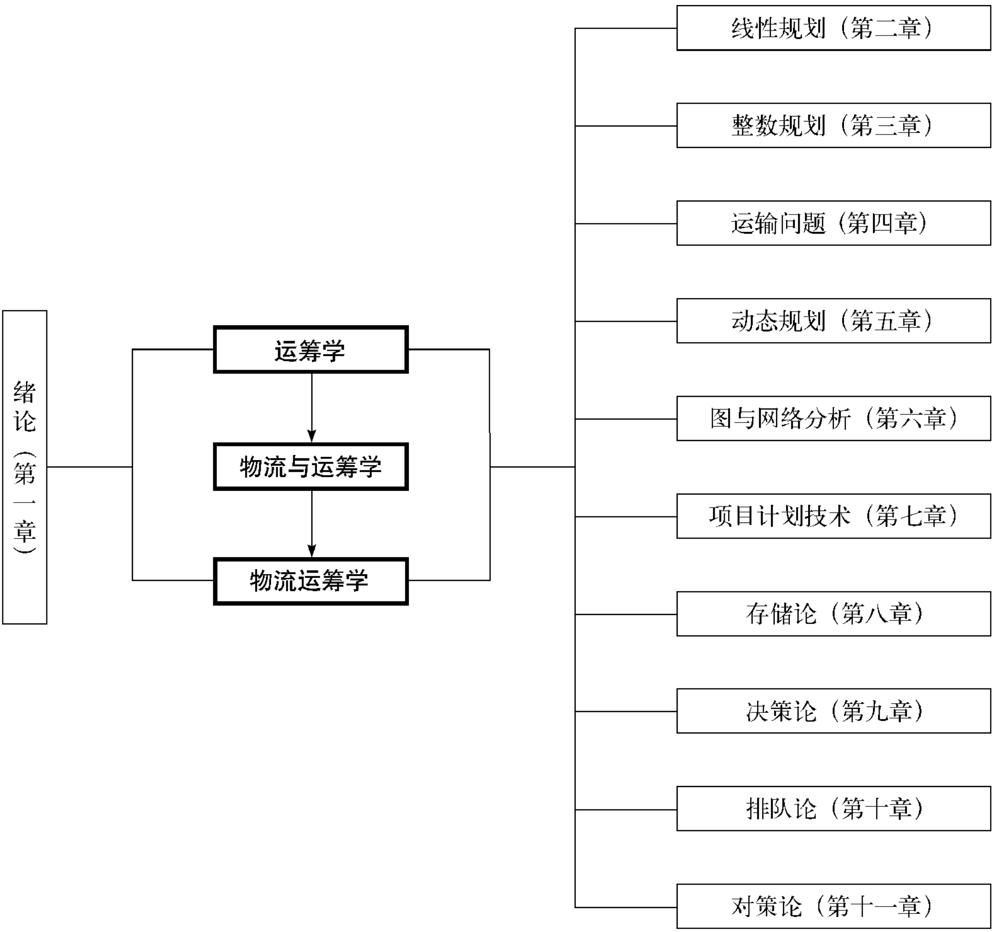
第二章

线 性 规 划



物流运筹学结构模型

知识目标

- 掌握线性规划的基本形式及标准形式；
- 掌握单纯形法计算过程；
- 理解对偶问题；
- 掌握对偶问题的求法及性质；
- 了解灵敏度分析。

技能目标

- 能够结合实际情况建立线性规划的模型，并能利用单纯形法求解。

线性规划是运筹学中理论成熟、应用最为广泛的一个分支。它研究在给定的条件下（各种资源的约束）如何使目标达到最优，或者如何耗用最少的资源去实现既定目标的问题。在物流管理领域，线性规划主要应用于资源分配问题，如物资调运、配送和人员分配等。

第一节　线性规划问题及其数学模型

一、问题的提出

在物流管理中经常会遇到这样一类问题，即如何合理利用有限的人力、物力、财力等资源，以便得到最好的经济效果。

【例 2-1】 某企业要将产品包装成Ⅰ、Ⅱ两种规格，需要 A、B 两种原材料的数量、获利情况及两种材料数量限制可参见表 2-1，两种规格的产品各包装多少件可获利最多？

表 2-1　例 2-1 相关数据

规格＼产品	A	B	利润/(元/件)
Ⅰ	4	2	12
Ⅱ	5	1	9
材料限制	20	8	

解　设 x_1, x_2 分别为Ⅰ、Ⅱ两种规格产品的包装件数。由 A、B 两种原材料的数量限制以及 x_1, x_2 的非负性知 x_1, x_2 需满足下面的条件：

$$\begin{cases}4x_1+5x_2\leqslant 20\\2x_1+x_2\leqslant 8\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

该企业的目标是获得最大的利润，令 z 表示利润，则 $z=12x_1+9x_2$。综上所述，该包装问题可用数学模型表示为：

$$\max z=12x_1+9x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}4x_1+5x_2\leqslant 20\\2x_1+x_2\leqslant 8\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

【例 2-2】 某物流公司要把若干单位的产品从两个仓库 $A_i(i=1,2)$发送到零售点 $B_j(j=1,2,3,4)$，仓库 A_i 供应的产品数量为 a_i，零售点 B_j 所需的产品的数量为 b_j。假设供给总量和需求总量相等，且已知从仓库 A_i 运一个单位产品往 B_j 的运价为 c_{ij}。问应如何组织运输才能使总运费最小？

解 设从仓库 A_i 运往 B_j 的产品数量为 $x_{ij}(i=1,2;j=1,2,3,4)$。

费用函数为 $\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}$，目标为总运费最小。

需要满足的条件为：从仓库运出总量不超过可用总量，运入零售点的总量不低于需求总量。由于总供给量等于总需求量，所以都是等号，而且数量非负。即：

$$\begin{cases}x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4}=a_i, & i=1,2\\x_{1j}+x_{2j}=b_j, & j=1,2,3,4\\x_{ij}\geqslant 0, & i=1,2;j=1,2,3,4\end{cases}$$

综上所述，该运输问题可用数学模型表示为：

$$\min z=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4}=a_i, & i=1,2\\x_{1j}+x_{2j}=b_j, & j=1,2,3,4\\x_{ij}\geqslant 0, & i=1,2;j=1,2,3,4\end{cases}$$

上面两个例子的共同特征有：

(1) 每一个问题都由一组决策变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 来表示某一方案，一般情况下这些变量的取值是非负且连续的。

(2) 存在一定的约束条件，这些约束条件可以用一组线性的等式或不等式来表示。

(3) 都有一个要求达到的目标，它用决策变量的线性函数(称为目标函数)来表示。按照具体问题的不同，要求目标实现最小或最大。

求一组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使之既满足线性约束条件，又使具有线性表达式的目

标函数取得极大值或极小值的一类最优化问题称为线性规划问题，简称线性规划（LP）。决策变量、约束条件和目标函数是其三个基本要素，将其用数学模型表示，可以有以下几种方式：

1. 线性规划问题模型的一般形式

$$\max(\min) z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{2-1}$$

2. 紧缩形式

$$\max(\min) z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i, i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{2-2}$$

3. 矩阵和向量的形式

$$\max(\min) z = \boldsymbol{CX}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \boldsymbol{AX} \leqslant (=, \geqslant) \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-3}$$

其中

$$\boldsymbol{C} = (c_1, c_2, \cdots, c_n); \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

二、线性规划问题的标准形式

线性规划问题的表达式具有各种不同的形式，为了讨论方便，将线性规划问题统一变换为标准形式，规定如下：

$$\max z = \boldsymbol{CX}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-4}$$

其中 $\boldsymbol{b}$ 是非负向量。

将线性规划问题化为标准形的方法如下：

1. 目标函数的标准化

$$\min z = \boldsymbol{CX}，令\ z' = -z = -\boldsymbol{CX}，则化为\ \max z' = -\boldsymbol{CX}$$

2. 约束条件的标准化

约束条件是"≤"类型，如某个约束为 $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j \leqslant b_{i_0}$，则引入变量 $x_{n+1} \geqslant 0$，使约束变为 $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j + x_{n+1} = b_{i_0}$，变量 x_{n+1} 称为松弛变量。

约束条件是"≥"类型，如某个约束为 $\sum_{j=1}^{n} a_{i_1 j} x_j \geqslant b_{i_1}$，则引入变量 $x_{n+2} \geqslant 0$，使约束变为 $\sum_{j=1}^{n} a_{i_1 j} x_j - x_{n+2} = b_{i_1}$，变量 x_{n+2} 一般称为剩余变量，但也有称松弛变量的。

若某个 $x_j \leqslant 0$，则令 $x'_j = -x_j$，显然 $x'_j \geqslant 0$。

若某个 x_j 符号不限，则令 $x_j = x'_j - x''_j$，其中 $x'_j, x''_j \geqslant 0$。

若约束右端项 $b_i < 0$，只需将等式或不等式两边同乘以(－1)即可。

【例 2-3】 将下列线性规划问题化为标准形：

$$\min z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 \leqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3\ \text{取值无约束} \end{cases}$$

解　令 $x_1 = -x'_1$，无约束变量 $x_3 = x'_3 - x''_3$，引入松弛变量 x_4 和剩余变量 x_5，于是得到标准形为：

$$\max z = x'_1 - 2x_2 - 3x'_3 + 3x''_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x'_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 + x_4 = 9 \\ 3x'_1 + x_2 + 2x'_3 - 2x''_3 - x_5 = 4 \\ 4x'_1 + 2x_2 + 3x'_3 - 3x''_3 = 6 \\ x'_1, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

第二节　线性规划模型的求解

在求解线性规划之前，首先了解线性规划问题的解的一般概念。

在式(2-1)中，满足所有约束条件的向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为线性规划问题的可行解，所有可行解构成的集合称为可行域。

在可行域中使得目标函数值最大(或最小)的可行解,称为线性规划问题的最优解。

最优解的全体称为最优解集合。

最优解对应的目标函数值称为最优值。

一、图解法

对于只含有两个变量的线性规划问题,可以通过在平面上作图的方法求解。下面用例子来介绍图解法的求解。

【例 2-4】　用图解法求解例 2-1。

$$\max z = 12x_1 + 9x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leqslant 20 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解　画出问题的可行域。将 $4x_1 + 5x_2 \leqslant 20$ 和 $2x_1 + x_2 \leqslant 8$ 在坐标系中表示出来,其与两个正半轴所围起来的区域即为所求(见图 2-1 阴影部分)。

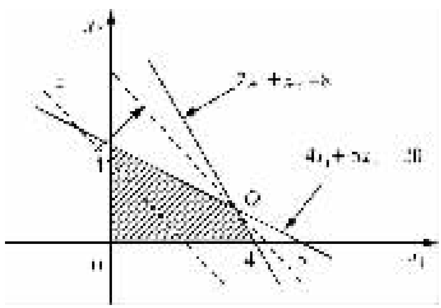


图 2-1　图解法

分析目标函数 $z = 12x_1 + 9x_2$,将它看成是以 z 为参数,以 $-4/3$ 为斜率的一簇平行线 $x_2 = -\frac{4}{3}x_1 + \frac{1}{9}z$。位于同一平行线上的点具有相同的函数值,称它为“等值线”(见图 2-1 中虚线)。当 z 值由小变大时,平行线沿法线方向向右上方移动,当移动到 Q 点时,z 值达到最大化,因为这时已经到了可行域的边界。因此有:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 20 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10/3 \\ x_2 = 4/3 \end{cases}$$

即为最优解,最优值为 $12 \times \frac{10}{3} + 9 \times \frac{4}{3} = 52$。

例 2-4 中得到问题的最优解是唯一的,但对一般线性规划问题,求解结果还可

能出现另外三种情况：

1．无穷多最优解

把例 2-4 中的目标函数改为 $2x_1+x_2$，则参数 z 所在平行线与约束条件 $2x_1+x_2\leqslant 8$ 的边界平行。当 z 值由小变大时，将与 $2x_1+x_2\leqslant 8$ 的边界重合。重合部分对应的 z 值相同，但其上有无数个点。此时，该线性规划问题有无穷多个最优解。

2．无界解

利用图解法求解下述线性规划问题：

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-2x_1+x_2\leqslant 4\\ x_1-x_2\leqslant 2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

利用图解法求解（见图 2-2）。从图中可以看出来，该问题可行域无界，目标函数值可以增大到无穷大，称这种情况为无界解。

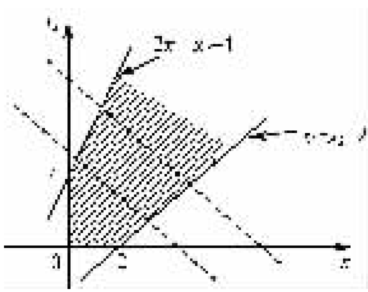


图 2-2　无界解的情况

3．无可行解

如果在例 2-1 的模型中增加一个约束条件 $x_1+x_2\geqslant 5$，该问题的可行域为空集，即无可行解，也不存在最优解。

由上面的分析知，线性规划问题的解有四种可能：有唯一最优解、有无穷多个最优解、有可行解但无最优解（无界解）、无可行解。

图解法直观、方便，但是对于变量个数多于两个的问题求解时就不再可行，因此介绍另外一种线性规划的求解方法——单纯形法。

二、单纯形法

考虑线性规划的标准形式

$$\max z = \boldsymbol{CX}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m,\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$，并假定可行域 $D=\{\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n\mid\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}\geqslant 0\}$ 不空，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩的，即 $r(\boldsymbol{A})=m$，否则的话表明有多余的约束，可以去掉。

令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}),\boldsymbol{X}=(x_B,x_N)^{\mathrm{T}}$，由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 知 $\boldsymbol{B}x_B+\boldsymbol{N}x_N=\boldsymbol{b}$，两边同时乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 得 $x_B+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}x_N=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，从而 $x_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}x_N$。令 $x_N=0,\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},0)^{\mathrm{T}}$。

由上面的分析可得如下定义：

设 $\boldsymbol{B}$ 是约束矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 m 阶满秩子方阵，则称 $\boldsymbol{B}$ 为一个基；$\boldsymbol{B}$ 中 m 个线性无关的列向量称为基向量，变量 $\boldsymbol{X}$ 中与之对应的 m 个分量称为基变量，其余变量为非基变量，令所有的非基变量取值为 0，得到的解 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},0)^{\mathrm{T}}$ 称为相应于 $\boldsymbol{B}$ 的基解。若 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$ 则称基解为基可行解，这时对应的基 $\boldsymbol{B}$ 为可行基。

如果 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}>0$ 则称该基可行解为非退化的，如果一个线性规划的所有基可行解都是非退化的则称该规划为非退化的。

【例 2-5】　考虑问题：

$$\max z=x_1-x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=-2\\ x_1-2x_2+x_4=2\\ x_1+x_2+x_5=5\\ x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4,5\end{cases}$$

系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&0&0\\1&-2&0&1&0\\1&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

找其三维的线性无关列向量组，得基为

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

对应的基解分别为 $\boldsymbol{X}_{(1)}=(0,0,2,2,5)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{X}_{(2)}=(-1,0,0,3,6)^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{X}_{(1)}$ 为基可行解，$\boldsymbol{X}_{(2)}$ 不是基可行解。

单纯形法的基本原理：寻找一种规则，从一个基可行解转移到另一个基可行解，目标函数值是增大的，即"顶点转换，目标上升"。

为了书写规范和便于计算，对单纯形法的计算设计了一种专门表格，称为单纯形表。不妨假设 $\boldsymbol{A}$ 的前 m 列构成可行基 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},0)^{\mathrm{T}}$ 为它对应的基可行解，对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 作初等变换：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,m+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,m+1} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{m,m+1} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix}$$

对应的单纯形表见表 2-2。

表 2-2 单纯形表

$c_j \to$			c_1	$\cdots$	c_m	$\cdots$	c_j	$\cdots$	c_n
$\boldsymbol{C}_B$	基	$\boldsymbol{b}$	x_1	$\cdots$	x_m	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n
c_1	x_1	b'_1	1		0		a'_{1j}		a'_{1n}
c_2	x_2	b'_2	0		0		a'_{2j}		a'_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
c_m	x_m	b'_m	0		1		a'_{mj}		a'_{mn}
$\sigma_j = c_j - z_j$			0		0		$c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a'_{ij}$		$c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i a'_{in}$

表 2-2 中的第二列和第三列分别代表 $\boldsymbol{X}$ 的基变量及其对应的取值。$\sigma_j = c_j - z_j$ 称为检验数。

单纯形法的计算步骤主要有四步：

步骤 1：求初始基可行解，列出它的单纯形表。

步骤 2：最优性检验。若 $\sigma_j \leqslant 0 (j=1,\cdots,n)$，则最优解已找到，计算终止；否则，令 $\sigma_k = \max\{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\}$，$x_k$ 作为换入变量。

步骤 3：若对于 $1 \leqslant i \leqslant m$，$a'_{ik} \leqslant 0$，则该线性规划问题有无界解；否则，计算 $\theta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \{\frac{b'_i}{a'_{ik}} \mid a'_{ik} > 0\} = \frac{b'_l}{a'_{lk}}$，则 x_l 作为换出变量。

步骤 4：求得在新的基变量下的单纯形表，转步骤 2。

【例 2-6】 用单纯形法求解下面线性规划问题：

$$\min z = -x_2 + 2x_3$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

解 选 x_1, x_4, x_5 为初始的基变量，则对应的基矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

因此得单纯形表见表 2-3。

表 2-3　例 2-6 单纯形表 1

$c_j \rightarrow$			0	1	-2	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	基	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_1	2	1	-2	1	0	0
0	x_4	1	0	1	-3	1	0
0	x_5	2	0	1	-1	0	1
$\sigma_j=c_j-z_j$			0	1	-2	0	0

$\sigma_2>0$，则 $\boldsymbol{X}=(2,0,0,1,2)^{\mathrm{T}}$ 不是最优解，x_2 作为换入基变量。

$\theta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\left\{\dfrac{b'_i}{a'_{i2}}\middle| a'_{i2}>0\right\}=\min\left\{\dfrac{1}{1},\dfrac{2}{1}\right\}=1$，因此选 x_4 作为换出基变量，得到新的单纯形表见表 2-4。

表 2-4　例 2-6 单纯形表 2

$c_j \rightarrow$			0	1	-2	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	基	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_1	4	1	0	-5	2	0
1	x_2	1	0	1	-3	1	0
0	x_5	1	0	0	2	-1	1
$\sigma_j=c_j-z_j$			0	0	1	-1	0

$\sigma_3>0$，则 $\boldsymbol{X}=(4,1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 不是最优解，x_3 作为换入基变量。

$\theta=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\left\{\dfrac{b'_i}{a'_{i3}}\middle| a'_{i3}>0\right\}=\min\left\{\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{1}{2}$，因此选 x_5 作为换出基变量，得到新的单纯形表见表 2-5。

表 2-5　例 2-6 单纯形表 3

$c_j \rightarrow$			0	1	-2	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	基	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_1	13/2	1	0	0	$-1/2$	5/2
1	x_2	5/2	0	1	0	$-1/2$	3/2
-2	x_3	1/2	0	0	1	$-1/2$	1/2
$\sigma_j=c_j-z_j$			0	0	0	$-1/2$	$-1/2$

至此，所有的 $\sigma_j \leqslant 0(j=1,\cdots,5)$，则 $\boldsymbol{X}=(13/2,5/2,1/2,0,0)^{\mathrm{T}}$ 是该线性规划问题的最优解，对应的目标函数值为 $z=-x_2+2x_3=-3/2$。

注意，在用单纯形法求解时，线性规划必须是标准形式的。对于单纯形法初始基可行解的寻找可以采用大 M 法和两阶段法，在此不作详细介绍。

第三节　线性规划对偶问题与灵敏度分析

一、对偶问题的提出

从另一个角度来考虑例 2-1，假设决策者不想包装这两种产品，而是把原材料出售，那么决策者就要考虑给每种材料定价的问题。设 y_1，y_2 分别表示原材料的单价，若用 4 单位 A 材料和 2 单位 B 材料可包装一件产品Ⅰ，获得利润 12 元，则原材料出售时应不低于包装一件产品Ⅰ的利润，即 $4y_1+2y_2\geqslant 12$，同理知 $5y_1+y_2\geqslant 9$，决策者的收入为 $\omega=20y_1+8y_2$。从决策者的角度希望 ω 越大越好，但从买者的角度则需考虑他的支付愈少愈好，因此决策者只能在满足大于或等于所有产品的利润条件下，提出一个尽可能低的价格，为此需求解的线性规划问题为：

$$\min \omega = 20y_1+8y_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}4y_1+2y_2\geqslant 12\\5y_1+y_2\geqslant 9\\y_1,y_2\geqslant 0\end{cases}$$

一般称这个线性规划问题为例 2-1 线性规划问题的对偶问题，例 2-1 称为原问题。

对偶问题与原问题之间的对应关系见表 2-6。

表 2-6　原问题与对偶问题的对应关系

原问题（或对偶问题）	对偶问题（或原问题）
目标函数 $\max z$	目标函数 $\min \omega$
变量 $\begin{cases}n\text{ 个}\\\geqslant 0\\\leqslant 0\\\text{无约束}\end{cases}$	$\left.\begin{matrix}n\text{ 个}\\\geqslant\\\leqslant\\=\end{matrix}\right\}$约束条件

（续表）

原问题（或对偶问题）	对偶问题（或原问题）
约束条件$\begin{cases} m\text{个} \\ \leqslant \\ \geqslant \\ = \end{cases}$	$\left.\begin{matrix} m\text{个} \\ \geqslant 0 \\ \leqslant 0 \\ \text{无约束} \end{matrix}\right\}$变量
约束条件右端项	目标函数变量的系数
目标函数变量的系数	约束条件右端项

【例 2-7】 求下述线性规划问题的对偶问题：

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geqslant 5 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 \leqslant 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \text{ 无约束} \end{cases}$$

解 原问题有三个约束条件，则对偶问题的变量为三个，设为 y_1, y_2, y_3，则由表 2-6 中的对应关系，可以直接写出上述问题的对偶问题，即：

$$\max \omega = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geqslant 2 \\ y_1 + y_3 \leqslant 3 \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \leqslant -5 \\ y_1 - y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geqslant 0, y_2 \leqslant 0, y_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

二、对偶问题的基本性质

由于任意形式的线性规划问题都可化成标准形，为叙述方便，只考虑标准形的原问题（式 2-5）和其对偶问题（式 2-6）。

原问题

$$\max z = \boldsymbol{CX}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-5}$$

对偶问题

$$\min \omega = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} \geqslant \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{Y} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2-6}$$

（1）对称性：对偶问题的对偶是原问题。

（2）弱对偶性：设$\overline{\boldsymbol{X}}$是原问题的可行解，$\overline{\boldsymbol{Y}}$是对偶问题的可行解，则 $\boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{X}} \leqslant \overline{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$。

由弱对偶性知，原问题为无界解，则其对偶问题无可行解。原问题无可行解时，

其对偶问题具有无界解或无可行解。因此,可以应用这两个结论来判断对偶问题解的情况。

【例 2-8】 已知线性规划问题:

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}-x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 2\\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 1\\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0\end{cases}$$

试用对偶理论证明上述线性规划问题有无界解。

证明 该问题存在可行解,如 $\boldsymbol{X}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$,上述问题的对偶问题为:

$$\min \omega = 2y_1 + y_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}-y_1 - 2y_2 \geqslant 1\\ y_1 + y_2 \geqslant 1\\ y_1 - y_2 \geqslant 0\\ y_1, y_2 \geqslant 0\end{cases}$$

由第一个约束条件知对偶问题无可行解,因原问题可行,故有无界解。

(3) 强对偶性:若原问题有最优解,那么对偶问题也有最优解,且目标函数值相等。

(4) 互补松弛性:在线性规划的最优解当中,若 $\boldsymbol{X}^*$、$\boldsymbol{Y}^*$ 分别是问题(2-5)和问题(2-6)的可行解,$\boldsymbol{X}_s$ 和 $\boldsymbol{Y}_s$ 是它的松弛变量的可行解,则 $\boldsymbol{X}^*$ 和 $\boldsymbol{Y}^*$ 是最优解当且仅当 $\boldsymbol{Y}_s\boldsymbol{X}^*=0$ 和 $\boldsymbol{Y}^*\boldsymbol{X}_s=0$。

当原问题(或对偶问题)的最优解已知,就可以应用强对偶性和互补松弛性求出对偶问题(或原问题)的最优解。因此,可以选择原问题和对偶问题中一个比较容易求解的,最终可以同时得到原问题和对偶问题的最优解和最优值。

【例 2-9】 已知下面的线性规划问题的对偶问题最优解和最优值分别是 $\boldsymbol{Y}^*=(0,20,0)^{\mathrm{T}}$,$z^*=100$,求原问题的最优解和最优值。

$$\min \omega = 20x_1 + 90x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_1 - 12x_2 \leqslant 5\\ x_1 + 4x_2 \geqslant 5\\ 3x_1 + 10x_2 \geqslant 13\\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

解 由强对偶性知原问题的最优值为 100。设最优解为 $\boldsymbol{X}^*=(x_1^*, x_2^*)^{\mathrm{T}}$,则 $20x_1^*+90x_2^*=100$,又 $y_2^*=20\neq0$,由互补松弛性条件知 $x_1^*+4x_2^*=5$,从而解得 $x_1^*=5$,$x_2^*=0$,$\boldsymbol{X}^*=(5,0)^{\mathrm{T}}$ 即为原问题的最优解。

对偶问题的最优解还有一个经济解释,被称作是影子价格。线性规划问题中,

当某资源 i 增加一个单位而其他资源都不变时，所引起目标函数最优值的增量称为资源 i 的影子价格。影子价格是对资源在生产中做出的贡献而做的估价。

三、对偶单纯形法

对偶单纯形法是求解线性规划的另一基本方法。它是根据对偶原理和单纯形法的原理而设计出来的，因此称为对偶单纯形法。不要简单理解为是求解对偶问题的单纯形法。

求解某线性规划问题时，可以从它的一个基解（非基可行解）开始，逐步迭代，直到迭代到基可行解为止。在迭代过程中，始终保持该问题的对偶问题的解为基可行解，同时目标函数更优。

【例 2-10】 用对偶单纯形法求解：

$$\min z = 9x_1 + 12x_2 + 15x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 12 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 \geqslant 14 \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,3 \end{cases}$$

解 将模型转化为

$$\max z' = -9x_1 - 12x_2 - 15x_3$$
$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -10 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -12 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 + x_6 = -14 \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1,\cdots,6 \end{cases}$$

其对应初始单纯形表见表 2-7。

表 2-7 标准化线性规划模型初始单纯形表

$c_j \to$			-9	-12	-15	0	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	基	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	-10	-2	-2	-1	1	0	0
0	x_5	-12	-2	-3	-1	0	1	0
0	x_6	-14	-1	-1	$\boxed{-5}$	0	0	1
$\sigma_j = c_j - z_j$			-9	-12	-15	0	0	0

观察表 2-7 会发现，检验数行值均小于等于零。检验数行对应着该线性规划问题对偶问题的解，若其值均小于等于零，说明该解为其对偶问题的可行解。此时，该

线性规划问题的对应的基解存在负数，因此不可行。保持其对偶问题解的可行性，找到相应的换出换入变量，进行迭代，其规则如下：

（1）找换出变量。在标准化后的线性规划问题的初始单纯形表 $\boldsymbol{b}$ 列找到最小的负数，其对应的变量作为换出变量。例如，该例中选择变量 x_6 为换出变量。若找不到负数，则已达最优。

（2）确定换入变量。计算检验数行与换出变量所在行为负的系数对应值的比值，找到比值最小的系数对应的变量作为换入变量。若该行不存在负数，则原问题无可行解，停止计算。该例中，换出变量对应行系数比值为$\left(\frac{-9}{-1},\frac{-12}{-1},\frac{-15}{-5}\right)$，最小值为 3，因此换入变量为 x_3。

（3）迭代。以换出变量与换入变量对应位置的系数为主元素，进行初等行变换，得到新的单纯形表，再继续步骤(1)，直到找到最优解或证明无可行解为止。该例中主元素为基变量 x_6 与变量 x_3 系数交叉位置的(−5)。迭代过程见表 2-8。

表 2-8　对偶单纯形法迭代过程

$c_j \rightarrow$			−9	−12	−15	0	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	基	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	−36/5	−9/5	−9/5	0	1	0	−1/5
0	x_5	−46/5	−9/5	$\boxed{-14/5}$	0	0	1	−1/5
−15	x_3	14/5	1/5	1/5	1	0	0	−1/5
$\sigma_j = c_j - z_j$			−6	−9	0	0	0	−3
0	x_4	−9/7	$\boxed{-9/14}$	0	0	1	−9/14	−1/14
−12	x_2	23/7	9/14	1	0	0	−5/14	1/14
−15	x_3	15/7	1/14	0	1	0	1/14	−3/14
$\sigma_j = c_j - z_j$			−3/14	0	0	0	−45/14	−33/14
−9	x_1	2	1	0	0	−14/9	1	1/9
−12	x_2	2	0	1	0	1	−1	0
−15	x_3	2	0	0	1	1/9	0	−2/9
$\sigma_j = c_j - z_j$			0	0	0	−1/3	−3	−7/3

表 2-8 最后一行，检验数行均小于等于零，基变量对应的解均大于等于零，此时求得最终单纯形表。从最终单纯形表中可以看出，$\boldsymbol{x}^* = (2,2,2,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，其对偶问题的最优解为 $\boldsymbol{y}^* = (1/3,3,7/3)^{\mathrm{T}}$，对应目标函数值为 $z^* = 72$。

四、灵敏度分析

由于不确定性因素的作用，常会使得产品的价格、数量、运输费等发生变化。这些变化能否影响决策者最初所做的决策，需要用到灵敏度分析。

灵敏度分析解决的问题：一个线性规划问题中的参数包括目标函数系数向量、约束矩阵以及约束右端项，当参数中的一个或几个发生变化时，原问题的最优解会有什么变化；或者，当参数变化控制在什么范围内，能使原问题最优解的性质保持不变。

下面用一个实例来介绍灵敏度分析。

【例 2-11】　已知线性规划问题如下，其最优单纯形表见表 2-9，令 $\boldsymbol{B}$ 是最优解对应的基，即最优基。

$$\max z = -x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 4 \\ x_1, \cdots, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

表 2-9　例 2-11 最优单纯形表

$c_j \rightarrow$			-1	2	0	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	基	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_2	6	1	1	1	1	0
0	x_5	10	3	0	1	1	1
$\sigma_j = c_j - z_j$			-3	0	-1	-2	0

1. 目标函数的灵敏度分析

目标函数系数的改变不会影响最优基变量，只会改变单纯形表的最后一行。因此，需要重新计算单纯形表的最后一行并判断原来的最优解是否仍最优。

【例 2-12】　在例 2-11 中，c_2 的系数在什么范围变化时，最优解不变？

解　设 c_2 变为 c'_2，则

$$\begin{cases} \sigma_1 = c_1 - c'_2 a'_{11} - c_5 a'_{21} = -1 - c'_2 \times 1 - 0 \times 3 \leqslant 0 \\ \sigma_3 = c_3 - c'_2 a'_{13} - c_5 a'_{23} = 0 - c'_2 \times 1 - 0 \times 1 \leqslant 0 \\ \sigma_4 = c_4 - c'_2 a'_{14} - c_5 a'_{24} = 0 - c'_2 \times 1 - 0 \times 1 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow c'_2 \geqslant 0$$

当 c_2 的变化范围不在上面的范围内时，就要将计算出的 σ_j 代入原最终单纯形表中，继续求解。

2. 约束右端向量的灵敏度分析

当右边向量发生变化时，有可能使变量解的符号发生变化，即变成负数。为了

满足变量的非负性，要求右边向量的变化需要满足不等式 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant 0$，此时称为最优基不变。

【例 2-13】 在例 2-11 中，b_1 的系数在什么范围变化时，最优基不变？

解 设 b_1 的变化范围为 Δb_1，为使最优基不变，需要满足条件为

$$\boldsymbol{B}^{-1}\begin{pmatrix} b_1+\Delta b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 6+\Delta b_1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6+\Delta b_1 \\ 10+\Delta b_1 \end{pmatrix}\geqslant 0 \Rightarrow \Delta b_1\geqslant -6$$

又由于 $b_1=6$，则当 $b_1\geqslant 0$ 时最优基不变。

3. 约束方程系数的灵敏度分析

当方程的基变量系数变化时，需要重新求解新的线性规划问题。当非基变量的系数发生变化时，设变化的是第 P_j 列，则在单纯形表中将第 P_j 列改为 $\boldsymbol{B}^{-1}P_j$，修改最后一行 P_j 列对应的检验数 σ'_j，若 $\sigma'_j\leqslant 0$，则最优解不变；若 $\sigma'_j>0$，则原来的最优解改变，需将 $\boldsymbol{B}^{-1}P_j$ 和 σ'_j 代入原线性规划问题的最终单纯形表中，继续求解。

4. 增加一个新变量的灵敏度分析

增加一个新变量 x_{n+1} 时，设该变量对应的向量 $\boldsymbol{P}_{n+1}$，将 c_{n+1}，x_{n+1}，$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_{n+1}$ 写入单纯形表的最后一列，并计算最后一列的判别数 σ_{n+1}，若 $\sigma_{n+1}\leqslant 0$，则新的最优解仍为原最优解。否则，在新的单纯形表基础上，重新进行迭代，直到得到最优解。

5. 增加一个约束的灵敏度分析

将增加的约束加入原最终单纯形表中并化为标准形式，若此时对应的右端项 $\boldsymbol{b}$ 没有负值，则此单纯形表即为最优单纯形表，否则需要重新求解新的问题。

第四节　线性规划在物流管理中的应用

线性规划应用非常广泛，可划分为直接应用和间接应用。它形式简便，便于计算机实现。在物流管理中主要应用于物资配送、调运，人员的分配等一些资源分配问题；投资主体在满足工程项目预定目标条件下，如何使工程项目的建设成本达到最小；物流中心选址问题；物流网络在营运一段时间后，由于供给约束或需求量发生变化，配送系统的重新安排；项目投资等问题。

【例 2-14】 某物流公司为了宣传本企业，决定拿出部分资金作广告节目，分早、中、晚三次播出，广告目标是家庭妇女和青少年，一次广告节目的各时段广告费用和观看人数见表 2-10。

表 2-10　例 2-14 相关数据

时　　段	妇女观看人数/(人/天)	青少年观看人数/(人/天)	广告费用/(元/次)
早晨	300	200	20
中午	100	100	10
晚上	100	200	28

该企业要求每天至少有 2 000 位妇女和 3 000 位青少年收看,问如何安排各时段广告节目的数量,使之既达到收看要求,又使广告费用最少?

解　设 x_1,x_2,x_3 分别表示每天早、中、晚广告播出的次数,对应模型为:

$$\min z = 20x_1 + 10x_2 + 28x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 300x_1 + 100x_2 + 100x_3 \geqslant 2\ 000 \\ 200x_1 + 100x_2 + 200x_3 \geqslant 3\ 000 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

用单纯形法解得 $x_1=0, x_2=10, x_3=10, z=380$,即中午和晚上各播放 10 次,费用为 380 元。

由于线性规划要求变量必须是连续的,而在物流系统中,比如例 2-1 中产品的数量,待分配的人员等都不是连续的,因此在某些情况下,线性规划的应用是间接的。如在第三章整数规划中的割平面法和分支定界法都需要先求解对应的线性规划问题,第四章运输问题中的表上作业法是直接从单纯形法规则中派生出来的。

本章小结

本章首先结合具体实例介绍了线性规划问题及其模型结构、线性规划的标准模型、一般线性规划模型向标准型转换的方法,接着给出了线性规划可行解、最优解的定义,重点阐述了求解线性规划的一般方法——单纯形方法,给出了单纯形方法的具体求解步骤。之后,介绍了线性规划的对偶问题以及与原问题的关系,阐释了对偶问题的基本性质,相应地给出了求解线性规划问题的对偶单纯形方法。并简单讨论了目标函数系数向量、约束矩阵以及约束右端项的变化给线性规划最优解带来的影响。最后,介绍了线性规划在物流领域中的典型应用。

本章的重点和难点是实际物流问题的线性规划建模以及求解线性规划的单纯形法的应用。

思考与练习

(1) 某加工配送中心负责加工配送 A、B、C、D、E 五种产品,具体约束见表 2-11,应如何安排生产可使该厂在现有条件下日产值最大?

表 2-11　思考题(1)相关数据

	A	B	C	D	E	生产能力/件
甲	4	3	2	0	0	200
乙	1	0	0	3	2	100
丙	0	4	2	1	2	150
价格/元	3	5	2	2	2	

(2) 已知线性规划问题：

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1 + x_3 + x_4 \leqslant 8\\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leqslant 12\\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1,\cdots,4\end{cases}$$

写出它的对偶问题。若其对偶问题的最优解为 $y_1^* = 4, y_2^* = 1$，试运用对偶问题的性质，求原问题的最优解。

(3) 用对偶单纯形法求解：

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 3\\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geqslant 4\\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0\end{cases}$$

(4) 已知线性规划问题：

$$\max z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 20\\ 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leqslant 90\\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,3\end{cases}$$

先用单纯形法求出最优解，然后分析在下列各种条件下，最优解分别有什么变化？

① 第一个约束条件的右端由 20 变为 30；

② 目标函数中 x_3 的系数由 13 变为 8；

③ x_1 系数列向量由 $\begin{pmatrix}-1\\12\end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$；

④ 增加一个约束条件 $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leqslant 50$；

⑤ 增加一个变量 x_4，对应系数为 $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$。

(5) 某公司面临一个是外包协作还是自行生产的问题。该公司生产甲、乙、丙三种产品，这三种产品都要经过铸造、机加工和装配三个车间。甲、乙两种产品的铸

件可以外包协作，也可以自行生产，但产品丙必须由本厂铸造才能保证质量。有关情况见表 2-12，该公司可利用的总工时为：铸造 8 000 小时、机加工 12 000 小时和装配 10 000 小时。为使该公司获得最大利润，甲、乙、丙三种产品应各生产多少件？甲、乙两种产品由该公司铸造及外包协作铸造各多少件？

表 2-12　甲、乙、丙三种产品的工时与成本

工时与成本 \ 产品	甲	乙	丙
每时铸造工时/小时	5	10	7
每件机加工工时/小时	6	4	8
每件装配工时/小时	3	2	2
自产铸件每件成本/元	3	5	4
外协铸件每件成本/元	5	6	—
机加工每件成本/元	2	1	3
装配每件成本/元	3	2	2
每件产品售价/元	23	18	16

案例分析

以 A 公司在实际工作中优化其现有配送资源为例，给出线性规划模型，说明线性规划的实际应用情况。

A 公司分拨物流网络负责把下线产品经过配送中心发送到客户手中，包括了原材料的采购、生产、运输、仓储和配送，除一些偏远地区外，该公司建立了非常完善的物流配送系统，物流网络可以在 24 小时之内将产品送达省会城市，72 小时送达县级客户。为了达到如此迅速的配送速度，A 公司的物流运输途径大部分都采用航空运输。现在，该公司接到四类货物的配送要求，信息见表 2-13。

表 2-13　案例相关数据

	重量/吨	空间/(立方米/吨)	利润/(元/吨)
货物 1	18	480	3 100
货物 2	15	650	3 800
货物 3	23	580	3 500
货物 4	12	390	2 850

负责运输产品的飞机有前舱、中舱和后舱三个货舱。各自所能装载的货物最大重量和体积都有限制，且为了保持飞机的平衡，三个货舱中实际装载货物的重量必须与其最大允许重量成比例。该公司为了既满足货机本身的限制，又能获得最大利润，建立了下面的模型。

设 $x_{ij}(i=1,2,3,4,j=1,2,3)$表示第 i 种货物装入第 j 个货舱的重量(吨)。

目标函数是总利润最大：

$$\max z = 3\,100(x_{11}+x_{12}+x_{13})+3\,800(x_{21}+x_{22}+x_{23})+3\,500(x_{31}+x_{32}+x_{33})+2\,850(x_{41}+x_{42}+x_{43})$$

约束条件：

(1) 三个货舱的重量限制：

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}\leqslant 10$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}\leqslant 16$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}\leqslant 8$$

(2) 三个货舱的体积限制：

$$480x_{11}+650x_{21}+580x_{31}+390x_{41}\leqslant 6\,800$$
$$480x_{12}+650x_{22}+580x_{32}+390x_{42}\leqslant 8\,700$$
$$480x_{13}+650x_{23}+580x_{33}+390x_{43}\leqslant 5\,300$$

(3) 三个货舱装入重量的平衡约束：

$$\frac{x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}}{10}=\frac{x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}}{16}=\frac{x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}}{8}$$

(4) 供装载的四种货物的总重量约束：

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}\leqslant 18$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}\leqslant 15$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}\leqslant 23$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}\leqslant 12$$

(5) 非负约束：

$$x_{ij}\geqslant 0, i=1,2,3,4; j=1,2,3$$

解得最优的装运方案如下：

$$z=121\,517.5$$

$$\begin{array}{lll} x_{11}=0 & x_{12}=0 & x_{13}=0 \\ x_{21}=10 & x_{22}=0 & x_{23}=5 \\ x_{31}=0 & x_{32}=12.95 & x_{33}=3 \\ x_{41}=0 & x_{42}=3.05 & x_{43}=0 \end{array}$$

问题

（1）航空运输规划时考虑的因素、目标和约束条件的限制主要有哪些？

（2）该案例的建模过程是怎样的？

（3）如何对上述建模进行进一步的改进？

实训设计

解决最优分配问题

【实训目标】

掌握线性规划模型的建立和单纯形法。

【实训内容与要求】

要求了解企业经常遇到的资源、设备等分配问题。在分配时，用数学语言描述各种限制条件并建立相应的线性规划模型，利用单纯形法求解，给出最优的分配方案。

【成果与检验】

能够建立相应的线性问题模型，利用单纯形法求解，得出最优分配方案。

参考例题：某工厂在计划期内要安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，已知生产单位产品所需的设备台数及 A、B 两种原材料的消耗量，见表 2-14。该工厂每生产一单位产品Ⅰ可获利润 2 元，每生产一单位产品Ⅱ可获利润 3 元，问应如何安排生产使该工厂获得的利润最大？

表 2-14　实训相关数据

	Ⅰ	Ⅱ	资源限量
设备/台时	1	2	8
原材料 A/千克	4	0	16
原材料 B/千克	0	4	12