如图 8-16 梁上 CD 段;而横截面上既有弯矩也有剪力的平面弯曲称为横力弯曲或剪力弯曲,如图 8-16 梁上 AC 段、DB 段。

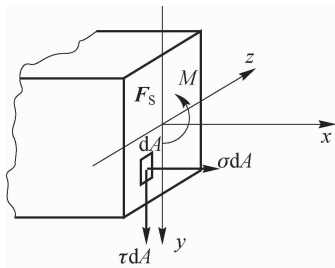


图 8-15

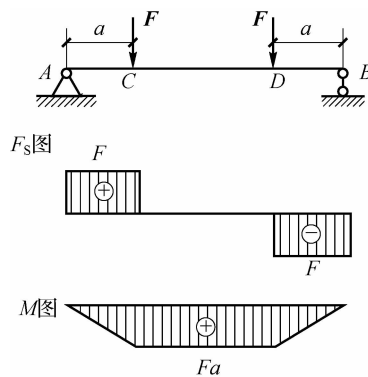


图 8-16

8.4.1 纯弯曲时梁横截面上的应力

本节首先研究平面弯曲中纯弯曲时的正应力。与研究圆轴扭转时的切应力相似,由实验观察入手,然后综合考虑几何、物理和静力学三个方面,推导出正应力计算公式。

1. 实验现象

取一根矩形截面梁,在中间段的表面画上纵向直线 $a_1 a_2, b_1 b_2$ 和横向直线 mm, nn 。如图 8-17(a)所示,在梁两端加一对力偶作用,梁发生纯弯曲。可观察到梁纯弯曲的变形现象如图 8-17(b)所示,其特点如下。

(1) 纵向线变成圆弧线,靠近凹边的纵向线 $a'_1 a'_2$ 缩短,靠近凸边的纵向线 $b'_1 b'_2$ 伸长,中间位置的纵向线长度不变。



(2) 横向线仍为直线 $m'm'$ 和 $n'n'$, 两横向线做相对转动, 但仍与变形后的纵向线正交。

2. 假设及推理

研究纯弯曲时梁横截面上的应力, 可做如下假设。

(1) 平面假设。梁变形后的横截面仍保持平面, 且与变形后的梁轴正交。

(2) 单向受力假设。将梁视为由一束纵向纤维组成, 每根纤维的变形只是轴向伸长或缩短, 纤维相互间无挤压作用。

由假设可得以下的推论。

(1) 变形后横截面与纵向线相正交, 即梁的纵、横截面上无剪应变, 也无切应力。

(2) 因纵纤维有的伸长, 有的缩短, 故横截面上有正应力存在, 且同一横截面上有的点为拉应力, 有的点为压应力。

(3) 由于中间纤维无伸缩, 则图 8-17(c) 所示梁的阴影线层既不伸长也不缩短, 称为中性层。中性层与截面的交线称为中性轴。

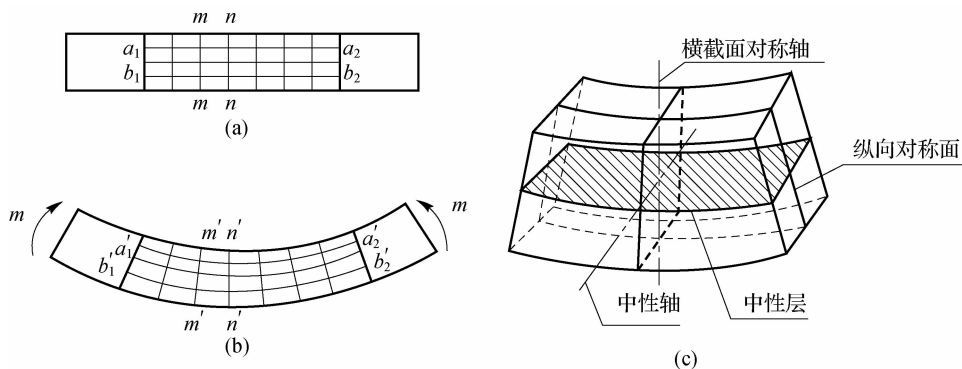


图 8-17

3. 应力分布特点

用 1—1 和 2—2 两横截面自图 8-17 所示的纯弯曲梁中截取 dx 微段来分析, 如图 8-18 所示。令 y 轴为横截面的对称轴, z 轴与截面的中性轴重合。由平面假设可知, 梁变形后两端面相对倾转了 $d\theta$ 角, 设中性层弧长 O_1O_2 的曲率半径为 ρ , 由于中性层纤维在变形后长度不变, 则

弧长为:

$$O_1O_2 = dx = \rho d\theta$$

距中性层为 y 的纤维 b_1b_2 的弧长度为:

$$b_1b_2 = (\rho + y) d\theta$$

得 b_1b_2 在变形后的线应变为:

$$\epsilon = \frac{(\rho + y) d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} \quad (8-21)$$

由式(8-21)可知, 同一横截面上各点的线应变与该点到中性轴的距离 y 成正比。据单向受力假设, 若应力在材料的比例极限范围内, 由胡克定律可知弯曲时横截面上任一点的正应力与该点到中性轴的距离 y 成正比。

经前面的分析可知: 梁发生纯弯曲时, 横截面上只有正应力, 没有切应力; 以中性轴为

界,一侧是拉应力,一侧为压应力;正应力的大小与点到中性轴的距离成正比,中性轴上各点的正应力为零,距中性轴越远的点,拉、压应力越大,最大值在距中性轴最远的边缘处,如图 8-19 所示。

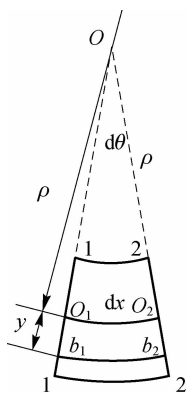


图 8-18

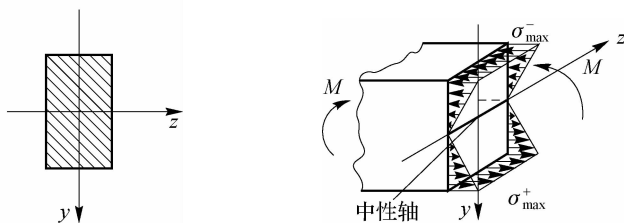


图 8-19

4. 中性轴位置的确定

根据横截面上各点正应力代数和为零,即横截面上没有轴力,可推定中性轴不但垂直截面的对称轴 y ,且通过截面的形心。

5. 弯曲正应力公式

经理论推导(略)得到梁纯弯曲时横截面上正应力 σ 的计算公式为

$$\sigma = \frac{My}{I_z} \quad (8-22)$$

式中, M 为截面上的弯矩; y 为点到中性轴的距离; I_z 为横截面对中性轴 z 的惯性矩,其值由截面的形状尺寸及中性轴的位置决定,单位是长度单位的四次方。 I_z 的表达式为

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (8-23)$$

横截面上的最大正应力发生在距中性轴最远的地方,其值为

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} = \frac{M}{W_z} \quad (8-24)$$

式中, W_z 为抗弯截面模量,单位是长度单位的三次方,表达式为

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad (8-25)$$



注意

应用式(8-22)、式(8-24)时,应将弯矩 M 和坐标 y 的数值和正负号一并代入,若得出的 σ 为正值,就是拉应力;若为负值,则为压应力。通常也可以根据梁的变形情况直接判断 σ 的正负:以中性轴为界,梁变形后靠近凸边一侧为拉应力;靠近凹边一侧为压应力。

式(8-22)的应用条件和范围为:式(8-22)虽然是由矩形截面梁在纯弯曲情况下推导出来的,但也适用于以 y 轴为对称轴的其他横截面形状的梁,如圆截面、工字形和 T 形截面梁。



经进一步分析证明,在剪力弯曲($F_s \neq 0$)的情况下,当梁的跨度 l 与梁横截面高 h 之比 $l/h > 5$ 时,横截面上的正应力变化规律与纯弯曲时几乎相同,故式(8-22)仍然可用,误差很小。

在推导式(8-22)过程中,应用了胡克定律,因此,若梁的材料不服从胡克定律或正应力超过材料的比例极限时,该式不适用。

式(8-22)是等截面直梁在平面弯曲情况下推导出来的,故不适用于非平面弯曲情况,也不适用于曲梁。若横截面形心连线(轴线)的曲率半径 ρ 与截面形心到最内缘距离 c 之比值大于 10,则按式(8-22)计算,误差不大。式(8-22)也可近似地用于变截面梁。

【例 8-5】 简支梁 AB 为矩形截面钢梁, $h=120$ mm, $b=60$ mm,如图 8-20(a)所示,梁长 $l=2$ m,荷载集度 $q=40$ kN/m,试求梁的最大正应力和跨中截面上 K 点(距 z 轴距离为 $h/4$)的弯曲正应力;若将截面横放,求梁的最大正应力。

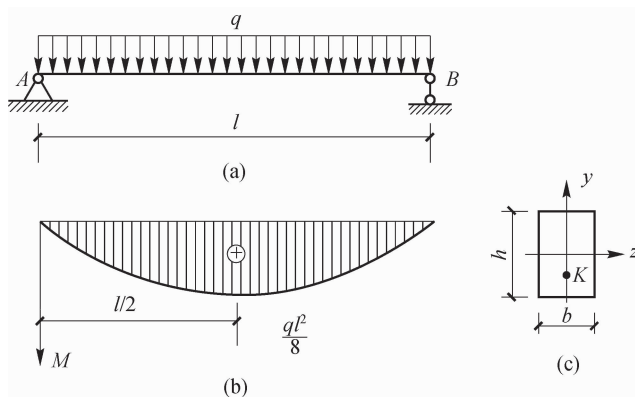


图 8-20

【解】 (1)画弯矩图,求最大弯矩。梁的弯矩图如图 8-20(b)所示,在跨中的截面有最大

$$\text{弯矩: } |M|_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{40 \times 2^2}{8} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(2) \text{求惯性矩。 } I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{60 \times 120^3}{12} = 8.64 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

(3)求最大应力。因危险截面 A 上的弯矩为正,故截面上边缘引起最大压应力,下边缘引起最大拉应力,由式(8-21)得

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{M_{\max} y_1}{I_z} = \frac{20 \times 10^6 \times 60}{8.64 \times 10^6} = 138.89 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max}^- = \frac{M_{\max} y_2}{I_z} = \frac{-20 \times 10^6 \times 60}{8.64 \times 10^6} = -138.89 \text{ MPa}$$

(4) K 点的正应力 σ_K 。

$$\text{则 } K \text{ 点的正应力: } \sigma_K = \frac{M y_K}{I_z} = -\frac{20 \times 10^6 \times 30}{8.64 \times 10^6} = 69.45 \text{ MPa}$$

(5)横放时梁的最大正应力。

横放时弯矩图不变,即最大弯矩值无变化,但中性轴为 y 轴,惯性矩值为

$$I_z = \frac{hb^3}{12} = \frac{60^3 \times 120}{12} = 2.16 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{M_{\max} z_1}{I_z} = \frac{20 \times 10^6 \times 30}{2.16 \times 10^6} = 277.78 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max}^- = -\frac{M_{\max} z_2}{I_z} = -\frac{20 \times 10^6 \times 30}{2.16 \times 10^6} = -277.78 \text{ MPa}$$

8.4.2 惯性矩计算与平行移轴公式

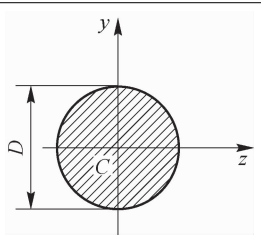
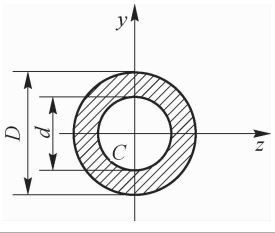
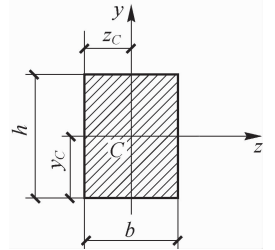
在应用梁弯曲的正应力式(8-22)时,需预先计算出截面对中性轴 z 的惯性矩 $I_z = \int_A y^2 dA$ 。显然, I_z 只与截面的几何形状和尺寸有关,它反映了截面的几何性质。

1. 简单截面的惯性矩

对于一些简单图形截面,如矩形、圆形等,其惯性矩可由定义式 $I_z = \int_A y^2 dA$ 直接求得。

表 8-2 给出了简单截面图形的惯性矩和抗弯截面系数。表中 C 为截面形心, I_z 为截面对 z 轴的惯性矩, I_y 为截面对 y 轴的惯性矩。各种型钢截面的惯性矩可直接从型钢规格表中查得。

表 8-2 简单截面图形的惯性矩和抗弯截面系数

图形	形心轴位置	惯性矩	抗弯截面系数
	截面圆心	$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$	$W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32}$
	截面圆心	$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4)$ $\alpha = \frac{d}{D}$	$W_z = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$ $\alpha = \frac{d}{D}$
	$z_c = \frac{b}{2}$ $y_c = \frac{h}{2}$	$I_z = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$	$W_z = \frac{bh^2}{6}$ $I_y = \frac{hb^2}{6}$

2. 组合截面的惯性矩

工程中很多梁的横截面是由若干简单图形组合而成的,如图 8-21 所示的工字型截面



梁。求这种组合截面对中性轴 z 的惯性矩时,可将其分为三个矩形 I, II 和 III,据惯性矩的定义式 $I_z = \int_A y^2 dA$,整个截面对 z 轴的惯性矩 I_z 应等于三个矩形部分分别对 z 轴的惯性矩 I_{zI}, I_{zII} 与 I_{zIII} 之和。即

$$I_z = \int_{A_I} y^2 dA + \int_{A_{II}} y^2 dA + \int_{A_{III}} y^2 dA = I_{zI} + I_{zII} + I_{zIII}$$

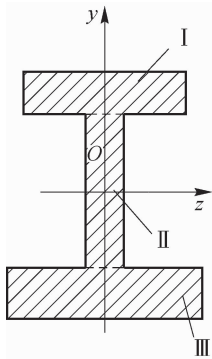


图 8-21

同理,由多个简单形状组成的截面的惯性矩等于各组成部分惯性矩之和,即

$$I_z = \sum I_{zi} \quad (8-26)$$

3. 平行移轴公式

当中性轴 z 轴不通过分截面的形心时,不能直接用前面给出的简单图形对形心轴的惯性矩公式来计算各组成部分的惯性矩,而需要用平行移轴公式计算。

如图 8-22 所示,设任意形状的已知截面的面积为 A ,通过截面形心 C 的 y_c, z_c 轴称为形心轴,截面对该二轴的惯性矩分别为 I_{y_c}, I_{z_c} 。则截面对分别与 y_c, z_c 轴平行且相距分别为 b, a 的 y, z 轴的惯性矩分别为

$$I_z = I_{z_c} + a^2 A, I_y = I_{y_c} + b^2 A \quad (8-27)$$

式(8-27)称为平行移轴公式,即截面对任一轴的惯性矩,等于它对平行于该轴的形心轴的惯性矩,加上截面面积与两轴间距离平方的乘积。

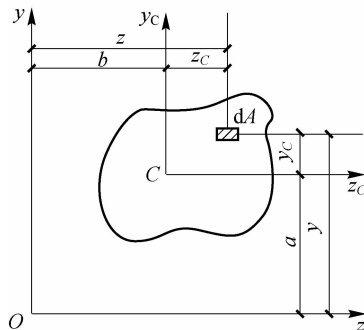


图 8-22

【例 8-6】 已知图 8-23 所示 T 形截面, 尺寸单位为 mm, 求此截面对形心轴 z_c (垂直于对称轴 y) 的惯性矩。

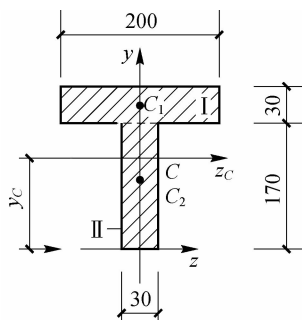


图 8-23

【解】 (1) 确定整个截面的形心 C 和形心轴 z_c 的位置。

将截面划分成 I, II 两个矩形, 取参考轴 z 与截面底边重合, 两部分截面面积及其形心 C_1, C_2 至 z 轴距离分别为

$$A_1 = 200 \times 30 = 6\,000 \text{ mm}^2 \quad y_{C1} = 170 + 15 = 185 \text{ mm}$$

$$A_2 = 170 \times 30 = 5\,100 \text{ mm}^2 \quad y_{C2} = 85 \text{ mm}$$

据理论力学形心坐标公式, 可得整个截面的形心 C 与 z 轴的距离为

$$y_c = \frac{A_1 y_{C1} + A_2 y_{C2}}{A_1 + A_2} = \frac{6\,000 \times 185 + 5\,100 \times 85}{6\,000 + 5\,100} = 139 \text{ mm}$$

(2) 求各分截面对形心轴 z_c 的惯性矩。

根据表 8-2 中的公式, 两矩形对自身形心轴 z_1, z_2 (平行 z_c 轴) 的惯性矩分别为

$$I_{z1} = \frac{200 \times 30^3}{12} = 4.5 \times 10^5 \text{ mm}^4 \quad I_{z2} = \frac{30 \times 170^3}{12} = 1.23 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

z_1, z_2 距 z_c 的距离分别为 $a_1 = CC_1 = 46 \text{ mm}$, $a_2 = C_2C = 54 \text{ mm}$, 由平行移轴公式(8-27)得, 两矩形对形心轴 z_c 的惯性矩分别为

$$I_{z_c I} = I_{z1} + a_1^2 A_1 = 4.5 \times 10^5 + 46^2 \times 6\,000 = 1.31 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_c II} = I_{z2} + a_2^2 A_2 = 1.23 \times 10^7 + 54^2 \times 5\,100 = 2.72 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

(3) 求整个截面对形心轴 z_c 的惯性矩。

$$I_{z_c} = I_{z_c I} + I_{z_c II} = 1.31 \times 10^7 + 2.72 \times 10^7 = 4.03 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

8.4.3 梁的切应力

梁在剪切弯曲时, 横截面上不仅有正应力 σ , 还有切应力 τ 。一般情况下, 正应力 σ 是决定梁的强度的主要因素, 切应力 τ 影响较小, 因此, 这里只介绍几种常见截面的最大切应力。

1. 矩形截面梁

已知一矩形截面梁的横截面高为 h , 宽为 b , 在截面上的 y 轴方向有剪力 F_s , 如图 8-24(a) 所示。对于矩形截面梁的切应力做如下的假设: 截面上任一点的切应力的方向与剪力 F_s 平行; 距中性轴 z 轴等高处各点的切应力相等。由此可得到切应力 τ 沿横截面高度方向按二



次抛物线规律变化,如图 8-24(b)所示。

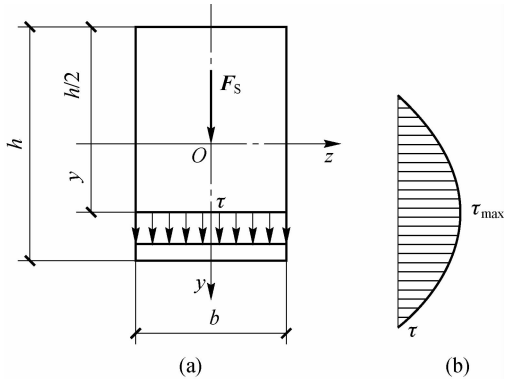


图 8-24

距中性轴 y 处横线上的切应力 τ 为

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b} \quad (8-28)$$

式中, F_S 为截面上的剪力; I_z 为截面的惯性矩; b 为截面上所求应力点处截面的宽度; S_z^* 为所求点以外截面面积对中性轴的静矩, 即

$$S_z^* = \int_A y dA \quad (8-29)$$

其中, 简单图形的静矩表达式为

$$S_z^* = A \cdot y_C \quad (8-30)$$

式中, A 为图形面积; y_C 为图形的形心坐标。

由式(8-28)可知, 在横截面上、下边缘处, 切应力为 0; 在中性轴上, 切应力最大, 其值为

$$\tau_{\max} = \frac{3F_S}{2A} \quad (8-31)$$

式中, A 为横截面面积。

2. 工字形截面梁

经计算可知, 由上、下两翼缘和中间腹板组成的工字形截面的剪力 F_S 绝大部分发生在腹板面积上, 且腹板上的切应力变化不大, 最小切应力与最大切应力相差不多, 如图 8-25 所示。最大切应力仍在中性轴上, 其值近似等于剪力 F_S 在腹板面积上的平均值, 即

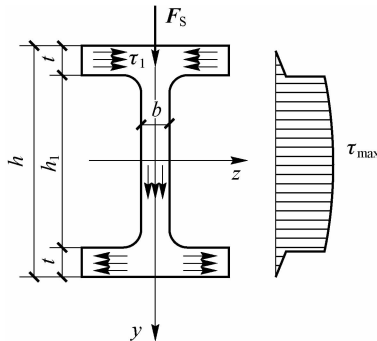


图 8-25

$$\tau_{\max} \approx \frac{F_S}{h_1 b} \quad (8-32)$$

式中, b 为腹板宽度, h_1 为腹板高度。

3. 圆形及圆环形截面梁

经计算可知, 圆形或圆环形截面的最大切应力仍发生在中性轴上, 如图 8-26 和图 8-27 所示。

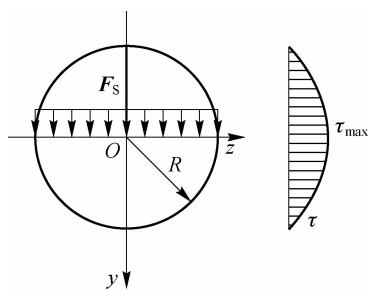


图 8-26

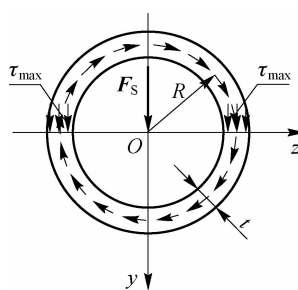


图 8-27

圆形的最大切应力值为
$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{F_S}{A} \quad (8-33)$$

圆环形的最大切应力值为
$$\tau_{\max} = 2 \frac{F_S}{A} \quad (8-34)$$

综合上述各种截面形状梁的弯曲最大切应力, 写成一般公式为

$$\tau_{\max} = k \frac{F_S}{A} \quad (8-35)$$

即最大切应力为截面的平均切应力乘以系数 k 。不同截面形状 k 值不同: 矩形截面, $k = \frac{3}{2}$; 工字形截面, $k = 1$; 圆形截面, $k = \frac{4}{3}$; 圆环形截面, $k = 2$ 。

8.5 梁弯曲时的变形

8.5.1 挠度与转角

受弯构件除了满足强度要求外, 通常还要满足刚度的要求, 以防止构件出现过大的变形, 保证构件能够正常工作。例如, 楼面梁变形过大时, 会使下面的抹灰层开裂、脱落; 吊车梁的变形过大, 就会影响吊车的正常运转。因此, 在设计受弯构件时, 必须根据不同的工作要求, 将构件的变形限制在一定的范围以内。在求解超定梁的问题时, 也需要考虑梁的变形条件。

研究梁的变形, 首先讨论如何度量和描述弯曲变形。图 8-28 表示一具有纵向对称面的梁(以轴线 AB 表示), xy 坐标系在梁的纵向对称面内。在荷载 P 作用下, 梁产生弹性弯曲变形, 轴线在 xy 平面内变成一条光滑连续的平面曲线 AB' , 该曲线称弹性挠曲线(简称挠曲



线)。与此同时,梁的横截面将产生两种位移——线位移和角位移(即挠度和转角)。工程中用挠度和转角来度量梁的变形。

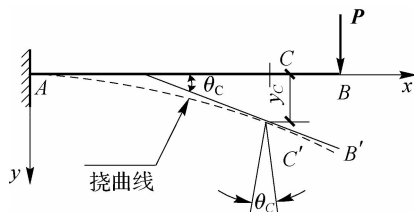


图 8-28

1. 挠度

梁轴线上任一点 C (即横截面的形心),在变形后移到 C' 点,即产生垂直于梁轴线的线位移。梁上任一横截面的形心在垂直于梁原轴线方向的线位移,称为该截面的挠度,用符号 y 表示,例如,图 8-28 所示的 C 处截面的挠度为 y_C 。挠度与坐标轴 y 轴的正方向一致时为正,反之为负。

2. 转角

梁变形时,横截面还将绕其中性轴转过一定的角度,即产生角位移,梁任一横截面绕其中性轴转过的角度称为该截面的转角,用符号 θ 表示,单位为 rad ,规定顺时针转为正。例如,图 8-28 所示的 C 处截面的转角为 θ_C 。

由图 8-28 可知,挠度 y 与转角 θ 的数值随截面的位置 x 而变化, y 和 θ 均为 x 的函数,则挠曲线方程的一般形式为

$$y=f(x) \quad (8-36)$$

由微分学知,挠曲线上任一点的切线的斜率 $\tan \theta$ 等于曲线函数 $y=f(x)$ 在该点的一次导数,即

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = y'$$

因工程中构件常见的 θ 值很小, $\tan \theta \approx \theta$, 则有

$$\theta = \frac{dy}{dx} = y' \quad (8-37)$$

即梁上任一横截面的转角等于该截面的挠度 y 对 x 的一阶导数。

8.5.2 挠曲线的近似微分方程及其积分

1. 挠曲线近似微分方程

为了得到挠度方程和转角方程,首先需推出一个描述弯曲变形的基本方程——挠曲线近似微分方程。弯曲变形挠曲线的曲率表达式为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI} \quad (8-38)$$

式(8-38)为研究梁变形的基本公式,用来计算梁变形后中性层(或梁轴线)的曲率半径 ρ 。该

式表明:中性层的曲率 $\frac{1}{\rho}$ 与弯矩 M 成正比,与 EI 成反比。 EI 称为梁的抗弯刚度,它反映了梁抵抗弯曲变形的能力。

从梁上取出一微段 dx ,如图8-29所示,梁变形后相距为 dx 的两截面相对转动了 $d\theta$ 角,两横截面间挠曲线的弧长为 ds 。它与曲率半径的关系为

$$ds = \rho(x) d\theta \quad \text{或} \quad \frac{1}{\rho(x)} = \frac{d\theta}{ds}$$

由于梁的变形很小, $\cos \theta \approx 1$, 则 $ds = \frac{dx}{\cos \theta} = dx$, 故 $\frac{1}{\rho(x)} = \frac{d\theta}{dx}$ 。再由式(8-37)、式(8-38)并考虑坐标正向的选取, 可得梁的挠曲线近似微分方程为

$$y'' = -\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \quad (8-39)$$

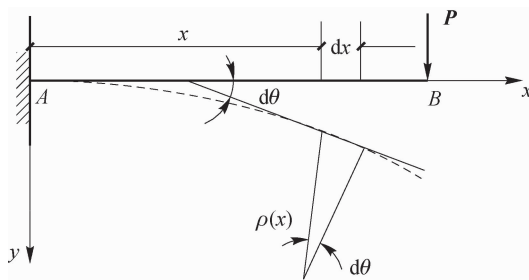


图 8-29

注意

在应用式(8-39)时,应取 y 轴的方向向下为正。这样,等式两边的符号才能一致。因为当弯矩 $M(x)$ 为正时,梁的挠曲线向下凸,此时,曲线的二阶导数 y'' 在所选取的坐标系中是负值。

2. 用积分法求梁的变形

对于等截面梁, EI =常数,式(8-39)可改写为

$$EIy'' = -M(x)$$

积分一次得

$$EI\theta = EIy' = -\int M(x) dx + C \quad (8-40)$$

再积分一次,即得

$$EIy = -\iint M(x) dx dx + Cx + D \quad (8-41)$$

式(8-40)、式(8-41)中的积分常数 C 和 D 可通过梁的边界条件来决定。边界条件包括两种情况,一是梁上某些截面的已知位移条件。例如,铰链支座处的截面上 $y=0$;固定端的截面上 $\theta=0, y=0$ 。二是考虑到整个挠曲线的光滑及连续性,得到各段梁交界处的变形连续条件。

【例 8-7】 图 8-30 所示的悬臂梁 AB 受均布荷载 q 作用,已知梁长 l ,抗弯刚度为 EI ,试求最大的截面转角及挠度。

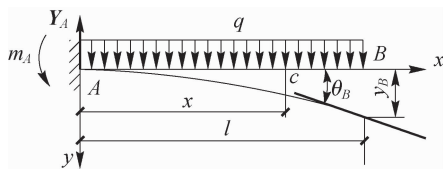


图 8-30

【解】 以梁左端 A 为原点,取坐标系如图 8-30 所示。

(1) 求支反力。由平衡方程可得

$$Y_A = ql \quad M_A = \frac{1}{2}ql^2$$

列弯矩方程。在距原点 x 处取截面,列出弯矩方程为

$$M(x) = -M_A + Y_A x - \frac{1}{2}qx^2 = -\frac{1}{2}ql^2 + qlx - \frac{1}{2}qx^2$$

列挠曲线近似微分方程,并进行积分。挠曲线近似微分方程为

$$EIy'' = -M(x) = \frac{1}{2}ql^2 - qlx + \frac{1}{2}qx^2$$

两次积分得

$$EIy' = +\frac{1}{2}ql^2x - \frac{1}{2}qlx^2 + \frac{1}{6}qx^3 + C \quad (1)$$

$$EIy = +\frac{1}{4}ql^2x^2 - \frac{1}{6}qlx^3 + \frac{1}{24}qx^4 + Cx + D \quad (2)$$

(2) 确定积分常数。由悬臂梁固定端边界条件知,该截面的转角和挠度均为零,即在 $x=0$ 处, $\theta_A=0, y'_A=0, y_A=0$ 。将两边界条件代入式①、式②,得

$$C=0 \quad D=0$$

(3) 确定转角方程和挠度方程。将得出的积分常数 C, D 代入式①、式②,得转角方程和挠度方程为

$$EIy' = \frac{1}{2}ql^2x - \frac{1}{2}qlx^2 + \frac{1}{6}qx^3$$

$$EIy = \frac{1}{4}ql^2x^2 - \frac{1}{6}qlx^3 + \frac{1}{24}qx^4$$

(4) 求最大转角和最大挠度。由图可见在自由端 B 处的截面有最大转角和最大挠度。将 $x=l$ 代入上式,可得

$$\theta_{B\max} = \frac{ql^3}{6EI} \quad y_{B\max} = \frac{ql^4}{8EI} (\downarrow)$$



提示

对简支梁和悬臂梁在简单荷载作用下的挠度和转角可以直接利用表 8-3 中的公式计算。

8.5.3 用叠加法求梁的变形

由于简单荷载作用下的挠度和转角可以直接在表 8-3 中查得,而梁的变形与荷载成线

性关系,因此,可以用叠加法求梁的变形。即分别计算每种荷载单独作用下所引起的转角和挠度,然后再将它们代数叠加,就得到梁在几种荷载共同作用下的转角和挠度。

表 8-3 简支梁和悬臂梁在简单荷载作用下的转角和挠度

序号	梁的形式与荷载	挠曲线方程	转角	挠度(绝对值)
1		$y = \frac{Fx^2}{6EI} (3l - x)$	$\theta_B = \frac{Fl^2}{2EI}$	$y_B = \frac{Fl^3}{3EI}$
2		$y = \frac{Fx^2}{6EI} (3a - x)$ ($0 \leq x \leq a$) $y = \frac{Fa^2}{6EI} (3x - a)$ ($a \leq x \leq l$)	$\theta_B = \frac{Fa^2}{2EI}$	$y_B = \frac{Fa^2}{6EI} (3l - a)$
3		$y = \frac{qx^2}{24EI} (6l^2 + x^2 - 4lx)$	$\theta_B = \frac{ql^3}{6EI}$	$y_B = \frac{ql^4}{8EI}$
4		$y = \frac{mx^2}{2EI}$	$\theta_B = \frac{ml}{EI}$	$y_B = \frac{ml^2}{2EI}$
5		$y = \frac{Mx^2}{2EI}$ ($0 \leq x \leq a$) $y = \frac{Ma}{EI} \left(\frac{a}{2} - x \right)$ ($a \leq x \leq l$)	$\theta_B = \frac{ma}{EI}$	$y_B = \frac{ma}{2EI}$ $\left(l - \frac{a}{2} \right)$
6		$y = \frac{Fx}{48EI} (3l^2 - 4x^2)$ ($0 \leq x \leq \frac{l}{2}$)	$\theta_A = -\theta_B = \frac{Fl^2}{16EI}$	$y_C = \frac{Fl^3}{48EI}$



续表

序号	梁的形式与荷载	挠曲线方程	转角	挠度(绝对值)
7		$y = \frac{Fbx}{6lEI}(l^2 - x^2 - b^2)$ $(0 \leq x \leq l)$ $y = \frac{F}{EI} \left[\frac{b}{6l}(l^2 - b^2 - x^2)x + \frac{1}{6}(x-a)^3 \right]$ $(a \leq x \leq l)$	$\theta_A = \frac{Fab(l+b)}{6lEI}$ $\theta_B = -\frac{Fab(l+a)}{6lEI}$	若 $a > b$ $y_C = \frac{Fb}{48EI}(3l^2 - 4b^2)$ $y_{\max} = \frac{Fb}{9\sqrt{3}EI}(l^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}$ $y_{\max} \text{ 在 } x = \frac{1}{3}\sqrt{l^2 - b^2} \text{ 处}$
8		$y = \frac{qx}{24EI}(l^3 - 2lx^2 + x^3)$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{ql^3}{24EI}$	$y_C = \frac{5ql^4}{384EI}$
9		$y = \frac{mx}{6lEI}(l^2 - x^2)$	$\theta_A = \frac{ml}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{ml}{3EI}$	$y_C = \frac{ml^2}{16EI}$ $y_{\max} = \frac{ml^2}{9\sqrt{3}EI}$ $y_{\max} \text{ 在 } x = \frac{l}{\sqrt{3}} \text{ 处}$
10		$y = -\frac{mx}{6lEI}(l^2 - 3b^2 - x^2)$ $(0 \leq x \leq a)$ $y = -\frac{m(l-x)}{6lEI}(3a^2 - 2lx + x^2)$ $(a \leq x \leq l)$	$\theta_A = -\frac{m}{6lEI}(l^2 - 3b^2)$ $\theta_B = -\frac{m}{6lEI}(l^2 - 3a^2)$ $\theta_C = -\frac{m}{6lEI}(l^2 - 3a^2 - 3b^2)$	$y_{1\max} = \frac{m}{9\sqrt{3}lEI}(l^2 - 3b^2)^{\frac{3}{2}}$ $\text{(发生在 } x = \frac{\sqrt{l^2 - 3b^2}}{3} \text{ 处)}$ $y_{2\max} = \frac{m}{9\sqrt{3}lEI}(l^2 - 3a^2)^{\frac{3}{2}}$ $\text{(发生在 } x = \frac{\sqrt{l^2 - 3a^2}}{3} \text{ 处)}$

【例 8-8】 用叠加法求图 8-31 中悬臂梁的 B 点的挠度和转角, 已知梁的 EI 为常数。

【解】 查表 8-3 得均布荷载与集中力单独作用时的 B 点挠度分别为

$$y_{Bq} = \frac{ql^4}{8EI} \quad y_{BF} = -\frac{Fl^3}{3EI}$$

则两荷载共同作用的跨中挠度为 $y_B = y_{Bq} + y_{BF} = \frac{ql^4}{8EI} - \frac{Fl^3}{3EI}$

均布荷载与集中力单独作用时的 B 点转角分别为

$$\theta_{Bq} = \frac{ql^3}{6EI} \quad \theta_{BF} = -\frac{Fl^2}{2EI}$$

$$\text{求得 } B \text{ 处截面的转角为 } \theta_B = \theta_{BF} + \theta_{Bq} = -\frac{Fl^2}{2EI} + \frac{ql^3}{6EI}$$

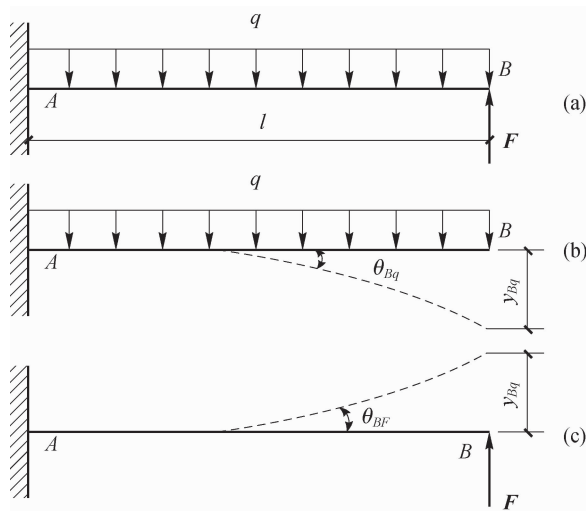


图 8-31

8.6 复杂应力状态

8.6.1 应力状态的概述

杆件受外力作用发生变形时,往往杆内同一截面上的内力元素不是单一的,而且各点的应力会随该点在截面上的位置不同而变化,过杆上任一点沿不同方位的斜截面上的应力值又各不相同。例如,扭转轴横截面上与圆心距离不同的点的切应力值不等;拉压杆横截面上只有正应力,斜截面上既有正应力又有切应力。在研究基本变形时,理论上只需针对横截面上的单向应力的最大值建立强度条件,但是,实际构件的强度破坏并不总是发生在横截面上,如铸铁的压缩破坏就出现在斜截面上,因此,必须研究受力构件上某一点在各个不同方位的截面上的应力情况,即该点的应力状态。

1. 点的应力状态的研究方法

研究某点处的应力状态时,可以围绕该点取一个边长为无穷小的正六面体(单元体),然后对这个单元体进行分析。如图 8-32 所示,外伸梁在力作用下发生弯曲变形,为了分析梁的上边缘上 A 点的应力状态,可围绕 A 点以两个横截面、两个纵向水平面和两个纵向铅垂面截取一个单元体,如图 8-32(a)所示。

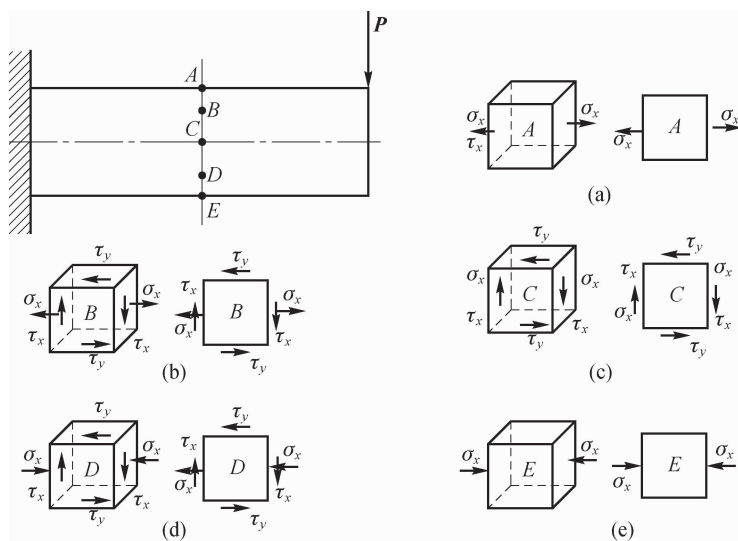


图 8-32

由于单元体的边长无穷小,可做以下两点假定:一是单元体各个面上的应力是均匀分布的;二是单元体上任意两个平行面上的应力,其大小和性质完全相同。

分析 A 点的受力情况可知,该单元体只有左右两个面上有正应力 σ ,且 $\sigma = \frac{M_A}{W_z}$,可用图 8-32(a)所示的平面单元表示。用同样的方法在梁的下边缘 E 点,中性层处的 C 点及其他的任意两点 B, D 处截取单元体,分别得到这些点的应力状态,如图 8-32(b),(c),(d),(e)所示。这些单元体均称为原始单元体。如果单元体上三对互相垂直平面上的应力已知,便可利用截面法,由静力平衡条件求出过该点任意斜截面上的应力,从而确定这一点的应力状态。

2. 主平面和主应力

如图 8-32(a),(e)所示单元体的三个面上都没有切应力,只有正应力。一般将单元体上切应力等于零的平面称为主平面,作用在主平面上的正应力称为主应力。经证明,过受力构件上任意一点总可以找到由三个相互垂直的主平面组成的单元体,这称为主单元体,相应的三个主应力,分别用 σ_1, σ_2 和 σ_3 表示,并按它们的代数值大小顺序排列,即 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。

3. 应力状态的分类

一点的应力状态通常用该点的三个主应力来表示。只有一个主应力不等于零的应力状态,称为单向应力状态,如图 8-32(a),(e)所示。当两个主应力不为零时,称为二向应力状态,又称平面应力状态,如图 8-32(b),(c),(d)所示。当三个主应力均不为零时,称三向应力状态。

8.6.2 平面应力状态分析

工程中许多受力构件的危险点都是处于平面应力状态,对这类构件进行强度计算时,需

要知道构件在危险点处主应力的大小及方位。因此,必须先确定单元体任一截面上的应力,也就是了解该点的应力状态。

在平面应力状态下研究斜截面上的应力时,所指斜截面并不是任意方位的面,而是与主应力等于零的主平面相垂直的斜截面。图 8-33(a)所示为平面应力状态最一般的情况,在外法线分别与 x 轴和 y 轴重合的两对平面上,应力 σ_x, τ_x 和 σ_y, τ_y 都是已知的。现用与前后两个面垂直的某个平面去截此单元体,得一斜截面 ef ,如图 8-33(b)所示。设此斜截面 ef 的外法线 n 与 x 轴正向间的夹角为 α ,并规定从 x 轴逆时针转到外法线 n 的 α 角为正,反之为负,则此斜截面上的应力 σ_α 和 τ_α 的求取如下。

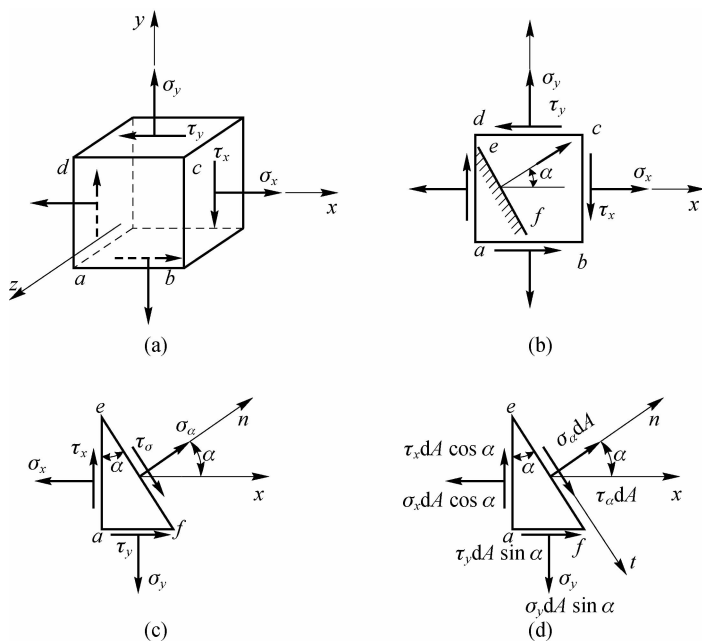


图 8-33

用截面法取楔形体 $ea f$ 为研究对象,如图 8-33(c)所示。设斜截面 ef 的面积为 dA ,则截面 ae 和截面 af 的相应面积分别为 $dA \cos \alpha$ 和 $dA \sin \alpha$,由切应力互等定律可知 $\tau_x = \tau_y$,由平衡条件 $\sum F_{in} = 0, \sum F_{ii} = 0$ 可得

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \quad (8-42)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \quad (8-43)$$

式(8-42)和式(8-43)为计算平面应力状态下斜截面上应力的公式,这种方法称解析法。需要指出,正应力 σ_x, σ_y 和 σ_α 以拉应力为正,反之为负;切应力 τ_x, τ_y 和 τ_α 以对单元体内任一点产生顺时针转向为正,反之为负。

图 8-34 所示为拉压杆横截面上某点的原始单元体,其上 $\sigma_y = 0, \tau_x = 0$,则式(8-42)和式(8-43)可简化为

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha \quad (8-44)$$



$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha \quad (8-45)$$

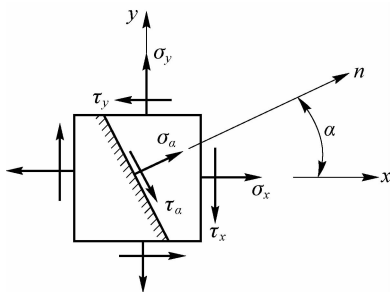


图 8-34

式(8-44)和式(8-45)为拉压杆的斜截面应力计算公式。根据这两式,可得以下两个结论。

当 $\alpha=0^\circ$ 时,横截面上剪应力 τ_{α} 为零,而正应力 σ_{α} 为最大值,即

$$\sigma_{\alpha=0} = \sigma_{\max} = \sigma$$

当 $\alpha=45^\circ$ 时,剪应力 τ_{α} 为最大值,即

$$\tau_{\alpha=45^\circ} = \tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma$$

8.6.3 主应力和最大切应力的确定

利用斜截面上的应力解析式(8-42)和式(8-43)可以求出应力的极值,即主应力公式为

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad (8-46)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad (8-47)$$

主平面法线方向与 x 轴正向间的夹角为

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (8-48)$$

由式(8-48)可求出两个解 α_0 和 $\alpha'_0 = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$, 它们都是主平面的方位角,即可得到 α_0 和 $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ 两个互相垂直的主平面。

极值切应力公式为

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad (8-49)$$

$$\tau_{\min} = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} \quad (8-50)$$

极值切应力的作用平面与主平面成 45° 夹角。经理论分析可知,在复杂应力状态下,最大剪应力公式为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (8-51)$$

最大剪应力的作用平面与主应力 σ_1, σ_3 所在的平面成 45° 夹角, 而与 σ_2 所在的平面垂直。

【例 8-9】 图 8-35 所示为原始单元体的应力状态, 试求: (1) $\alpha=45^\circ$ 时的 $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ 值。(2) 主应力和最大切应力。

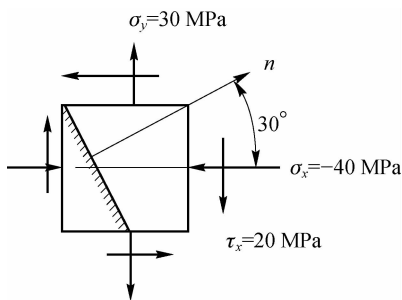


图 8-35

【解】 (1) 求 $\alpha=30^\circ$ 时的 $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ 值。

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \\ &= \frac{-40 + 30}{2} + \frac{-40 - 30}{2} \cos 60^\circ - 20 \sin 60^\circ = -39.82 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha = \frac{-40 - 30}{2} \sin 60^\circ + 20 \cos 60^\circ = -20.31 \text{ MPa}$$

(2) 求主应力和最大切应力。

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{aligned} \right\} = \frac{-40 + 30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-40 - 30}{2}\right)^2 + 20^2} = \begin{cases} 45.31 \text{ MPa} \\ -35.31 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 40.31 \text{ MPa}$$

思考与练习

一、简答题

1. 什么是应力? 内力和应力的关系是什么?
2. 拉(压)杆件横截面上有什么应力? 如何分布? 最大值在何处?
3. 圆轴扭转时横截面上有什么应力? 如何分布? 最大值在何处?
4. 直径和长度相同, 但材料不同的圆轴, 在相同扭矩作用下, 它们的最大切应力是否相同? 扭转角是否相同? 为什么?
5. 从力学角度分析, 为什么空心圆轴比实心圆轴合理?



6. 梁弯曲时横截面上有什么应力？如何分布？最大值在何处？
7. 何为扭转角？如何计算扭转角？
8. 简述挠度、截面转角的概念。
9. 简述中性层和中性轴的概念。
10. 在计算圆轴扭转的外力偶矩的公式中各量的意义及单位各是什么？

二、分析计算题

1. 如图 8-36 所示,中间开槽的直杆承受轴向荷载 $F=10\text{ kN}$ 的作用力,已知 $h=25\text{ mm}$, $h_0=10\text{ mm}$, $b=20\text{ mm}$ 。试求杆内的最大正应力。

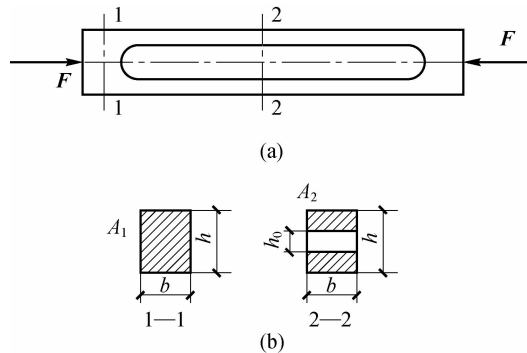


图 8-36

2. 图 8-37 所示为阶梯杆,材料 $E=200\text{ GPa}$,横截面积 $A_1=240\text{ mm}^2$, $A_2=160\text{ mm}^2$,试求杆的总变形及最大应变 ϵ_{\max} 和最大正应力。

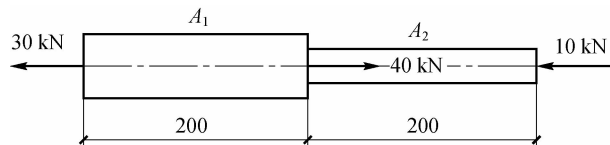


图 8-37

3. 一根直径为 $d=30\text{ mm}$ 的钢拉杆,在轴向荷载 80 kN 的作用下,在 1.5 m 的长度内伸长了 1.15 mm ,材料的比例极限为 210 MPa ,泊松系数为 0.27 ,试求:①拉杆横截面上的正应力;②材料的弹性模量 E ;③杆的直径改变量 Δd 。

4. 搅拌设备传动轴如图 8-38 所示,已知轴的直径 $d=50\text{ mm}$ 。试求:①轴的最大切应力;②截面 I—I 半径为 20 mm 圆周处的切应力;③从强度观点看,三个轮子如何排列合理?

5. 如图 8-39 所示,已知 $M_{e1}=6\text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{e2}=4\text{ kN}\cdot\text{m}$,轴外径 $D=120\text{ mm}$,空心轴内径 $d=60\text{ mm}$,画扭矩图,求最大切应力 τ_{\max} 。当 $G=80\text{ GPa}$ 时,求 C 点处的截面相对 A 点处的截面所转过的角度。

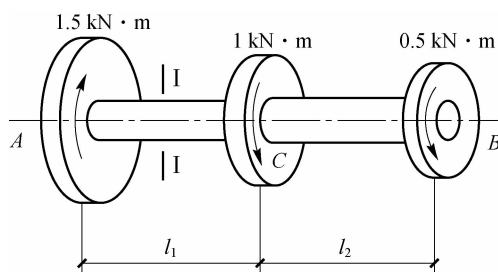


图 8-38

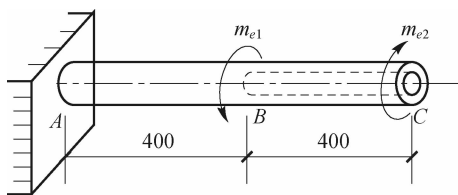


图 8-39

6. 已知空心圆轴的外径 $D=100$ mm, 内径 $d=50$ mm, 材料的弹性模量 $G=80$ GPa, 若测得间距 $l=2.7$ m 的两截面间的相对扭转角 $\varphi=1.8^\circ$ 。求: ①轴的最大切应力; ②当轴以 $n=80$ r/min 的转速转动时, 轴传递的功率是多少?

7. 一矩形截面梁如图 8-40 所示, 尺寸单位为 cm。①计算 $m-m$ 截面上 A, B, C, D 各点处的正应力, 并指明是拉应力还是压应力; ②计算 $m-m$ 截面上 A, B, C, D 各点处的剪应力; ③计算整根梁的最大弯曲正应力和最大切应力。

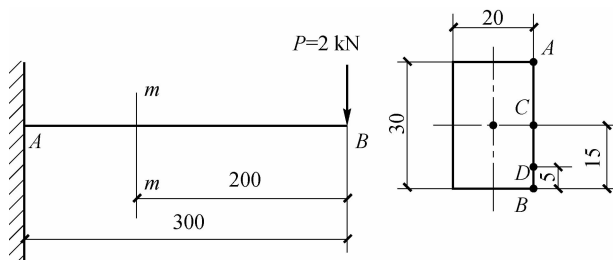


图 8-40

8. 已知如图 8-41 所示梁截面的惯性矩 $I_z=10^4$ cm⁴, 求最大拉应力和最大压应力的大小及所在截面位置(梁截面尺寸单位: mm)。

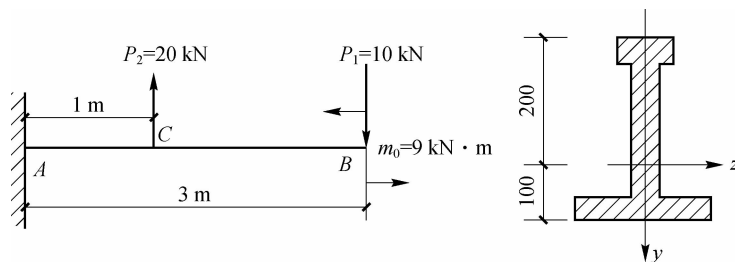


图 8-41



9. 如图 8-42 所示为一圆形截面铸铁外伸梁, 截面直径为 $d=200\text{ mm}$, 求最大正应力和最大切应力。

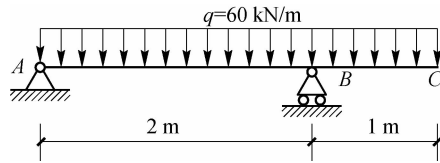


图 8-42

10. 试标出图 8-43 中单元体的主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, 并指出它们各属于何种应力状态(应力单位: MPa)。

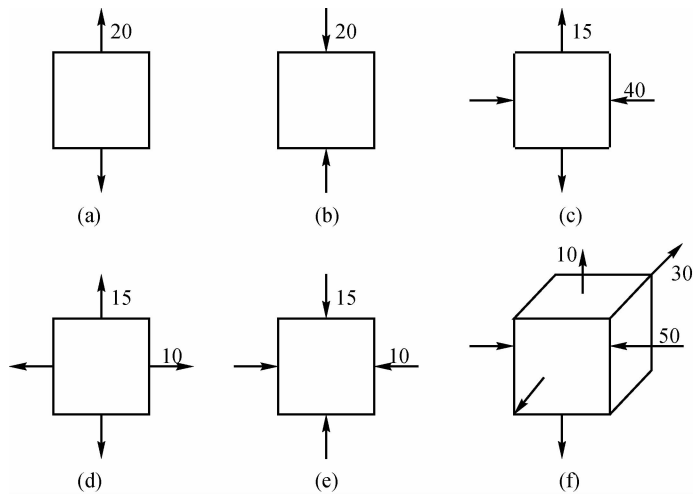


图 8-43

11. 试用解析法求图 8-44 中各单元体指定斜截面上的应力(单位: MPa)。

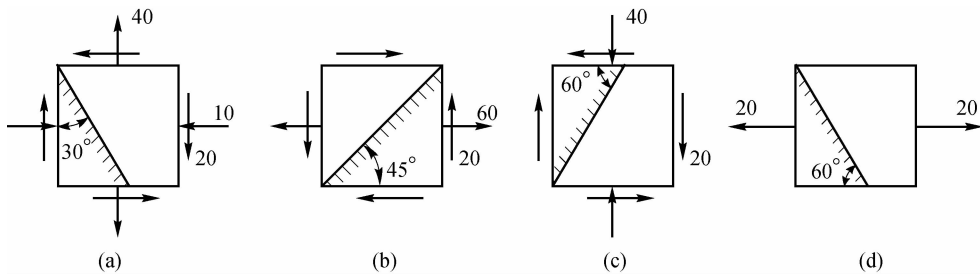


图 8-44

12. 已知单元体如图 8-45 所示(应力单位: MPa), 试用解析法确定主应力和最大剪应力。

13. 如图 8-46 所示各梁抗弯刚度均为 EI , 试求各梁的转角方程、挠度方程及指定截面的转角和挠度。

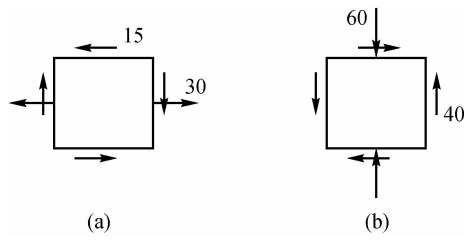


图 8-45

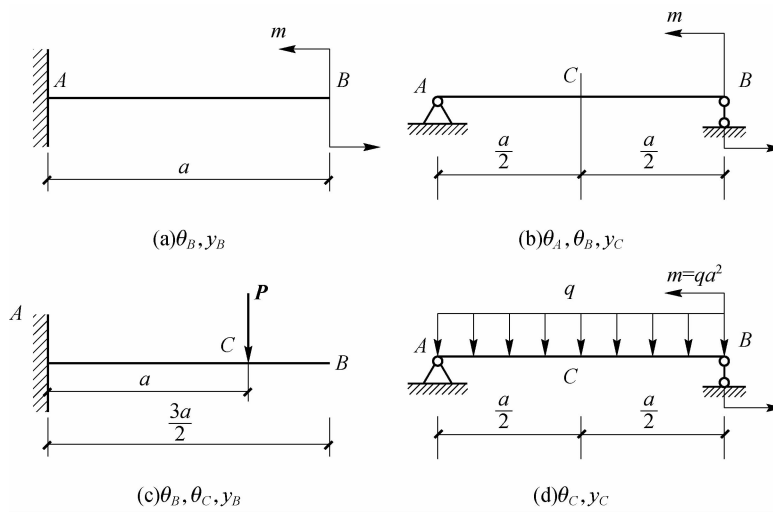


图 8-46