

第 2 章 连续信号与系统的时域分析

系统分析的任务是对给定的系统模型和输入信号求解系统的输出响应。系统分析的方法很多,其中时域分析法不通过任何变换,在分析过程中涉及的函数变量均为时间 t ,直接求解系统的微分方程和积分方程,直观且物理概念清晰。因为连续时间系统处理连续时间信号时,通常用微分方程来描述系统,即系统的输入与输出之间均通过它们的时间函数及其对时间 t 的各阶导数的线性组合联系起来,所以称为时域分析,它是学习各种变换域分析方法的基础。

系统时域分析法包含两方面的内容:一是微分方程的求解;二是已知系统的单位冲激响应,将冲激响应与激励信号(输入信号)进行卷积积分,求出系统的响应(输出信号)。时域分析法的实质是把系统的输入 $f(t)$ 分解为若干冲激函数,再利用线性系统的叠加性,把各个冲激函数所引起的响应叠加起来求得总的响应,这种叠加过程构成了一种新的运算——卷积积分。虽然用卷积积分只能得到系统的零状态响应,但它的物理概念明确,运算过程方便,往往成为系统分析的基本方法,是近代计算分析系统强有力的工具。卷积积分也是利用时间域与变换域两种方法分析线性系统的一条纽带,通过它把变换域分析赋以清晰的物理概念。卷积积分是由时域分析法过渡到变换域分析法的基础。

2.1 连续系统的微分方程及其算子表示

所谓系统的数学模型是指系统基本特性的数学抽象。利用数学方法求出其解答后,对结果作出物理解释,并赋予物理意义,这正是系统分析的主要任务。

系统分析法讨论的主要问题是给定输入激励作用的情况下,系统将产生什么样的输出响应。为了确定一个线性时不变连续系统对给定激励的响应,应建立线性系统的数学模型。线性时不变连续系统的输入输出关系用线性常系数微分方程来描述。因此首先需要列出描述系统特性的微分方程表达式,然后再求出其满足初始条件的解。要建立某一领域实际过程的系统微分方程模型,依赖于对该领域实际过程规律和知识的充分了解。如电系统建立起微分方程的基本依据是元件端口的伏安特性、基尔霍夫电流定律(KCL)和基尔霍夫电压定律(KVL)。现简要说明电系统和机械系统常用定律并举例说明微分方程的建立方法。

2.1.1 表征电路元件特性的关系式

根据电学基本知识,设电阻 R 、电感 L 和电容 C 电路元件上流过的电流分别为 $i_R(t)$ 、 $i_L(t)$ 和 $i_C(t)$,两端的电压分别为 $U_R(t)$ 、 $U_L(t)$ 和 $U_C(t)$,则

$$\begin{aligned}U_R(t) &= i_R(t)R \\U_L(t) &= L \frac{di_L(t)}{dt} \\U_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau = u(0^-) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (2-1)$$

或

$$\begin{aligned} i_R(t) &= \frac{U_R(t)}{R} \\ i_L(t) &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau \\ i_C(t) &= C \frac{du_C(t)}{dt} \end{aligned} \tag{2-2}$$

2.1.2 电路基本定律

1. 基尔霍夫电流定律(KCL)

KCL 的基本内容: 在电路中, 任何时刻, 任一结点上流出的电流总和与流入该结点的电流总和相等, 即

$$\sum [i_{\text{入}}(t) + i_{\text{出}}(t)] = 0 \tag{2-3}$$

由此可见, 可以将流入结点的电流记为正, 流出结点的电流记为负; 或者反过来, 将流出结点的电流记为正, 流入结点的电流记为负; 或流入流出电流均记为正, 即

$$\begin{aligned} \sum i_{\text{入}}(t) &= \sum i_{\text{出}}(t) \\ \sum i_{\text{入}}(t) - \sum i_{\text{出}}(t) &= 0 \end{aligned} \tag{2-4}$$

2. 基尔霍夫电压定律(KVL)

KVL 的基本内容: 在电路中, 任何时刻, 沿任意闭合路径各段电路电压的代数和恒等于零, 即

$$\sum [u_{\text{降}}(t) + u_{\text{升}}(t)] = 0 \tag{2-5}$$

电压降是指选定回路中与规定方向一致的电压, 记为正; 而电压升则是指回路中与规定方向相反的电压, 记为负。电路中两点间的电压与所选择的路径无关。

2.1.3 机械系统常用元件所遵循的物理定律

机械系统中常用的元件主要有质量块、弹簧和阻尼元件。如果一个质量块的质量为 m , 物体所受到的合外力为 F , 物体的加速度为 a , 速度为 v , 那么三者之间的关系为

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}$$

对于弹性元件, 在弹性限度内, 弹性元件的弹性系数为 k , 伸长量为 x , 则弹性元件所受的力为

$$F = kx$$

对于阻尼元件, 如果一个阻尼器的阻尼系数为 c , 且阻尼器两端的相对运动速度为 v , 那么阻尼器所受到的力为

$$F = cv$$

下面通过实例来说明如何建立电系统和机械系统的微分方程。

例 2.1.1 如图 2-1 所示为 RLC 串并联电路, 电流源 $i_s(t)$ 为输入激励, 试列出以电流 $i_L(t)$ 及 R_1 上电压 $u_1(t)$ 为输出响应变量的方程式。

解 (1) 根据 KVL, 列出基尔霍夫电压方程为

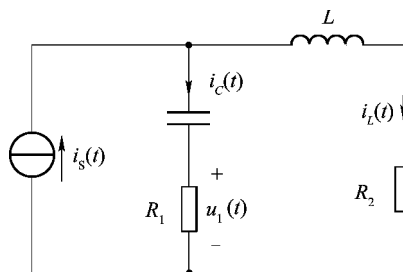


图 2-1 例 2.1.1 用图

$$\begin{aligned} u_C(t) + u_1(t) &= u_L(t) + R_2 i_L(t) \\ &= L \frac{di_L(t)}{dt} + R_2 i_L(t) \end{aligned}$$

对上式求导,考虑到 $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$, $R_1 i_C(t) = u_1(t)$, 得

$$\frac{1}{R_1 C} u_1(t) + \frac{du_1(t)}{dt} = L \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + R_2 \frac{di_L(t)}{dt}$$

(2) 根据 KCL, 有 $i_C(t) = i_s(t) - i_L(t)$, 因而有

$$u_1(t) = R_1 i_C(t) = R_1 [i_s(t) - i_L(t)]$$

代入原方程得

$$\frac{1}{C} [i_s(t) - i_L(t)] + R_1 \left[\frac{di_s(t)}{dt} - \frac{di_L(t)}{dt} \right] = L \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + R_2 \frac{di_L(t)}{dt}$$

整理上式, 可得以电流 $i_L(t)$ 为输出响应变量的方程式为

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{R_1 + R_2}{L} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{R_1}{L} \frac{di_s(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_s(t)$$

以 R_1 上的电压 $u_1(t)$ 为输出响应变量的方程式为

$$\frac{d^2 u_1(t)}{dt^2} + \frac{R_1 + R_2}{L} \frac{du_1(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_1(t) = R_1 \frac{d^2 i_s(t)}{dt^2} + \frac{R_1 R_2}{L} \frac{di_s(t)}{dt} \quad (2-6)$$

例 2.1.2 如图 2-2(a) 所示为机械-位移-阻尼系统, 质量为 m 的刚体一端由弹簧和阻尼器牵引, 弹簧和阻尼器的另一端固定在墙壁上。刚体与地面间的摩擦系数为零, 外加牵引力为 $f(t)$, 试求外加牵引力 $f(t)$ 与刚体运动的位移 $y(t)$ 之间的关系。

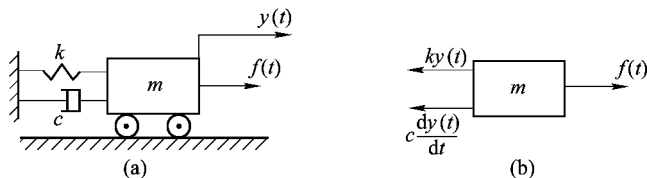


图 2-2 例 2.1.2 用图

解 根据机械系统常用元件所遵循的物理定律, 对质量块作受力分析如图 2-2(b) 所示, 根据受力分析结果列出系统方程为

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = f(t) - ky(t) - c \frac{dy(t)}{dt}$$

整理得

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = f(t) \quad (2-7)$$

式(2-7)即为如图 2-2 所示的机械系统的微分方程表示。

上面两个例子说明了系统微分方程的列写方法。如果组成系统的元件都是参数恒定的线性元件,那么构成的系统是线性时不变系统,体现在方程形式上是一个线性常系数微分方程。例 2.1.1 和例 2.1.2 是两个不同性质的系统,但对比式(2-6)和式(2-7)表明:两者都可以表示成微分方程的形式,对于复杂系统,设激励信号为 $f(t)$,系统响应为 $y(t)$,则可以用一个高阶的微分方程来表示,其一般形式为

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ & = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t) \end{aligned} \quad (2-8)$$

式中, $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 和 $b_m, b_{m-1}, \cdots, b_1, b_0$ 为常数,它们由电路的结构与元件参数决定,如上述两例中的 R, L, C, k, c 等。求解式(2-8)所示的方程,即可得到系统的响应。

2.1.4 微分方程的求解

由微分方程的经典解法可知,式(2-8)的完全解由两部分组成,即齐次解和特解。齐次解为方程对应的齐次微分方程的解,以 $y_h(t)$ 表示,特解以 $y_p(t)$ 表示。下面分别讨论齐次解和特解的求法。

1. 齐次解

齐次解是满足式(2-8)中右端激励 $f(t)$ 及其各阶导数都为零的齐次微分方程的解,即

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \quad (2-9)$$

齐次解由形式为 $Ae^{\lambda t}$ 的函数组成,将 $Ae^{\lambda t}$ 代入式(2-9),可得

$$a_n A \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1} A \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \cdots + a_1 A \lambda e^{\lambda t} + a_0 A e^{\lambda t} = 0 \quad (2-10)$$

因为式(2-10)左端各项的公因式 $Ae^{\lambda t}$ 不为零,于是可得

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (2-11)$$

式(2-11)称为微分方程式(2-10)的特征方程,它是 n 次代数方程。特征方程的 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 称为微分方程的特征根,也称为系统的自然频率或固有频率,特征根可以是 n 个不同的根,也可以部分是重根或全部是重根。齐次解的函数形式由这些特征根确定,它仅与系统本身的特性有关,而与激励 $f(t)$ 的函数形式无关,称为系统的固有响应或自由响应。齐次解有如下形式:

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t) \quad (2-12)$$

式中, c_i 为由系统初始状态确定的常数。

函数 $y_i(t)$ 的形式取决于特征根的模式,根据特征根的取值情况不同,齐次解可以有不同的形式,下面分别讨论。

(1) 特征根均为单根。若所有特征根都互不相同(即无重根),则微分方程的齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + A_n e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} \quad (2-13)$$

(2) 特征根有重根。若 λ_1 是特征方程的 k 重根,即有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_k$,而其余

$n-k$ 个根 $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n$ 都是单根, 则微分方程的齐次解中相应于 λ_1 的部分有 k 项, 即

$$(A_1 t^{k-1} + A_2 t^{k-2} + A_3 t^{k-3} + \dots + A_k) e^{\lambda_1 t} = \sum_{i=1}^k A_i t^{k-i} e^{\lambda_1 t} \quad (2-14)$$

式中, $A_i (i=1, 2, \dots, k)$ 为待定系数。由给定系统的初始条件确定。

(3) 特征根为一对单复根。即 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, 则微分方程的齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + A_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (2-15)$$

(4) 特征根为一对 m 重复根。即共有 m 重 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ 的复根, 则微分方程的齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + A_2 t e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \dots + A_m t^{m-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t) \\ + B_1 e^{\alpha t} \sin(\beta t) + B_2 t e^{\alpha t} \sin(\beta t) + \dots + B_m t^{m-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (2-16)$$

下面通过例题来说明不同情况下微分方程齐次解的求法。

例 2.1.3 试求微分方程

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = f(t)$$

的齐次解。

解 由特征方程 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, 解得特征根为

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

因此该方程的齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$

例 2.1.4 试求微分方程

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = f(t)$$

的齐次解。

解 由特征方程 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, 解得二重根为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

因此该方程的齐次解为

$$y_h(t) = A_1 t e^{-t} + A_2 e^{-t}$$

例 2.1.5 试求微分方程

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 8 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = f(t)$$

的齐次解。

解 由特征方程

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 6 = 0$$

解得特征根为

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm j, \quad \lambda_3 = -3$$

因此该方程的齐次解为

$$y_h(t) = (A_1 \cos t + A_2 \sin t) e^{-t} + A_3 e^{-3t}$$

2. 特解

特解的函数形式与激励函数 $f(t)$ 的形式有关。将激励函数代入微分方程式(2-8)后, 微分方程右边的函数式(激励)称为自由项。不同的自由项对应不同的特解 $y_p(t)$, 如表 2-1 所示为几种类型的激励函数 $f(t)$ 及其所对应的特征解 $y_p(t)$ 。选定特解后, 将它代入到原微分

方程,求出其待定系数 A_i 即可得出特解。特解也称为系统的强迫响应。

表 2-1 激励与特解的对应关系

激励 $f(t)$	特 解
$E(\text{常数})$	$A(\text{常数})$
e^{at}	Ae^{at} 当 a 不是特征根时
	$A_1 t e^{at} + A_0 e^{at}$ 当 a 是单特征根时
	$A_k t^k e^{at} + A_{k-1} t^{k-1} e^{at} + \cdots + A_1 t e^{at} + A_0 e^{at}$ 当 a 是 k 重特征根时
t^n	$A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0$
$\cos(\omega t)$ 或 $\sin(\omega t)$	$A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$

下面通过例题说明微分方程特解的求法。

例 2.1.6 已知微分方程

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{df(t)}{dt} + f(t)$$

试求下列两种情况下微分方程的特解。

(1) $f(t) = t^2$

(2) $f(t) = e^{2t}$

解 (1) 因为 $f(t) = t^2$, 将 $f(t)$ 代入方程, 得方程右边的自由项为 $t^2 + 2t$ 。查表 2-1 可知, 特解的一般形式为

$$y_p = At^2 + Bt + C$$

所以

$$\frac{dy_p}{dt} = 2At + B, \quad \frac{d^2 y_p}{dt^2} = 2A$$

代入原方程得

$$2A + 4At + 2B + 3At^2 + 3Bt + 3C = t^2 + 2t$$

由对应项系数相等得

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{9}, \quad C = -\frac{10}{27}$$

所以方程的特解为

$$y_p = \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t - \frac{10}{27}$$

(2) 因为 $f(t) = e^{2t}$, 所以方程右边的自由项为 $3e^{2t}$ 。查表 2-1 可知, 特解的一般形式为

$$y_p = Ae^{2t}$$

所以

$$\frac{dy_p}{dt} = 2Ae^{2t}, \quad \frac{d^2 y_p}{dt^2} = 4Ae^{2t}$$

代入原方程得

$$4Ae^{2t} + 4Ae^{2t} + 3Ae^{2t} = 3e^{2t}$$

解得

$$A = \frac{3}{11}$$

所以方程的特解为

$$y_p = \frac{3}{11}e^{2t}$$

3. 完全解

微分方程的完全解为齐次解与特解之和,即

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (2-17)$$

根据上面的讨论,对于 n 阶系统,齐次解 $y_h(t)$ 中有 n 个待定系数。这些待定系数由下面 n 个初始条件来确定:

$$y(0), \frac{dy(0)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}} \quad (2-18)$$

例 2.1.7 试求微分方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{df(t)}{dt} + 2f(t)$$

当 $f(t) = e^{-t}$, 初始条件为 $y(0) = 0, y'(0) = 3$ 时的完全解。

解 (1) 求齐次解。

按照题意,特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

其特征根 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ 均为单根,则其齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$

(2) 求特解。

将 $f(t) = e^{-t}$ 代入方程的右端,得自由项为 e^{-t} ,其中 $a = -1$ 与一个特征根 $\lambda_1 = -1$ 相重,因此特解为

$$y_p(t) = A_3 t e^{-t} + A_4 e^{-t}$$

将 $y_p(t) = A_3 t e^{-t} + A_4 e^{-t}$ 代入上述微分方程,得

$$A_3 e^{-t} = e^{-t}$$

所以有

$$A_3 = 1$$

因此特解为

$$y_p(t) = t e^{-t}$$

所以该方程的完全解为

$$y(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + t e^{-t}$$

由初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = 3$, 有

$$y(0) = A_1 + A_2 = 0$$

$$y'(0) = -A_1 - 2A_2 + 1 = 3$$

解得 $A_1 = 2, A_2 = -2$, 因此完全解为

$$y(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} + t e^{-t} \quad (t > 0)$$

4. 微分方程的物理意义

(1) 当微分方程用以描述系统的输入与输出关系时,微分方程的解是系统的响应,它将输入与输出的关系表示为函数的关系。

(2) 系统对某个输入 $f(t)$ 的响应一般都是由一个特解和一个齐次解组成。该齐次解的

函数形式仅取决于系统本身的特性,而与输入信号的函数形式无关,常称为系统的自由响应或固有响应,但齐次解的系数值与输入信号有关。特解的形式由微分方程的自由项或输入信号确定,故称为系统的强迫响应。

(3) 为了完全确定微分方程所描述的系统输入和输出之间的关系,必须给出初始条件。

2.1.5 用算子符号表示微分方程

1. 算子的定义

在连续系统时域分析法中,求解的是一个高阶微分方程或一组联立微分方程。为简化微分方程的形式,可定义下述算子符号。

(1) 微分算子 p , 定义如下:

$$p = \frac{d}{dt}, \quad p^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \quad p^n = \frac{d^n}{dt^n} \tag{2-19}$$

(2) 积分算子 $\frac{1}{p}$, 定义如下:

$$\frac{1}{p} = p^{-1} = \int_{-\infty}^t (\quad) d\tau \tag{2-20}$$

根据微分算子和积分算子的定义有

$$pf(t) = \frac{d}{dt}f(t), \quad p^nf(t) = \frac{d^n}{dt^n}f(t) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{2-21}$$

$$p^{-1}f(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \tag{2-22}$$

则高阶微分方程式(2-8) 可表示为

$$\begin{aligned} & a_np^ny(t) + \cdots + a_1py(t) + a_0y(t) \\ & = b_mp^mf(t) + \cdots + b_1pf(t) + b_0f(t) \end{aligned} \tag{2-23}$$

或简化为

$$(a_np^n + \cdots + a_1p + a_0)y(t) = (b_mp^m + \cdots + b_1p + b_0)f(t) \tag{2-24}$$

令

$$\begin{cases} D(p) = a_np^n + \cdots + a_1p + a_0 \\ N(p) = b_mp^m + \cdots + b_1p + b_0 \end{cases} \tag{2-25}$$

则式(2-24) 可写为

$$D(p)y(t) = N(p)f(t) \tag{2-26}$$

又可写为

$$y(t) = \frac{N(p)}{D(p)}f(t) = H(p)f(t) \tag{2-27}$$

其中

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_mp^m + \cdots + b_1p + b_0}{a_np^n + \cdots + a_1p + a_0} \tag{2-28}$$

式(2-28) 称为响应 $y(t)$ 对激励 $f(t)$ 的传输算子或转移算子,它为 p 的两个实系数有理多项式之比,其分母即为微分方程的特征多项式 $D(p)$ 。 $H(p)$ 描述了系统本身的特性,与系统的激励无关,表示系统将输入转变为输出的作用(即系统对输入的传输作用)。用 $H(p)$ 表示的系统输入输出模型如图 2-3 所示。

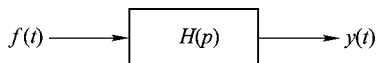


图 2-3 系统的传输算子表示

应当注意的是,字母 p 在本质上是一个微分算子,但从数学形式的角度来说,可以人为地把它看做是一个变量(一般是复数)。这样,传输算子 $H(p)$ 就是变量 p 的两个实系数有理多项式之比。

例 2.1.8 试用算子法表示例 2.1.7 的微分方程。

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{df(t)}{dt} + 2f(t)$$

解 根据微分算子的定义,上述方程可表示为

$$p^2 y(t) + 3py(t) + 2y(t) = pf(t) + 2f(t)$$

还可将上式改写为

$$(p^2 + 3p + 2)y(t) = (p + 2)f(t)$$

则传输算子或转移算子 $H(p)$ 为

$$H(p) = \frac{p + 2}{p^2 + 3p + 2}$$

例 2.1.9 试用算子法表示下述方程。

$$L \frac{d}{dt} i(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = f(t)$$

解 根据微分算子与积分算子的定义,上述微分方程可用算子形式表示为

$$Lpi(t) + Ri(t) + \frac{1}{Cp} i(t) = f(t)$$

还可以将上式改写为

$$(Lp + R + \frac{1}{Cp})i(t) = f(t)$$

则传输算子或转移算子 $H(p)$ 为

$$H(p) = \frac{Cp}{CLp^2 + RCp + 1}$$

2. 算子符号运算的基本规则

式(2-25)表示的 $D(p)$ 和 $N(p)$ 算子多项式仅仅是一种运算符号,代数方程中的运算规则有的适用于算子多项式,有的不适用,这里提出两个基本规则。

(1) 对算子多项式可以进行因式分解,但不能进行公因子相消。

例如

$$\begin{aligned} (p + 2)(p + 1)f(t) &= (\frac{d}{dt} + 2)[\frac{d}{dt}f(t) + f(t)] \\ &= \frac{d}{dt}[\frac{d}{dt}f(t) + f(t)] + 2[\frac{d}{dt}f(t) + f(t)] \\ &= \frac{d^2}{dt^2}f(t) + \frac{d}{dt}f(t) + 2\frac{d}{dt}f(t) + 2f(t) \\ &= (p^2 + 3p + 2)f(t) \end{aligned}$$

因此有

$$(p + 2)(p + 1) = (p^2 + 3p + 2)$$

如果把这一结论推广到一般情况,那么由算子符号所组成的多项式可以像代数式那样进行相乘或因式分解。

又如

$$\frac{d}{dt}f(x) = \frac{d}{dt}f(y)$$

两边积分后有

$$f(x) = f(y) + C$$

式中, C 为积分常数。由此可见,对于算子方程:

$$pf(x) = pf(y)$$

其左右两端的算子符号因子不能消去。推广到一般情况:对算子符号 p 多项式的等式两端公共因子不能随意消去。

(2) 算子的乘除顺序不能随意颠倒,即

$$p \frac{1}{p}f(t) \neq \frac{1}{p}pf(t) \quad (2-29)$$

因为上式左侧为

$$p \frac{1}{p}f(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = f(t)$$

而式(2-29)右侧为

$$\frac{1}{p}pf(t) = \int_{-\infty}^t \left[\frac{d}{d\tau} f(\tau) \right] d\tau = f(t) - f(-\infty) \neq f(t)$$

这表明“先乘后除”的算子运算(即先微分后积分) $\frac{1}{p}p$ 不能相消;而“先除后乘”(先积分后微分) $p \frac{1}{p}$ 的算子运算可以相消。

例 2.1.10 设某连续系统的算子为

$$H(p) = \frac{p+2}{p^3+2p^2+3p+4}$$

试写出此系统的输入输出微分方程。

解 令系统的输入为 $f(t)$, 输出为 $y(t)$, 由给定传输算子 $H(p)$ 写出此系统算子方程为

$$y(t) = H(p)f(t) = \frac{p+2}{p^3+2p^2+3p+4}f(t)$$

即 $y(t)$ 与 $f(t)$ 之间的关系为

$$(p^3+2p^2+3p+4)y(t) = (p+2)f(t)$$

因此系统的输入输出微分方程为

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 2 \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3 \frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = \frac{d}{dt}f(t) + 2f(t)$$

2.2 零输入响应和零状态响应

线性非时变系统的完全响应 $y(t)$ 也可分解为零输入响应 $y_0(t)$ 和零状态响应 $y_f(t)$ 。在激励信号加入系统之前,系统原有的储能(如电容上的初始电压,电感上的初始电流等)构成

了系统的初始状态。零输入响应是激励为零,即没有外加输入信号作用时,仅由系统的初始状态(起始时刻系统储能)所引起的响应,即对应的齐次方程的解,用 $y_0(t)$ 表示;零状态响应是系统的初始状态为零(即系统的初始储能为零)时,仅由输入信号所引起的响应,它描述的是系统的非齐次微分方程在零初始条件下的解,用 $y_f(t)$ 表示。这样,线性非时变系统的全响应将是零输入响应和零状态响应之和,即

$$y(t) = y_0(t) + y_f(t) \quad (2-30)$$

2.2.1 零输入响应的求取

设系统的微分方程模型为

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t) \quad (2-31)$$

若在零输入条件下,即输入等于零,则等式右端均为零,化为齐次方程:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \quad (2-32)$$

并给定初始条件为 $y(0), y^{(1)}(0), y^{(2)}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$, 则该齐次方程的零输入响应由该方程的齐次解得到,为

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^n A_{0i} e^{\lambda_i t} \quad (2-33)$$

齐次解中的系数由给定的初始条件在齐次解中直接确定。

2.2.2 零状态响应的求取

在初始状态为零(初始储能为零),输入不为零的条件下,微分方程仍是非齐次方程,故零状态响应由方程的完全解得到,为

$$y_f(t) = \sum_{i=1}^n A_{fi} e^{\lambda_i t} + y_p(t) \quad (2-34)$$

式中, $\sum_{i=1}^n A_{fi} e^{\lambda_i t}$ 为微分方程的齐次解; $y_p(t)$ 为微分方程的特解。

零状态响应完全解的系数应在零状态响应的全解中由初始条件 $y(0) = y^{(1)}(0) = y^{(2)}(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0$ 确定。

2.2.3 系统的完全响应

系统的完全响应按性质可分为自由响应和强迫响应,按来源可分为零输入响应和零状态响应,它们的关系为

$$y(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} + y_p(t) = \sum_{i=1}^n A_{0i} e^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^n A_{fi} e^{\lambda_i t} + y_p(t) \quad (2-35)$$

其中

$$\sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^n A_{0i} e^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^n A_{fi} e^{\lambda_i t}$$

式(2-35)中,第一项是由微分方程的初始条件(即系统的初始状态)引起的自由响应

$\sum_{i=1}^n A_{0i} e^{\lambda_i t}$;第二项是由输入引起的自由响应,该项的自由响应并不完全自由,因为它的幅值

受到输入 $f(t)$ 的影响;第三项是仅由输入所引起的强迫响应。

例 2.2.1 已知某系统的微分方程模型为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{2} y(t) = f(t)$$

初始条件 $y(0) = 1, y^{(1)}(0) = 0$, 输入 $f(t) = 5e^{-3t}$, 试求系统的零输入响应 $y_0(t)$, 零状态响应 $y_f(t)$ 以及完全响应 $y(t)$ 。

解 (1) 求零输入响应 $y_0(t)$ 。

由特征方程:

$$\lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$$

得单根 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$, 因此零输入响应为

$$y_0(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-\frac{1}{2}t}$$

将初始条件 $y(0) = 1, y^{(1)}(0) = 0$ 代入以上方程, 得

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ -A_1 - \frac{1}{2}A_2 = 0 \end{cases}$$

解此方程组得

$$A_1 = -1, \quad A_2 = 2$$

因此系统的零输入响应为

$$y_0(t) = -e^{-t} + 2e^{-\frac{1}{2}t}$$

(2) 求零状态响应 $y_f(t)$ 。

根据给定的输入 $f(t) = 5e^{-3t}$, 设特解 $y_p(t) = Ae^{-3t}$, 代入系统微分方程得

$$9Ae^{-3t} + \frac{3}{2} \times (-3)Ae^{-3t} + \frac{1}{2}Ae^{-3t} = 5e^{-3t}$$

即 $A = 1$ 。因此, 零状态响应的特解、齐次解和完全解分别为

$$y_p(t) = e^{-3t}$$

$$y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$y_f(t) = y_h(t) + y_p(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-3t}$$

将零状态响应的初始条件 $y(0) = y^{(1)}(0) = 0$ 代入上式, 得

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + 1 = 0 \\ -A_1 - \frac{1}{2}A_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

解得

$$A_1 = -5, \quad A_2 = 4$$

因此, 此系统的零状态响应为

$$y_f(t) = -5e^{-t} + 4e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-3t}$$

(3) 求系统的完全响应。

$$\begin{aligned}
 y(t) &= y_0(t) + y_f(t) \\
 &= -e^{-t} + 2e^{-\frac{1}{2}t} - 5e^{-t} + 4e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-3t} \\
 &= -6e^{-t} + 6e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-3t}
 \end{aligned}$$

式中, $(-e^{-t} + 2e^{-\frac{1}{2}t})$ 为系统的零输入响应, 系统完全响应中的前两项 $(-6e^{-t} + 6e^{-\frac{1}{2}t})$ 为此系统的自由响应。

由此可见, 零输入响应和自由响应虽然都是齐次解, 但两者的系数不同, 即自由响应包括零输入响应和零状态响应的一部分。第三项 e^{-3t} 是系统由于输入所引起的强迫响应。

2.3 连续系统的冲激响应和阶跃响应

连续线性非时变系统的冲激响应定义为在系统的初始状态为零的条件下, 以单位冲激信号激励系统所产生的输出响应用 $h(t)$ 表示。由于系统冲激响应要求系统在零状态条件下, 且输入激励为单位冲激信号 $\delta(t)$, 故而冲激响应 $h(t)$ 仅取决于系统的内部结构及其元件参数。也就是说, 不同结构和元件参数的系统, 将有不同的冲激响应。因此, 系统的冲激响应 $h(t)$ 可以表征系统本身的特性。换句话说, 不同的系统就会有不同的冲激响应 $h(t)$ 。

2.3.1 单位冲激信号(函数) $\delta(t)$ 的定义

若矩形脉冲的宽度为 Δ , 幅度是 $1/\Delta$, 则矩形脉冲所包围的面积为 1, 其图形如图 2-4(a) 所示。如果 Δ 逐渐减小, 该信号就逐渐变得窄而高, 其图形如图 2-4(b) 所示, 当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, 幅度 $1/\Delta \rightarrow \infty$, 但是包围的面积仍然是 1。这就是所要定义的单位冲激信号(函数)。

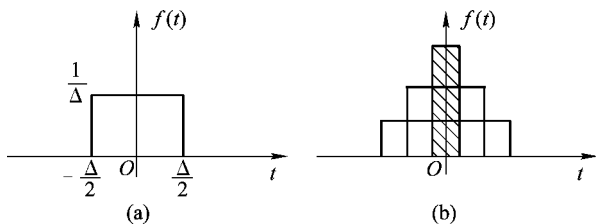


图 2-4 单位冲激函数的定义

冲激信号记为 $\delta(t)$, 一般定义式为

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \delta(t) = \infty & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2-36)$$

冲激信号的作用不一定仅是 $t = 0$ 时刻, 可以延时至任意时刻 t_0 , 以符号 $\delta(t - t_0)$ 表示。 $\delta(t - t_0)$ 的定义式为

$$\begin{cases} \delta(t - t_0) = 0 & t \neq t_0 \\ \delta(t - t_0) = \infty & t = t_0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2-37)$$

冲激信号 $\delta(t)$ 及延时冲激函数 $\delta(t-t_0)$ 分别如图 2-5(a)、(b) 所示。

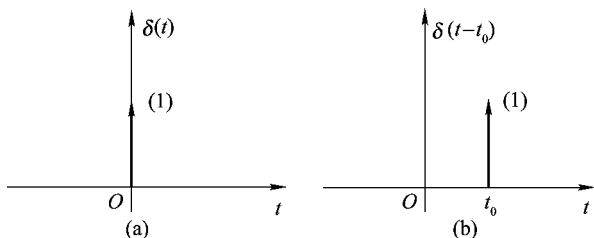


图 2-5 冲激信号及延时冲激信号

冲激信号具有强度,其强度就是冲激信号对时间的定积分值,如 $A\delta(t)$ 表示该冲激信号的强度为 A ,即有 $\int_{-\infty}^{+\infty} A\delta(t)dt = A$ 。

2.3.2 冲激函数的性质

1. 取样特性

由 $\delta(t)$ 的定义式(2-36)可知,在 $t \neq 0$ 时, $\delta(t)$ 处处为 0,只有在 $t = 0$ 时, $\delta(t)$ 才不为 0。因此,将 $\delta(t)$ 与一个在 $t = 0$ 处连续的有界函数 $f(t)$ 相乘时,其乘积也必然是一个冲激函数,但其冲激强度不再是 1,而是 $f(t)$ 在 $t = 0$ 时的值 $f(0)$,即

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (2-38)$$

同理,对于在任意时刻 $t = t_0$ 发生的冲激 $\delta(t-t_0)$,若 $f(t)$ 有界,并且在 $t = t_0$ 处连续,则有

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \quad (2-39)$$

$\delta(t)$ 的取样特性也称为 $\delta(t)$ 的乘积特性。

例 2.3.1 试利用 $\delta(t)$ 的性质计算下列式子。

$$(1) \cos t \delta(t)$$

$$(2) \sin t \delta(t)$$

$$(3) (t^2 + 3t + 4)\delta(t)$$

解 (1) $\cos t \delta(t) = \cos 0 \delta(t) = \delta(t)$ (因为 $\cos 0 = 1$);

(2) $\sin t \delta(t) = \sin 0 \delta(t) = 0$ (因为 $\sin 0 = 0$);

(3) $(t^2 + 3t + 4)\delta(t) = (0 + 0 + 4)\delta(t) = 4\delta(t)$ 。

2. 筛选特性

若信号 $f(t)$ 是一个在 $t = 0$ 处连续的普通函数,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = f(0) \quad (2-40)$$

同理,对于在任意时刻 $t = t_0$ 发生的冲激 $\delta(t-t_0)$,若 $f(t)$ 有界,并且在 $t = t_0$ 处连续,则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0) \quad (2-41)$$

$\delta(t)$ 的筛选特性也称为 $\delta(t)$ 的积分特性。

例 2.3.2 试利用 $\delta(t)$ 的性质计算下列式子。

$$(1) \int_{-6}^6 (t^3 + t^2 + 3t + 5)\delta(t)dt$$

$$(2) \int_{-6}^6 (t^3 + t^2 + 3t + 5) \delta(t-8) dt$$

解 (1) $\int_{-6}^6 (t^3 + t^2 + 3t + 5) \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 5\delta(t) dt = 5 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 5$ (因为冲激在积分区间 $[-6, 6]$ 内);

$$(2) \int_{-6}^6 (t^3 + t^2 + 3t + 5) \delta(t-8) dt = 0 \text{ (因为冲激不在积分区间 } [-6, 6] \text{ 内)}。$$

3. $\delta(t)$ 是偶函数

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad (2-42)$$

2.3.3 用冲激函数 $\delta(t)$ 表示信号

先来看一个直观的例子。如图 2-6(a) 所示为一个任意信号 $f(t)$ 的部分波形。如图 2-6(b) 所示的阶梯状折线是 $f_{\Delta}(t)$ 的近似波形, 在 $t = k\Delta\tau$ 处, 有

$$f_{\Delta}(k\Delta\tau) = f(k\Delta\tau)$$

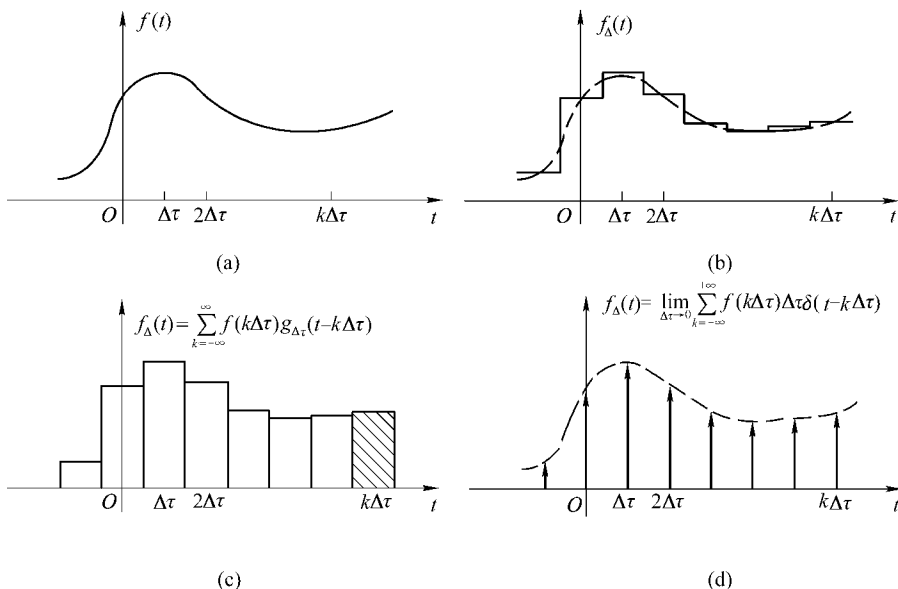


图 2-6 任意信号 $f(t)$ 的部分波形

显然, 当 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 时, $f_{\Delta}(t)$ 与 $f(t)$ 完全一致。图 2-6(b) 的阶梯状折线与如图 2-6(c) 所示图形中紧挨着的矩形脉冲序列 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta\tau)g_{\Delta\tau}(t-k\Delta\tau)$ 是完全等效的。当 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 时, 图 2-6(c) 中阴影所示的矩形脉冲, 可以用在 $t = k\Delta\tau$ 时刻出现的、强度为阴影面积 $f(k\Delta\tau)\Delta\tau$ 的冲激来表示, 即

$$f(k\Delta\tau)g_{\Delta\tau}(t-k\Delta\tau) \approx f(k\Delta\tau)\Delta\tau\delta(t-k\Delta\tau)$$

依此类推, 其余的矩形脉冲也可以表示为对应的冲激, 如图 2-6(d) 所示。于是图 2-6(a) 可以用一串冲激来近似表示, 即

$$\begin{aligned} f(t) &\approx \cdots + f(0)\Delta\tau\delta(t) + f(\Delta\tau)\Delta\tau\delta(t-\Delta\tau) + \cdots + f(k\Delta\tau)\Delta\tau\delta(t-k\Delta\tau) + \cdots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta\tau)\Delta\tau\delta(t-k\Delta\tau) \end{aligned} \quad (2-43)$$

随着 $\Delta\tau$ 越来越小,这种近似所带来的误差也越来越小,当 $\Delta\tau \rightarrow d\tau$ 时,式(2-43) 中的离散量 $k\Delta\tau$ 变为连续变量 τ ,式中的求和变为积分,即

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad (2-44)$$

式(2-44) 的重要意义是不言而喻的,因为它实现了用 $\delta(t)$ 函数表示任意信号 $f(t)$ 。其实,从本节前面讨论过的 $\delta(t)$ 函数的取样特性出发,也可以得到这个结论。由式(2-39) 可知,当单个冲激 $\delta(t-t_0)$ 与 $f(t)$ 相乘再积分时,就得到 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 时刻的函数值 $f(t_0)$ 。也就是说,可以用一个冲激 $\delta(t)$ 的积分式来表示函数 $f(t)$ 在特定时刻 t_0 的值。因此,如果有无穷多个冲激,一个紧挨一个与 $f(t)$ 相乘再积分,其结果必然是整个函数 $f(t)$ 。这个结论用数学方式来表达时,只需将式(2-39) 中的积分变量 t 换为 τ ,特定时刻 t_0 换为任意时刻 t 即可。于是, $f(t)$ 可表示为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(\tau-t)d\tau$$

考虑到 $\delta(t)$ 函数的偶函数特性,即

$$\delta(t-t_0) = \delta(t_0-t)$$

或

$$\delta(\tau-t) = \delta(t-\tau)$$

则上式与式(2-44) 就完全一致了,即从 $\delta(t)$ 函数的取样特性出发,也得到了式(2-44) 的结论。

2.3.4 冲激响应

1. 冲激响应的定义

在单位冲激信号 $\delta(t)$ 作用下,系统的零状态响应称为单位冲激响应,简称冲激响应,用 $h(t)$ 表示,如图 2-7 所示。此时系统的微分方程变为

$$h(t) = H(p)\delta(t) = \frac{N(p)}{D(p)}\delta(t) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} \delta(t) \quad (2-45)$$

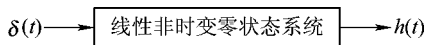


图 2-7 冲激响应示意图

2. 冲激响应的求法

冲激响应 $h(t)$ 可通过将 $H(p)$ 展开成部分分式求得,可分为三种情况。

(1) 当 $n > m$ 时, $H(p)$ 为真分式。设 $D(p) = 0$ 的根为 n 个单根(可为实根、虚根或复数根) $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 则可将 $H(p)$ 展开成部分分式,即

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} \\ &= \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n)} \\ &= \frac{K_1}{p-p_1} + \frac{K_2}{p-p_2} + \cdots + \frac{K_n}{p-p_n} \end{aligned} \quad (2-46)$$

式中, $K_1, K_2, \dots, K_n$ 为待定系数。

于是式(2-46) 可写为

$$h(t) = \frac{K_1}{p-p_1}\delta(t) + \frac{K_2}{p-p_2}\delta(t) + \dots + \frac{K_n}{p-p_n}\delta(t) \quad (2-47)$$

为了求得 $h(t)$, 先来研究式(2-47) 中等号右端的第 n 项, 令

$$h_n(t) = \frac{K_n\delta(t)}{p-p_n} \quad (n=1, 2, 3\cdots)$$

即

$$(p-p_n)h_n(t) = K_n\delta(t)$$

则

$$ph_n(t) - p_nh_n(t) = K_n\delta(t)$$

即

$$\frac{d}{dt}h_n(t) - p_nh_n(t) = K_n\delta(t)$$

上式等号两端同时左乘以 e^{-p_nt} , 得

$$e^{-p_nt} \frac{dh_n(t)}{dt} - p_ne^{-p_nt}h_n(t) = K_ne^{-p_nt}\delta(t) = K_n\delta(t)$$

即

$$\frac{d}{dt}[e^{-p_nt}h_n(t)] = K_n\delta(t)$$

将上式等号两端同时在区间 $(-\infty, t)$ 积分, 得

$$\int_{-\infty}^t \frac{d}{d\tau}[e^{-p_n\tau}h_n(\tau)]d\tau = \int_{-\infty}^t K_n\delta(\tau)d\tau = K_nu(t)$$

即

$$[e^{-p_n\tau}h_n(\tau)]_{-\infty}^t = K_nu(t)$$

则有

$$e^{-p_nt}h_n(t) - e^{-p_n(-\infty)}h_n(-\infty) = K_nu(t)$$

因为必有 $h_n(-\infty) = 0$, 故有

$$h_n(t) = K_ne^{p_nt}u(t) \quad (n=1, 2, 3\cdots)$$

用同样的方法可求得式(2-47) 等号右端的其余各项, 故有

$$\begin{aligned} h(t) &= K_1e^{p_1t}u(t) + K_2e^{p_2t}u(t) + \dots + K_ne^{p_nt}u(t) \\ &= \sum_{i=1}^n K_ie^{p_it}u(t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2-48)$$

由此可见, 单位冲激响应 $h(t)$ 的形式与系统零输入响应 $y_0(t)$ 的形式相同, 但两者系数的求法不同。零输入响应 $y_0(t)$ 中的系数 A_n 由系统零输入响应的初始值确定, 而单位冲激响应 $h(t)$ 中的系数 K_i 则是部分分式中的系数。

若 $D(p) = 0$ 的根(特征根)中含有 γ 重根 p_i , 则 $H(p)$ 的部分分式中 will 含有形如 $\frac{K}{(p-p_i)^\gamma}$ 的项, 可以证明与之对应的冲激响应的形式为 $\frac{K}{(\gamma-1)!}t^{\gamma-1}e^{p_it}u(t)$ 。

如表 2-2 所示为各种形式的 $H(p)$ 及其对应的 $h(t)$ 。

表 2-2 $H(p)$ 和 $h(t)$ 的对应关系

$H(p)$	$h(t)$
K	$K\delta(t)$
p	$\delta'(t)$
$\frac{K}{p-p_n}$	$Ke^{p_n t}u(t)$
$\frac{K_1+jK_2}{p-(a+j\omega)}+\frac{K_1-jK_2}{p-(a-j\omega)}$	$2e^{at}[K_1\cos(\omega t)-K_2\sin(\omega t)]u(t)$
$\frac{Ke^{j\theta}}{p-(a+j\omega)}+\frac{Ke^{-j\theta}}{p-(a-j\omega)}$	$2Ke^{at}\cos(\omega t+\theta)u(t)$
$\frac{K}{(p-p_i)^\gamma}, \gamma \text{ 为正整数}$	$\frac{K}{(\gamma-1)!}t^{\gamma-1}e^{p_i t}u(t)$

例 2.3.3 已知 $h(t) = \frac{p+3}{p^2+3p+2}\delta(t)$, 试求 $h(t)$ 。

解

$$H(p) = \frac{p+3}{p^2+3p+2} = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} = \frac{K_1}{p+1} + \frac{K_2}{p+2}$$

式中, K_1 、 K_2 的求法如下:

$$K_1 = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}(p+1) \Big|_{p=-1} = 2$$
$$K_2 = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}(p+2) \Big|_{p=-2} = -1$$

故有

$$H(p) = \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

则

$$\begin{aligned} h(t) &= \left(\frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2}\right)\delta(t) \\ &= \frac{2}{p+1}\delta(t) - \frac{1}{p+2}\delta(t) \\ &= 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \\ &= (2e^{-t} - e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

(2) 当 $n = m$ 时, 应将 $H(p)$ 用除法化为一个常数项 b_m 与一个真分式 $\frac{N_0(p)}{N(p)}$ 之和, 即

$$H(p) = b_m + \frac{N_0(p)}{N(p)} = b_m + \frac{K_1}{p-p_1} + \frac{K_2}{p-p_2} + \cdots + \frac{K_n}{p-p_n}$$

故得冲激响应为

$$h(t) = b_m\delta(t) + \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} u(t) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2-49}$$

由此可见, 在这种情况下, $h(t)$ 中含有冲激函数 $\delta(t)$ 。

例 2.3.4 已知 $h(t) = \frac{p^2+4p+5}{p^2+3p+2}\delta(t)$, 试求 $h(t)$ 。

解

$$H(p) = \frac{p^2+4p+5}{p^2+3p+2} = 1 + \frac{p+3}{p^2+3p+2} = 1 + \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

故有

$$\begin{aligned} h(t) &= (1 + \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2})\delta(t) \\ &= \delta(t) + \frac{2}{p+1}\delta(t) - \frac{1}{p+2}\delta(t) \\ &= \delta(t) + (2e^{-t} - e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

(3) 当 $n < m$ 时, $h(t)$ 中除了包含指数项 $\sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} u(t)$ 和冲激函数 $\delta(t)$ 外, 还将包含 $\delta^{(m-n)}(t)$ 的冲激函数 $\delta(t)$ 的各阶导数。

例 2.3.5 已知 $h(t) = \frac{3p^3 + 5p^2 - 5p - 5}{p^2 + 3p + 2}\delta(t)$, 试求 $h(t)$ 。

解

$$H(p) = \frac{3p^3 + 5p^2 - 5p - 5}{p^2 + 3p + 2} = 3p - 4 + \frac{p+3}{p^2 + 3p + 2} = 3p - 4 + \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

故有

$$h(t) = (3p - 4 + \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2})\delta(t) = 3\delta'(t) - 4\delta(t) + (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

例 2.3.6 电路如图 2-8 所示, 试求关于 $i(t)$ 的冲激响应 $h(t)$ 。

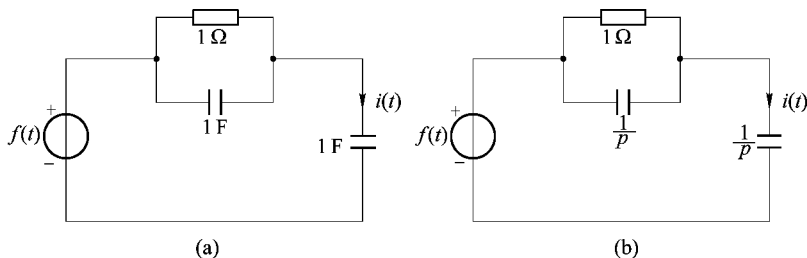


图 2-8 例 2.3.6 用图

解 如图 2-8(a) 所示电路的算子电路模型如图 2-8(b) 所示。根据图 2-8(b) 的电路模型可得

$$i(t) = \frac{f(t)}{\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p}} = \frac{p^2 + p}{2p+1}f(t) = (\frac{1}{2}p + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{p + \frac{1}{2}})f(t)$$

故有

$$h(t) = (\frac{1}{2}p + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{p + \frac{1}{2}})\delta(t) = \frac{1}{2}\delta'(t) + \frac{1}{4}\delta(t) - \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

2.3.5 单位阶跃信号

单位阶跃信号的波形如图 2-9(a) 所示, 通常以符号 $u(t)$ 表示为

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (2-50)$$

在跳变点 $t = 0$ 处规定函数值 $u(0) = \frac{1}{2}$ 。

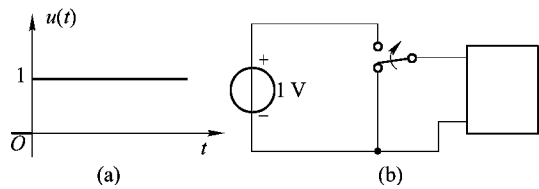


图 2-9 单位阶跃函数

单位阶跃信号的物理背景是,在 $t = 0$ 时刻对某一电路接入单位电源(可以是直流电压源或直流电流源),并且无限持续下去。如图 2-9(b) 所示为接入 1 V 直流电压源的情况,在接入端口处电压为阶跃信号 $u(t)$ 。

容易证明,单位斜变函数的导数等于单位阶跃函数。

$$\frac{df(t)}{dt} = u(t)$$

如果接入电源的时间推迟到 $t = t_0$ 时刻($t_0 > 0$),那么可用一个“延时的单位阶跃函数”表示:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \quad (2-51)$$

单位阶跃函数波形如图 2-10 所示。

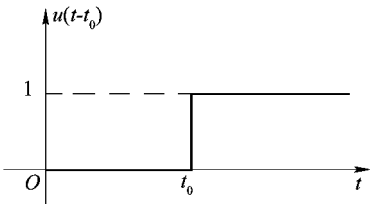


图 2-10 延时的单位阶跃函数

为书写方便,常利用阶跃及其延时信号之差来表示矩形脉冲。对于如图 2-11 所示的矩形脉冲信号以 $R_T(t)$ 表示,即

$$R_T(t) = u(t) - u(t - T)$$

式中,下标 T 表示矩形脉冲出现在 0 到 T 时刻之间。

阶跃信号鲜明地表示出信号的单边特性,即使信号在某接入时刻 t_0 以前的幅度为零。利用阶跃信号的这一特性,可以较方便地以数学表达式描述各种信号的接入特性。例如,如图 2-12 所示的波形可写为

$$f_1(t) = \sin t \cdot u(t)$$

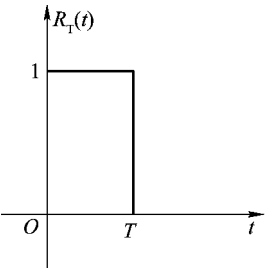


图 2-11 矩形脉冲

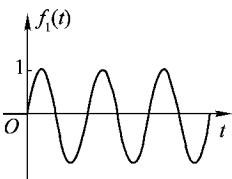


图 2-12 $\sin t \cdot u(t)$ 波形

而如图 2-13 所示的波形则表示为

$$f_2(t) = e^{-t}[u(t) - u(t - t_0)]$$

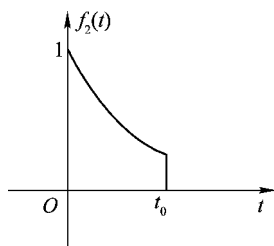


图 2-13 $e^{-t}[u(t) - u(t - t_0)]$ 波形

利用阶跃信号还可以表示“符号函数”。符号函数(signum) 简写作 $\text{sgn}(t)$, 其定义如下:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (2-52)$$

其波形如图 2-14 所示。与阶跃信号类似, 对于符号函数在跳变点也可不予定义, 或规定 $\text{sgn}(0) = 0$ 。显然, 可以利用阶跃信号来表示符号函数:

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1 \quad (2-53)$$

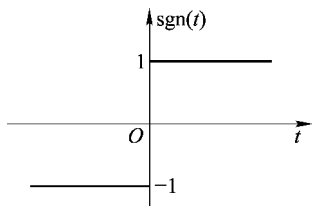


图 2-14 $\text{sgn}(t)$ 信号波形

2.3.6 阶跃响应

1. 阶跃响应的定义

在单位阶跃信号 $u(t)$ 作用下, 系统的零状态响应称为单位阶跃响应, 简称阶跃响应, 用 $g(t)$ 表示, 如图 2-15 所示。

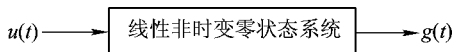


图 2-15 阶跃响应示意图

由于单位阶跃函数 $u(t)$ 与单位冲激函数 $\delta(t)$ 的关系为

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

根据线性非时变零状态系统的微(积)分特性, 同一系统的阶跃响应与冲激响应的关系为

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad (2-54)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (2-55)$$

2. 阶跃响应 $g(t)$ 的求法

阶跃响应 $g(t)$ 的求解方法之一是根据线性系统的积分性,可通过将 $h(t)$ 进行积分而求得,即

$$g(t) = \int_{0^-}^t h(\tau) d\tau$$

例 2.3.7 试求如图 2-8 所示电路中关于 $i(t)$ 的阶跃响应 $g(t)$ 。

解 在例 2.3.6 中已求得该电路的冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{2}\delta'(t) + \frac{1}{4}\delta(t) - \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

故得阶跃响应 $g(t)$ 为

$$g(t) = \int_{0^-}^t h(\tau) d\tau = \int_{0^-}^t \left[\frac{1}{2}\delta'(\tau) + \frac{1}{4}\delta(\tau) - \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}\tau} \right] d\tau = \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

如果描述系统的微分方程是式(2-8),将 $f(t) = u(t)$ 代入,可求得其特解为

$$y_p(t) = \frac{b_0}{a_0}u(t) \quad (2-56)$$

若式(2-8)的特征根 $\lambda_i (i=1,2,\dots,n)$ 均为单根,则系统的阶跃响应的一般形式($n \geq m$)为

$$g(t) = \left(\sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} + \frac{b_0}{a_0} \right) u(t) \quad (2-57)$$

例 2.3.8 给定如图 2-16 所示电路,试求电流 $i(t)$ 对激励 $e(t) = u(t)$ 的阶跃响应 $g(t)$ 。

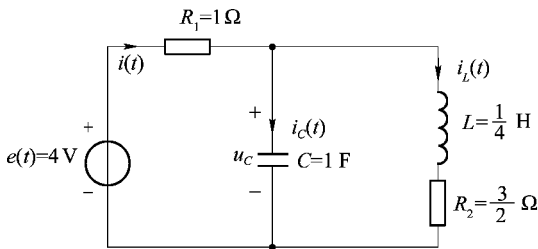


图 2-16 例 2.3.8 用图

解 根据电路形式,可列写出回路方程为

$$R_1 i(t) + u_c(t) = e(t) \quad (2-58)$$

$$u_c(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t) + i_L(t) R_2 \quad (2-59)$$

列结点方程得

$$i(t) = C \frac{d}{dt} u_c(t) + i_L(t) \quad (2-60)$$

根据式(2-58)和式(2-60),得

$$\frac{d}{dt} i(t) = -\frac{1}{C} i(t) + \frac{1}{R_1 C} i_L(t) + \frac{1}{R_1} \frac{d}{dt} e(t)$$

根据式(2-58)和式(2-59),得

$$\frac{d}{dt} i_L(t) = -\frac{R_1}{L} i(t) - \frac{R_2}{L} i_L(t) + \frac{1}{L} e(t)$$

再消去变量 $i_L(t)$,整理得

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2}i(t) + \left(\frac{1}{R_1C} + \frac{R_2}{L}\right) \frac{d}{dt}i(t) + \left(\frac{1}{LC} + \frac{R_2}{R_1LC}\right)i(t) \\ &= \frac{1}{R_1} \frac{d^2}{dt^2}e(t) + \frac{R_2}{R_1L} \frac{d}{dt}e(t) + \frac{1}{R_1LC}e(t) \end{aligned}$$

把电路参数 R_1, R_2, L, C 代入得

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t) + 7 \frac{d}{dt}i(t) + 10i(t) = \frac{d^2}{dt^2}e(t) + 6 \frac{d}{dt}e(t) + 4e(t)$$

系统的阶跃响应 $g(t)$ 满足方程:

$$\frac{d^2}{dt^2}g(t) + 7 \frac{d}{dt}g(t) + 10g(t) = \delta'(t) + 6\delta(t) + 4u(t)$$

则系统的特征根为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -5$, 由式(2-56)知其特解为 $\frac{4}{10}u(t) = \frac{2}{5}u(t)$, 由式(2-57)

知其阶跃响应为

$$g(t) = (A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} + \frac{2}{5})u(t)$$

它的一阶导数为

$$g'(t) = (-2A_1 e^{-2t} - 5A_2 e^{-5t})u(t) + (A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} + \frac{2}{5})\delta(t)$$

根据冲激函数的取样特性得

$$g'(t) = (-2A_1 e^{-2t} - 5A_2 e^{-5t})u(t) + (A_1 + A_2 + \frac{2}{5})\delta(t)$$

二阶导数为

$$g''(t) = (4A_1 e^{-2t} + 25A_2 e^{-5t})u(t) + (-2A_1 - 5A_2)\delta(t) + (A_1 + A_2 + \frac{2}{5})\delta'(t)$$

将 $\delta(t) = u(t), i(t) = g(t)$ 以及 $g'(t), g''(t)$ 代入系统的微分方程并整理得

$$(A_1 + A_2 + \frac{2}{5})\delta'(t) + (5A_1 + 2A_2 + \frac{14}{5})\delta(t) = \delta'(t) + 6\delta(t)$$

由对应项相等得

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \frac{2}{5} = 1 \\ 5A_1 + 2A_2 + \frac{14}{5} = 6 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A_1 = \frac{2}{3} \\ A_2 = -\frac{1}{15} \end{cases}$$

因此系统的阶跃响应为

$$g(t) = (\frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{1}{15}e^{-5t} + \frac{2}{5})u(t)$$

所得的 $g(t)$ 也可以通过求 $h(t)$ 的积分得出。

上面介绍了用时域法求系统的冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$ 。应该注意的是,在学习拉普拉斯变换(第4章)后,用变换域方法求 $h(t)$ 及 $g(t)$ 更加方便。这里用的方法比较直观,物理概念明确,也是以后学习变换域分析的基础。

2.4 卷积积分

卷积法在信号与系统理论中占有重要地位,随着理论研究的深入和计算机技术的发展,卷积法得到了更加广泛的应用。根据线性时不变系统(LTI)的性质,如果将作用于LTI系统的输入信号分解,而且每个分量作用于系统的响应容易求得。那么,根据叠加原理,将各个分量产生的响应求和即可得原输入信号引起的响应。这种分解可表示为像冲激、阶跃、三角函数(指数函数)这样一些基本函数的加权和。卷积法的原理就是将信号分解成许多冲激信号之和,借助系统的冲激响应,求解线性时不变系统对任意激励信号的零状态响应。它也是时域与变换域方法之间相联系的重要手段。

2.4.1 卷积积分的推导

对于任意一个激励信号 $f(t)$,为了方便令 $\Delta\tau = \frac{2}{n}$,这样可以把激励信号 $f(t)$ 分解为许多宽度为 $\Delta\tau$ 的窄脉冲,如图 2-17 所示。其中第 k 个脉冲出现在 $t = k\Delta\tau$ 时刻,其强度(脉冲下的面积)为 $f(k\Delta\tau) \cdot \Delta\tau$ 。

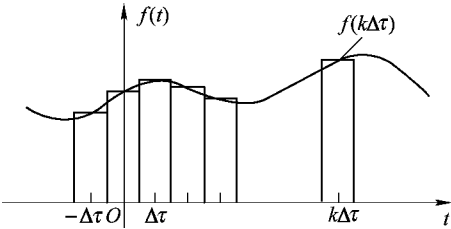


图 2-17 函数 $f(t)$ 分解为窄脉冲

这样可以将 $f(t)$ 近似地看做是由一系列强度不同,接入时刻不同的窄脉冲组成。所有这些窄脉冲的和近似地等于 $f(t)$,即

$$f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta\tau) p_n(t - k\Delta\tau) \Delta\tau$$

式中, k 为整数; $p_n(t)$ 是幅度为 $\frac{n}{2}$, 宽度为 $\frac{2}{n}$ 的矩形脉冲, 它的强度为 1 (即脉冲波形下的面积为 1)。

如果 LTI 系统在窄脉冲 $p_n(t)$ 作用下的零状态响应为 $h_n(t)$, 那么根据 LTI 系统的零状态线性性质和激励与响应间的时不变特性, 在以上一系列窄脉冲作用下, 系统的零状态响应近似为

$$y(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta\tau) h_n(t - k\Delta\tau) \Delta\tau$$

在 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 的极限情况下, 将 $\Delta\tau$ 写作 $d\tau$, $k\Delta\tau = \tau$, 它是时间变量, 同时求和符号应改写为积分符号, 则 $f(t)$ 和 $y(t)$ 可写为

$$f(t) = \lim_{\substack{\Delta\tau \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta\tau) p_n(t - k\Delta\tau) \Delta\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \tag{2-61}$$

$$y(t) = \lim_{\substack{\Delta\tau \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k\Delta\tau)h_n(t-k\Delta\tau)\Delta\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2-62)$$

式(2-61)和式(2-62)称为卷积积分。式(2-62)表明,LTI系统的零状态响应 $y(t)$ 是激励信号 $f(t)$ 与冲激响应 $h(t)$ 的卷积积分。

由此可定义卷积积分,若有两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$,则积分得

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \quad (2-63)$$

式(2-63)称为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积积分,简称卷积。其中, τ 为积分变量, t 为参变量。显然,上述卷积的结果是 t 的函数。

单位冲激函数 $\delta(t)$ 的卷积特性:若信号 $f(t)$ 是任意一个连续时间函数,则根据 $\delta(t)$ 函数的筛选特性,有

$$y(t) = f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t) \quad (2-64)$$

上式表明任意连续时间信号 $f(t)$ 与冲激信号 $\delta(t)$ 的卷积,其结果还是信号 $f(t)$ 本身。冲激信号的上述特性在信号与系统的分析中具有重要的作用。

2.4.2 卷积积分的图解法

卷积积分的图解法能直观地理解卷积的计算过程并加深对其物理意义的理解,而且在确定卷积积分的上、下限时,用图解法是一种极有用的辅助手段。

由式(2-62)可知,要计算 $y(t)$,就必须给出 $f(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 。实际上, $f(\tau)$ 和 $h(\tau)$ 就是将自变量 t 换成 τ ,然后按下列步骤完成两个信号的卷积积分。

- (1) 反转,将 $h(\tau)$ 绕纵坐标反转,得 $h(-\tau)$ 。
- (2) 时移,将 $h(-\tau)$ 沿 τ 轴移动某一时刻 t_1 ,得 $h(t_1-\tau)$ 。
- (3) 相乘,将移动后的 $h(t_1-\tau)$ 乘以 $f(\tau)$ 得 $f(\tau)h(t_1-\tau)$ 。
- (4) 卷积积分,沿 τ 轴对上述乘积函数 $f(\tau)h(t_1-\tau)$ 积分,即

$$y(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t_1-\tau)d\tau$$

其值正好是 t_1 时刻的 $f(\tau)h(t_1-\tau)$ 曲线下的面积。再以 t 为参变量,将波形 $h(t-\tau)$ 连续地沿 τ 轴平移,就得到任意时刻 t 的卷积积分,即

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

例 2.4.1 设某系统的激励信号 $f(t)$ 和冲激响应 $h(t)$ 分别如图 2-18(a)、(b) 所示。试求该系统的零状态响应 $y(t) = f(t) * h(t)$,并画出 $y(t)$ 的波形。

解 将 $h(\tau)$ 反折,得 $h(-\tau)$,如图 2-18(c) 所示。由图可见, $h(\tau)$ 保持不动,将 $h(-\tau)$ 平移 t ,得 $h(t-\tau)$,如图 2-18(d) 所示。

其计算结果如下:

(1) 当 $-\infty < t < -2$ 或 $t-2 > 2$,即 $4 < t < +\infty$ 时, $f(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 无重叠部分,其乘积为零,故有

$$y(t) = 0$$

(2) 当 $-2 < t < 0$ 时,由于 $\tau < -2$, $f(\tau) = 0$ 和 $t-\tau > 0$,即 $\tau < t$, $h(t-\tau) = 0$,故被积函数 $f(\tau)h(t-\tau)$ 仅在 $-2 < \tau < t$ 内不等于零,则

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{-2}^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \\&= \int_{-2}^t 2 \times \frac{3}{4}d\tau \\&= \frac{3}{2}(t+2)\end{aligned}$$

(3) 当 $0 < t < 2$ 时, 由于当 $\tau < 0$ 和 $\tau > 2$ 时, $h(\tau) = 0$, 故而当 $t - \tau < 0$ 和 $t - \tau > 2$ 时, $h(t - \tau) = 0$, 即 $\tau > t$ 和 $\tau < t - 2$ 时, $h(t - \tau) = 0$ 。因此被积函数 $f(\tau)h(t - \tau)$ 仅在 $t - 2 < \tau < t$ 区间不为零, 于是得

$$y(t) = \int_{t-2}^t 2 \times \frac{3}{4}d\tau = 3$$

(4) 当 $2 < t < 4$ 时, 这时被积函数 $f(\tau)h(t - \tau)$ 在 $t - 2 < \tau < 2$ 内不等于零, 因此有

$$y(t) = \int_{t-2}^2 2 \times \frac{3}{4}d\tau = \frac{3}{2}(4 - t)$$

由此得到 $y(t)$ 的波形如图 2-18(e) 所示。

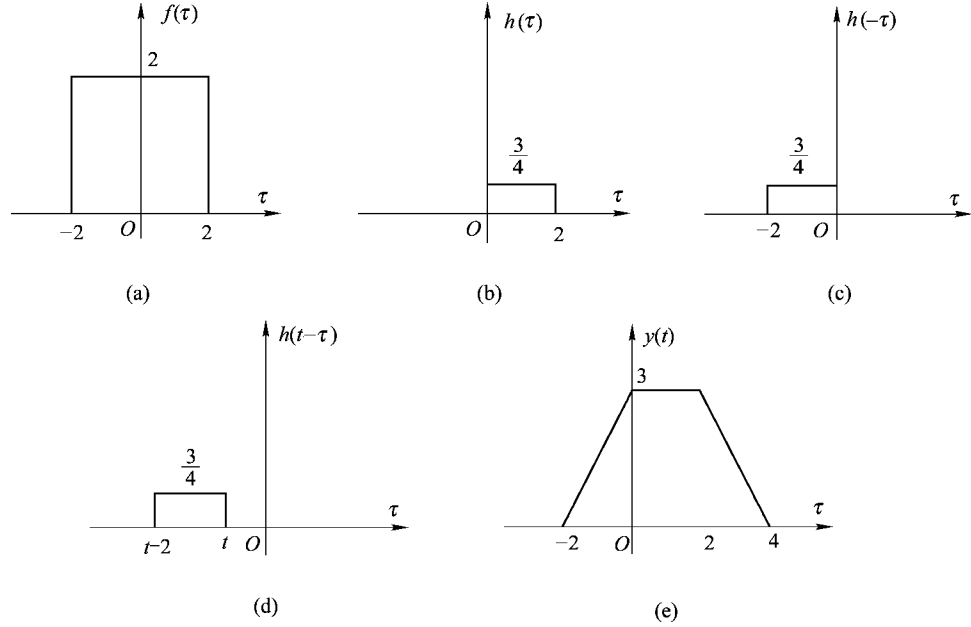


图 2-18 例 2.4.1 的卷积图解

2.4.3 卷积积分的性质

卷积积分是一种数学运算, 它有很多重要的性质(运算规则), 灵活地运用它们能简化系统分析。

1. 卷积的代数运算

1) 交换律

$$f(t) * h(t) = h(t) * f(t) \tag{2-65}$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

证明:根据卷积的定义有

$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

令 $\lambda = t - \tau$, 于是 $\tau = t - \lambda, d\tau = -d\lambda$, 代入上式有

$$\begin{aligned} f(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} f(t-\lambda)h(\lambda)(-d\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)f(t-\lambda)d\lambda \\ &= h(t) * f(t) \end{aligned}$$

由此可见,交换律的几何含义是对任意时刻 t , 乘积函数 $f(\tau)h(t-\tau)$ 曲线下的面积与 $h(\tau)f(t-\tau)$ 下的面积相等。

例 2.4.2 $f_1(t) = e^{-t}u(t), f_2(t) = \sin tu(t)$, 试求 $g(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。

解法一 将 $f_2(t)$ 反褶。

$$\begin{aligned} g(t) &= f_1(t) * f_2(t) \\ &= \int_0^t e^{-\tau} \sin(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^{-\tau} (\sin t \cdot \cos \tau - \cos t \cdot \sin \tau) d\tau \\ &= \sin t \int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau - \cos t \int_0^t e^{-\tau} \sin \tau d\tau \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \int_0^t \cos \tau e^{-\tau} d\tau &= - \int_0^t \cos \tau de^{-\tau} \\ &= - \cos \tau \cdot e^{-\tau} \Big|_0^t + \int_0^t \sin \tau de^{-\tau} \\ &= 1 - \cos t e^{-t} + \sin t e^{-t} - \int_0^t \cos \tau de^{-\tau} \end{aligned}$$

故有

$$\int_0^t \cos \tau e^{-\tau} d\tau = \frac{1}{2}(1 - e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t)u(t)$$

同理可得

$$\int_0^t \sin \tau e^{-\tau} d\tau = \frac{1}{2}(1 - e^{-t} \sin t - e^{-t} \cos t)u(t)$$

于是

$$\begin{aligned} g(t) &= \sin t \int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau - \cos t \int_0^t e^{-\tau} \sin \tau d\tau \\ &= \frac{1}{2} \sin t (1 - e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t) u(t) - \frac{1}{2} \cos t (1 - e^{-t} \sin t - e^{-t} \cos t) u(t) \\ &= \frac{1}{2} (\sin t - \cos t + e^{-t}) u(t) \end{aligned}$$

解法二 将 $f_1(t)$ 反褶。

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^t \sin \tau e^{-(t-\tau)} d\tau \\
&= [e^{-t} \int_0^t \sin \tau e^{\tau} d\tau] u(t) \\
&= [e^{-t} \int_0^t \sin \tau d(e^{\tau})] u(t) \\
&= e^{-t} [e^t \sin t - \int_0^t \cos \tau d(e^{\tau})] u(t) \\
&= e^{-t} (e^t \cos t - e^{\tau} \cos \tau \big|_0^t - \int_0^t \sin \tau e^{\tau} d\tau) u(t) \\
&= (\sin t - \cos t + e^{-t}) + e^{-t} \int_0^t \sin \tau e^{\tau} d\tau
\end{aligned}$$

整理得

$$g(t) = (e^{-t} \int_0^t \sin \tau e^{\tau} d\tau) u(t) = \frac{1}{2} (\sin t - \cos t + e^{-t}) u(t)$$

两种计算结果完全一致,显然第二种方法比第一种方法简单得多。

2) 分配律

$$f(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = f(t) * h_1(t) + f(t) * h_2(t) \quad (2-66)$$

证明:根据卷积积分的定义,有

$$\begin{aligned}
f(t) * [h_1(t) + h_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) [h_1(t-\tau) + h_2(t-\tau)] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) h_1(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) h_2(t-\tau) d\tau \\
&= f(t) * h_1(t) + f(t) * h_2(t)
\end{aligned}$$

它的物理含义可以这样理解,假如 $f(t)$ 是系统的冲激响应, $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 是激励,则式(2-66)表明几个输入激励之和的零状态响应将等于每个激励的零状态响应之和;假如 $f(t)$ 是激励,而 $h_1(t) + h_2(t)$ 是系统的冲激响应,则式(2-66)表明激励对于冲激响应为 $h_1(t) + h_2(t)$ 的系统的零状态响应等于激励对冲激响应分别为 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 的两系统项并联的零状态响应。

3) 结合律

$$[f(t) * h_1(t)] * h_2(t) = f(t) * [h_1(t) * h_2(t)] \quad (2-67)$$

证明:同样根据卷积积分的定义,有

$$\begin{aligned}
f(t) * [h_1(t) * h_2(t)] &= f(t) * \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau) h_2(t-\tau) d\tau \right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau) h_2(t-\lambda-\tau) d\tau \right] d\lambda
\end{aligned}$$

令 $\xi = \lambda + \tau$, 则 $\tau = \xi - \lambda$, $d\tau = d\xi$, 于是上式变为

$$f(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\xi - \lambda) h_2(t - \xi) d\xi \right] d\lambda$$

交换积分次序,上式变为

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) h_1(\xi - \lambda) d\lambda \right] h_2(t - \xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\xi) * h_1(\xi)] h_2(t - \xi) d\xi \\
&= [f(t) * h_1(t)] * h_2(t)
\end{aligned}$$

上式表明,如果冲激响应分别为 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 的两系统相级联时,其零状态响应等于一

个冲激响应为 $h_1(t) * h_2(t)$ 的系统的零状态响应。

2. 卷积的微分与积分

1) 卷积的微分

设 $y(t) = f(t) * h(t) = h(t) * f(t)$, 则

$$y'(t) = f(t) * h'(t) = h(t) * f'(t) \quad (2-68)$$

式中, $y'(t)$, $f'(t)$ 和 $h'(t)$ 分别表示 $y(t)$, $f(t)$ 和 $h(t)$ 对时间 t 的一阶导数。

证明:

$$y'(t) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \right]' = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) h'(t-\tau) d\tau = f(t) * h'(t)$$

同理

$$y'(t) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau \right]' = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f'(t-\tau) d\tau = h(t) * f'(t)$$

2) 卷积的积分

设 $y(t) = f(t) * h(t) = h(t) * f(t)$, 则

$$y^{(-1)}(t) = f(t) * h^{(-1)}(t) = h(t) * f^{(-1)}(t) \quad (2-69)$$

式中, $y^{(-1)}(t)$, $f^{(-1)}(t)$ 和 $h^{(-1)}(t)$ 分别表示 $y(t)$, $f(t)$ 和 $h(t)$ 对时间 t 的一次积分。

证明:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t y(\lambda) d\lambda &= \int_{-\infty}^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) h(\lambda-\tau) d\tau \right] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^t h(\lambda-\tau) d\tau \right] d\lambda \\ &= f(t) * h^{(-1)}(t) \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t y(\lambda) d\lambda &= \int_{-\infty}^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(\lambda-\tau) d\tau \right] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \left[\int_{-\infty}^t f(\lambda-\tau) d\tau \right] d\lambda \\ &= h(t) * \int_{-\infty}^t f(t) dt \end{aligned}$$

若对式(2-68)求积分或对式(2-69)求导数, 则有

$$y(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt * h'(t) = f'(t) * h^{(-1)}(t) \quad (2-70)$$

用类似推导还可得出

$$y^{(i+j)}(t) = f^{(i)}(t) * h^{(j)}(t) \quad (2-71)$$

式中, i, j 或 $i+j$ 为正整数时, 表示导数的阶数, 为负整数时, 表示重积分的次数。式(2-71)表明了卷积的高阶导数和多重积分的运算规则。

例 2.4.3 设有两个函数分别为 $f_1(t) = tu(t)$, $f_2(t) = e^{-at}u(t)$, 试求这两个函数的卷积 $f_1(t) * f_2(t)$ 。

解 对 $f_1(t)$ 求导, 对 $f_2(t)$ 求积分, 得

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= [tu(t)]' = t\delta(t) + u(t) = u(t) \\ \int_{-\infty}^t f_2(t) dt &= \int_{-\infty}^t e^{-a\lambda} u(\lambda) d\lambda = \int_0^t e^{-a\lambda} d\lambda = \frac{1 - e^{-at}}{a} u(t) \end{aligned}$$

由式(2-68),得

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-\alpha\tau}) u(\tau) u(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^t (1 - e^{-\alpha\tau}) d\tau \\ &= \left(\frac{t}{\alpha} + \frac{e^{-\alpha t} - 1}{\alpha^2} \right) u(t) \end{aligned}$$

3. 函数与冲激函数的卷积

卷积积分中最简单的情况是两个函数之一是冲激函数,其中奇异信号 $\delta(t)$ 具有特殊的卷积特性,这些特性对于信号系统分析具有重要的意义。

(1) 已知冲激函数的卷积特性为

$$f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = f(t) \quad (2-72)$$

利用冲激函数的取样性质和卷积运算的交换律,可得

$$f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) f(t - \tau) d\tau = f(t)$$

上式表明,某函数与冲激函数的卷积就是它本身。

(2) 冲激函数的卷积特性是卷积运算的重要性质之一,将它进一步推广,可得

$$f(t) * \delta(t - t_1) = \delta(t - t_1) * f(t) = f(t - t_1) \quad (2-73)$$

(3) 由卷积特性,可得

$$f(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_2) * f(t - t_1) = f(t - t_1 - t_2) \quad (2-74)$$

(4) 利用卷积的交换律、结合律可得到下面的重要结论,即若

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

则

$$f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) = f_1(t - t_2) * f_2(t - t_1) = f(t - t_1 - t_2)$$

上式表明,如激励 $f_1(t)$ 作用于冲激响应为 $h(t) = f_2(t)$ 的系统之零状态响应 $y_f(t) = f(t)$,那么延时为 t_1 的激励作用于冲激响应延时为 t_2 的系统,与延时为 t_2 的激励作用于冲激响应延时为 t_1 的系统,其零状态响应相同,延时为 $t_1 + t_2$ 。

2.4.4 卷积积分的数值解

卷积积分的数值解就是卷积积分的近似计算。以上讨论的都是用数学解析式来计算卷积,最后的结果也是一个解析式。但在线性系统分析中,有时激励信号或系统的单位冲激响应比较复杂,不易甚至不能用简单的常用函数来表示,或者根本就没有数学表达式,而只是一组测试数据或一条测试曲线,从而无法用解析式法来计算卷积,此时这种近似计算方法显得尤为重要。

随着计算机技术的发展与计算机的普及使用,人们迫切希望用计算机来代替人工进行繁杂的卷积运算。因此,人们越来越关注卷积的数值计算。

近似计算依据的基本原理是任意的连续时间函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 用宽度为 Δ 的矩形脉冲来近似。取一间隔 Δ 内函数的一个采样点的数值作为各个矩形脉冲的高度,并以离散的卷积和来近似表示连续的卷积积分。

下面结合如图 2-19 所示,举例说明这种近似计算方法。

(1) 将给定的函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的自变量 t 替换为 τ 。

(2) 在 $x_1(\tau)$ 和 $x_2(\tau)$ 定义的区间内,将自变量 τ 分成若干等间隔区间,令此间隔为 0.1。

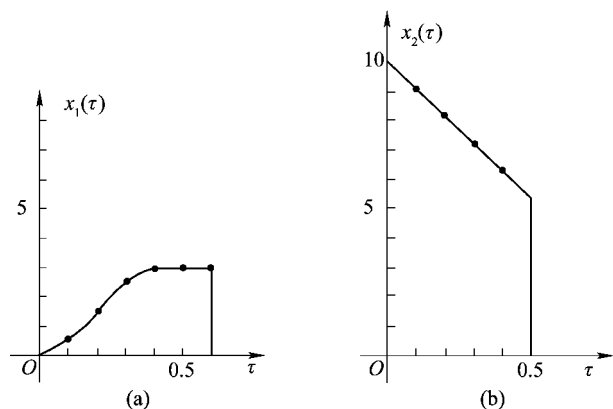


图 2-19 给定的函数 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的自变量 t 替换为 τ

(3) 在每一间隔内取 $x_1(\tau)$ 、 $x_2(\tau)$ 的一个样本。现在以每一间隔的中点取样本,各区间内获得样本如图 2-20(a) 所示。

τ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$x_1(\tau)$	0.5	1.5	2.5	3	3	3
$x_2(\tau)$	9.5	8.5	7.5	6.5	5.5	

(a)

$x_1(\tau)$	0.5	1.5	2.5	3	3	3
5.5 6.5 7.5 8.5 9.5	$x_2(t-\tau), t=0$					
5.5 6.5 7.5 8.5 9.5	$t=0.1$					
5.5 6.5 7.5 8.5 9.5	$t=0.2$					
5.5 6.5 7.5 8.5 9.5	$t=0.3$					

(b)

图 2-20 取样图

(4) 将由 x_1 获得的样本和反转后的 x_2 的样本分别写在两个小纸条上,改变两纸条的相对位置,如上纸条固定,下纸条右移,如图 2-20(b) 所示。下纸条每移动 0.1,将相重叠的两纸条上的样本相乘后相加,再乘以间隔 0.1,便得到在不同 t 值时卷积的近似值,如

$$\text{当 } t = 0, x_1 * x_2 = (0.5 \times 0) \times 0.1 = 0$$

$$\text{当 } t = 0.1, x_1 * x_2 = (0.5 \times 9.5) \times 0.1 = 0.48$$

$$\text{当 } t = 0.2, x_1 * x_2 = (0.5 \times 8.5 + 1.5 \times 9.5) \times 0.1 = 1.85$$

$$\text{当 } t = 0.3, x_1 * x_2 = (0.5 \times 7.5 + 1.5 \times 8.5 + 2.5 \times 9.5) \times 0.1 = 4.03$$

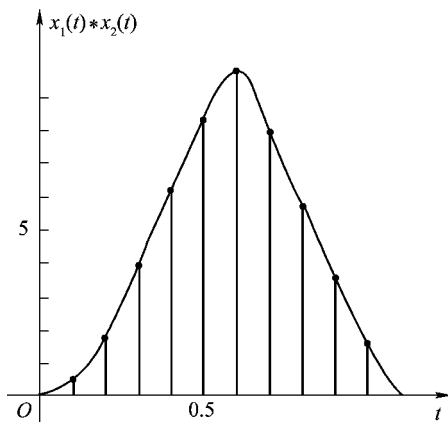
...

如此依次计算,直至当 $t = 1.1$,两纸条相对移动的结果使两纸条上没有两个非零的样本相重叠, $x_1 * x_2 = 0$ 。近似计算得 $x_1 * x_2$ 值为

t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
$x_1(t) * x_2(t)$	0	0.48	1.85	4.03	6.42	8.52	10.01	8.12	5.85	3.6	1.65	0

由以上数据,画出 $x_1 * x_2$ 的波形图如图 2-21 所示。

以上介绍的数值解是卷积积分近似计算的具体方法之一。在某些近似计算中,为了减小误差,有时选在每一间隔的左边或右边边缘取样本。可以看到,近似计算较之精确的卷积积分运算存在误差。为了减小误差,时间间隔应尽量选得小,但为此必须付出加大计算量的代价。在实际应用中,间隔的大小应由允许的误差来确定。若计算量大,或要求的允许误差

图 2-21 $x_1 * x_2$ 的波形图

小,可将近似计算排成程序,由计算机来完成卷积积分的数值解。实际上,在很多信号处理的计算机软件包中,已有现成的计算机的计算卷积方法可供使用。

在实际计算时, Δ 应取得足够小,以保证必需的计算精度。这种卷积积分的数值解特别适用于某些复杂信号不能用函数式表示,只能用一组数据或图形表示的情况。

2.5 系统的时域分析法举例

本节用几个例题来归纳总结本章所讨论的系统时域分析的方法和步骤。

例 2.5.1 已知一系统的微分方程为 $y'(t) + 2y(t) = f(t)$, 且 $y(0^-) = 2$ 。试求输入为 $f(t) = e^{-t}$ 时的输出响应 $y(t)$ 。

解 特征方程和特征根分别为

$$\lambda + 2 = 0, \quad \lambda = -2$$

则齐次解为

$$y_h(t) = ce^{-2t}$$

令特解为

$$y_p(t) = be^{-t}$$

将 $f(t) = e^{-t}$ 代入微分方程,可求出系数 $b = 1$, 所以特解为

$$y_p(t) = e^{-t}$$

则其完全解为

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = ce^{-2t} + e^{-t}$$

由于该系统的初始状态不产生跳变,故 $y(0^-) = y(0^+) = 2$, 代入上式得

$$y(0^+) = c + 1 = 2, \quad c = 1$$

最后得到系统的输出响应为

$$y(t) = e^{-2t} + e^{-t}$$

例 2.5.2 设系统的转移算子为

$$H(p) = \frac{p+3}{p^2+3p+2}$$

且 $f(t) = e^{-3t}u(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, 试求系统的全响应 $y(t)$ 。

解 (1) 求系统的零输入响应 $y_0(t)$ 。

系统的特征方程为

$$D(p) = p^2 + 3p + 2 = 0$$

解得特征根为

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

则零输入响应为

$$y_0(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \quad (t \geqslant 0)$$

将初始条件代入得

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = -c_1 - 2c_2 = 2 \end{cases}$$

解得

$$c_1 = 4, c_2 = -3$$

所以有

$$y_0(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} \quad (t > 0)$$

(2) 求零状态响应 $y_f(t)$ 。

将 $H(p)$ 作部分分式展开, 得

$$H(p) = \frac{p+3}{p^2+3p+2} = \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

系统的单位冲激响应为

$$h(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

由于激励信号为

$$f(t) = e^{-3t}u(t)$$

则系统的零状态响应为

$$y_f(t) = f(t) * h(t)$$

用算子法计算这个卷积:

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-3t}u(t) = \frac{1}{p+3}\delta(t) \\ h(t) &= H(p)\delta(t) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}\delta(t) \\ y_f(t) &= f(t) * h(t) \\ &= \left[\frac{1}{p+3}\delta(t)\right] * \left[\frac{p+3}{(p+1)(p+2)}\delta(t)\right] \\ &= \frac{1}{(p+1)(p+2)}\delta(t) \\ &= \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}\right)\delta(t) \\ &= (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

(3) 求系统的全响应。

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0(t) + y_f(t) \\ &= 4e^{-t} - 3e^{-2t} + (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \\ &= 5e^{-t} - 4e^{-2t} \quad (t \geqslant 0) \end{aligned}$$

2.6 利用 MATLAB 进行系统的时域分析

本章前几节介绍了用解析法进行系统的时域分析以及求解的方法。本节将利用 MATLAB 提供的函数求系统在不同输入作用下的时间响应。

2.6.1 连续时间系统零状态响应的求解

LTI 连续时间系统以常系数微分方程描述,系统的零状态响应可通过求解初始状态为零的微分方程得到。在 MATLAB 中,控制系统工具箱提供了一个用于求解零初始状态微分方程数值解的函数 `lsim`。其调用方式为

$$y = \text{lsim}(\text{sys}, f, t)$$

其中, t 为计算系统响应的抽样点向量; f 为系统输入信号向量; sys 为 LTI 系统模型,用来表示微分方程、差分方程和状态方程。

在求解微分方程时,微分方程的 LTI 系统模型 sys 要借助 `tf` 函数获得,其调用方式为

$$\text{sys} = \text{tf}(b, a)$$

其中, b 和 a 分别为微分方程右端和左端各项的系数向量。

例如,对三阶微分方程:

$$a_3 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_3 \frac{d^3 f(t)}{dt^3} + b_2 \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t)$$

可用以下指令段获得 LTI 模型:

$$a = [a_3, a_2, a_1, a_0];$$

$$b = [b_3, b_2, b_1, b_0];$$

$$\text{sys} = \text{tf}(b, a)$$

注意微分方程中为零的系数一定要写入向量 a 和 b 中。

例 2.6.1 如图 2-22 所示的电路系统中,电容器极板上电荷量与输入电压的关系为

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = u_i(t)$$

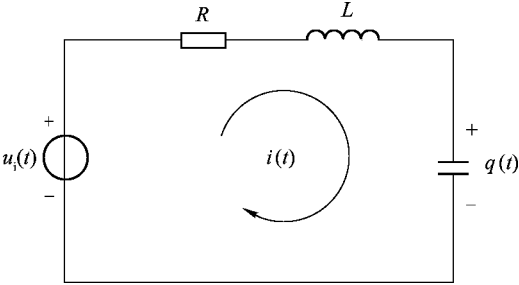


图 2-22 例 2.6.1 用图

设电感系数为 $L = 1 \text{ H}$, 电阻 $R = 10 \text{ }\Omega$, 电容器的电容 $C = 5 \text{ mF}$, 系统的初始储能为零, 若外加电压 $u_i(t)$ 是振幅为 10 V 、频率 1 Hz 的正弦信号, 试求电容器极板上的电荷量 $q(t)$ 。

解 由已知条件,系统的输入信号为

$$u_i(t) = 10 \sin(2\pi t)$$

系统的微分方程为

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + 10 \frac{dq(t)}{dt} + 200q(t) = u_i(t)$$

计算电荷量 $q(t)$ 的 MATLAB 程序如下:

```
ts = 0;te = 5;dt = 0.01;
sys = tf([1],[1 10 200]);
t = ts:dt:te;
u = 10 * sin(2 * pi * t);
q = lsim(sys,u,t);
plot(t,q);
xlabel('time(sec)')
ylabel('q(t)')
```

程序运行结果如图 2-23 所示。

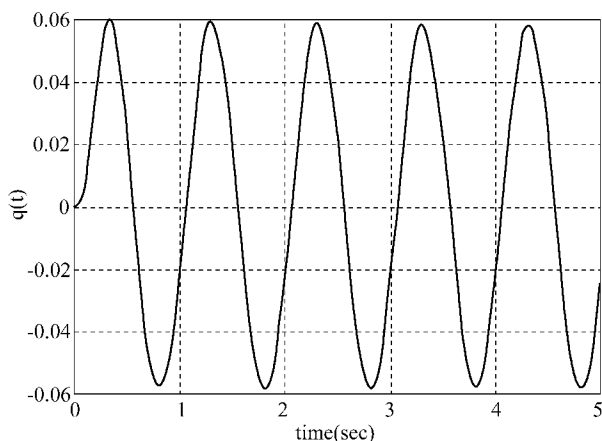


图 2-23 例 2.6.1 用图

2.6.2 利用 MATLAB 求单位冲激响应和单位阶跃响应

在 MATLAB 中,可以用控制系统工具箱提供的两个专门的函数 `impz` 函数和 `step` 函数对线性连续系统的单位冲激和单位阶跃的时间响应进行仿真计算。其中 `impz` 函数用于生成单位冲激响应;`step` 函数用于生成单位阶跃响应。而上面讲的 `lsim` 函数用于生成对任意输入的时间响应。其调用方式为

系统的单位冲激响应:

$$y = \text{impz}(\text{sys},t)$$

系统的单位阶跃响应:

$$y = \text{step}(\text{sys},t)$$

其中, y 为输出响应; sys 为由 `tf`、`zpk` 或 `ss` 建立的系统模型; t 为仿真时间区段(可选)。

例 2.6.2 若系统的微分方程为

$$0.05 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 50y(t) = 50x(t)$$

计算此系统的单位冲激响应和单位阶跃响应的 MATLAB 程序如下：

```
t = [0:0.01:0.8];
nG = [50];
dG = [0.05 2 50];G1 = tf(nG,dG);
y = impulse(G1,t);ya = step(G1,t);
plot(t,y)
xlabel('t(sec)')
ylabel('h(t)');grid on;
figure,plot(t,ya)
xlabel('t(sec)')
ylabel('g(t)');grid on;
```

程序运行结果如图 2-24 和 2-25 所示。

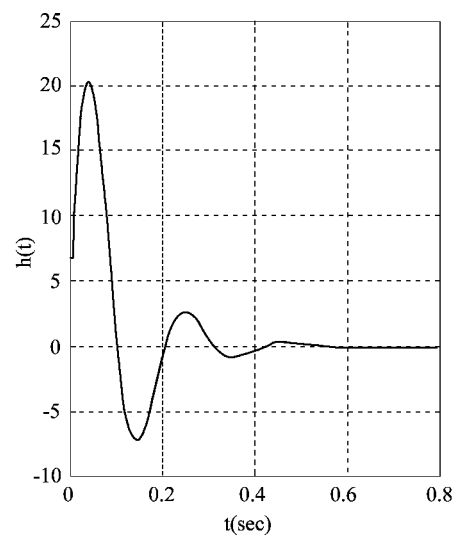


图 2-24 单位冲激响应曲线

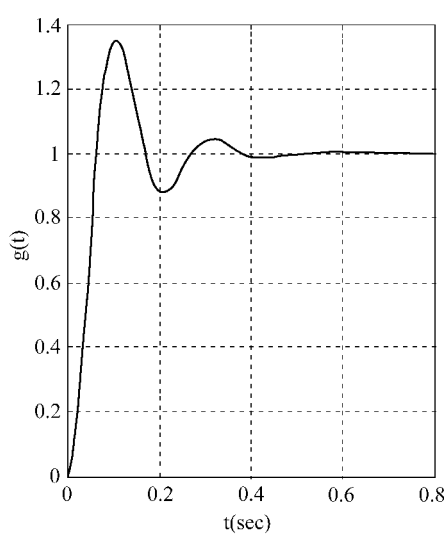


图 2-25 单位阶跃响应曲线

本章小结

1. 为了确定一个线性时不变连续系统对给定激励的响应，应建立线性系统的数学模型。线性时不变连续系统的输入输出关系用线性常系数微分方程来描述。因此首先需列出描述系统特性的微分方程表示式，然后再求出满足其初始条件的解。根据电路元件或机械元件的基本定律，列出系统的微分方程，进而求出系统微分方程的齐次解与特解，并利用算子符号表示系统的数学模型。
2. 线性非时变系统的完全响应 $y(t)$ 也可分解为零输入响应 $y_0(t)$ 和零状态响应 $y_f(t)$ 。线性非时变系统的全响应 $y(t) = y_0(t) + y_f(t)$ ，本章第 2 小节介绍了系统的零输入响应和零

状态响应的求法,并举例说明。

3. 本章第3小节介绍了冲激函数与阶跃函数的定义、冲激函数的性质、用冲激函数表示一般信号的方法、系统的冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$ 的定义和求法。

4. 卷积法在信号与系统理论中占有重要地位,随着理论研究的深入和计算机技术的发展,卷积法得到了更广泛的应用。本章介绍了卷积积分的推导、卷积积分的图解法及其性质和对一些无法用确定的数学模型来表达的测量结果进行卷积处理时所用到的数值计算。

5. 对本章所介绍的时域分析方法进行举例,并利用功能强大的信号分析与处理软件 MATLAB 进行了系统的时域分析。

习 题 2

2.1 给定如下传输算子 $H(p)$,试写出对应的微分方程。

$$(1) H(p) = \frac{p}{p+2}$$

$$(2) H(p) = \frac{p+1}{p+1}$$

$$(3) H(p) = \frac{p}{2p+3}$$

$$(4) H(p) = \frac{p(p+3)}{(p+1)(p+2)}$$

2.2 在如图 2-26 所示电路中,开关 S 在 $t=0$ 时刻由位置“1”投向位置“2”,试求 $u_C(t)$ 对 $i_S(t)$ 的传输算子 $H(p)(t \geq 0)$ 。

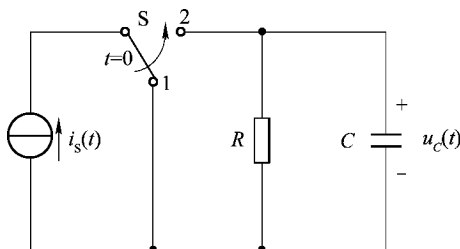


图 2-26 题 2.2 用图

2.3 在如图 2-27 所示电路中,试分别求出响应 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 、 $i_3(t)$ 对激励 $f(t)$ 的传输算子 $H_1(p)$ 、 $H_2(p)$ 、 $H_3(p)$ 。

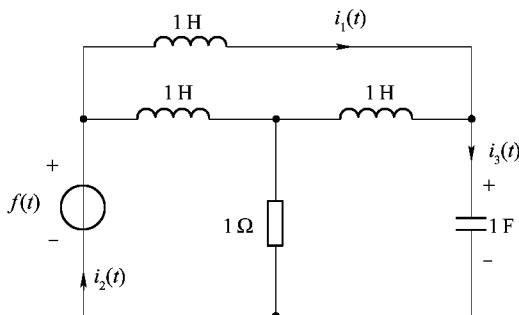


图 2-27 题 2.3 用图

2.4 试求如图 2-28 所示电路中 $u_o(t)$ 对 $f(t)$ 的传输算子 $H(p)$ 。

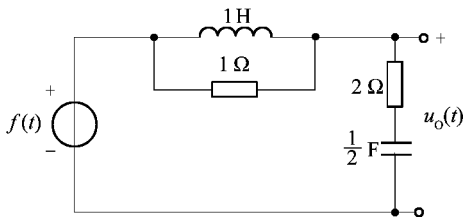


图 2-28 题 2.4 用图

2.5 已知系统微分方程相应的齐次方程为

- (1) $\frac{d^3 r(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 r(t)}{dt^2} + 2 \frac{dr(t)}{dt} = 0$, 初始条件为 $r(0) = 0, r'(0) = 1, r''(0) = 1$;
- (2) $\frac{d^2 r(t)}{dt^2} + 3 \frac{dr(t)}{dt} + 2r(t) = 0$, 初始条件为 $r(0) = 2, r'(0) = 2$ 。

试分别求出以上两种情况的零输入响应。

2.6 描述 LTI 连续系统的微分方程如下:

- (1) $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f''(t) + f'(t) + f(t)$,
 $y(0) = 1, y'(0) = 1$;
- (2) $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = f''(t) + f(t)$,
 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 。

试求系统的零输入响应 $y_0(t)$ 。

2.7 已知某连续系统的传输算子和零输入响应初始条件分别为

$$H(p) = \frac{2p^2 + 8p + 3}{(p+1)(p+3)^2},$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0$$

试求零输入响应 $y_0(t) (t \geq 0)$ 。

2.8 已知某连续系统的输入输出算子方程和初始条件如下:

- (1) $y(t) = \frac{p(p+5)}{p(p^2+3p+2)} f(t)$,
 $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0$;

- (2) $y(t) = \frac{-(2p+1)}{p(p^2+4p+8)} f(t)$,
 $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0$;

- (3) $y(t) = \frac{(3p+1)(p+2)}{p(p+2)^2} f(t)$,
 $y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 4$ 。

试求系统的零输入响应 $y_0(t)$ 。

2.9 已知连续系统的传输算子 $H(p)$ 如下:

$$(1) H(p) = \frac{p^3 + 3p^2 - p - 5}{p^2 + 5p + 6};$$

$$(2) H(p) = \frac{3p^2 + 10p + 26}{p(p^2 + 4p + 13)}.$$

试求系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

2.10 已知某系统的输入输出算子方程

$$y(t) = \frac{p^3 + 9p^2 + 24p + 18}{(p+1)(p^2 + 2p + 2)(p+2)^2} f(t)$$

试求系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

2.11 某 LTI 系统中,其输出 $y(t)$ 与输入 $f(t)$ 的关系为

$$y(t) = \int_{-1}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)} f(\tau - 2) d\tau$$

试求系统的冲激响应 $h(t)$ 。

2.12 已知系统的微分方程为 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f'(t) + 3f(t)$, 初始条件为 $y(0) = 1, y'(0) = 2$, 试求:

- (1) 系统的零输入响应 $y_0(t)$;
- (2) 输入 $f(t) = u(t)$ 时, 系统的零状态响应和完全响应;
- (3) 输入 $f(t) = e^{3t}u(t)$ 时, 系统的零状态响应和完全响应。

2.13 某 LTI 系统的输入 $f(t)$ 和冲激响应 $h(t)$ 如图 2-29 所示, 试求系统的零状态响应, 并画出波形。

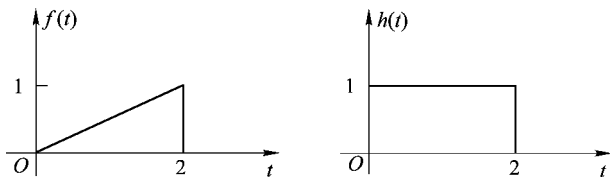


图 2-29 题 2.13 用图

2.14 如图 2-30 所示电路, 各电源在 $t = 0$ 时刻接入, 试求输出电流 $i(t)$ 的零输入响应、零状态响应和完全响应。

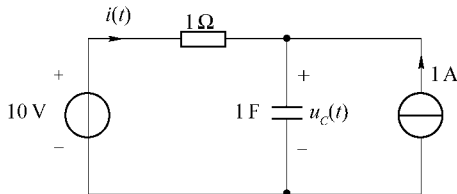


图 2-30 题 2.14 用图

2.15 试求下列系统的阶跃响应。

$$(1) H(p) = \frac{p+4}{p(p^2+3p+2)}$$

$$(2) H(p) = \frac{3p+1}{p(p+1)^2}$$

2.16 给定下列系统的输入输出算子方程、初始条件和输入信号, 试分别求其完全响应, 并指出其零输入响应、零状态响应、自由响应和强迫响应。

$$(1) (p+1)y(t) = f(t),$$

$$y(0) = 2, f(t) = (1 + e^{-3t})\delta(t)$$

$$(2) (p^2 + 2p + 1)y(t) = (p+1)f(t),$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 2, f(t) = e^{-2t}\delta(t)$$

2.17 如图 2-31 所示电路, $t < 0$ 时已处稳态, $t = 0$ 时, 开关 S 由位置 a 打至 b。试求输出电压 $u(t)$ 的零输入响应、零状态响应和完全响应。

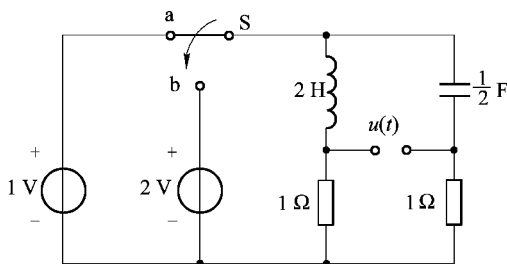


图 2-31 题 2.17 用图

2.18 某 LTI 连续系统冲激响应 $h(t) = e^{-t}\delta(t)$, 输入信号 $f(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$, 试分别求初始观察时刻 $t_0 = 0$ 、 -1 和 1 时系统的零输入响应 $y_0(t)$ 、零状态响应 $y_f(t)$ 和完全响应 $y(t)$ 。

2.19 计算卷积积分 $f_1(t) * f_2(t)$ 。

(1) $f_1(t) = f_2(t) = \delta(t)$

(2) $f_1(t) = \delta(t), f_2(t) = e^{-t}\delta(t)$

(3) $f_1(t) = e^{-t}\delta(t), f_2(t) = e^{-2t}\delta(t)$

(4) $f_1(t) = \delta(t), f_2(t) = t\delta(t)$

(5) $f_1(t) = e^{-t}\delta(t), f_2(t) = t\delta(t)$

(6) $f_1(t) = e^{-2t}\delta(t), f_2(t) = e^{-t}\delta(t)$

(7) $f_1(t) = e^{-t}\delta(t), f_2(t) = \sin t\delta(t)$

(8) $f_1(t) = \delta(t-1), f_2(t) = e^{-t}\delta(2-t)$

(9) $f_1(t) = e^{-2t}\delta(t), f_2(t) = e^{-3t}\delta(t+3)$

(10) $f_1(t) = t\delta(t), f_2(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$

2.20 根据单位冲激函数 $\delta(t)$ 的性质计算下列各式的值。

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t \delta(t - \frac{\pi}{4}) dt$

(2) $\int_{-2}^3 e^{-5t} \delta(t-1) dt$

(3) $\int_{-4}^6 e^{-2t} \delta(t+8) dt$

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} \delta(2-2t) dt$

(5) $\int_{-2}^2 (t^2 + 3t) \delta(\frac{t}{3} - 1) dt$

第 3 章 连续信号与系统的频域分析

第 2 章讲述 LTI 系统的时域分析时,是以冲激函数和阶跃函数作为基本信号,将任意激励表示为冲激分量的连续和(积分),并利用卷积方法求取系统的响应。本章将讨论连续时间系统的频域分析方法。两种方法的不同之处在于信号分解的单元函数不同。在频域分析法中,信号分解的基本单元是等幅正弦函数。通过求取对基本单元激励产生的响应,并将响应叠加,再转换到时域以求得系统的总体响应。信号分解为一系列不同幅度、不同频率的等幅正弦函数的问题,通过傅里叶级数或傅里叶变换就能解决;而系统对等幅正弦信号所产生的响应通过复数运算很容易求得。这样,频域分析法就可运用正弦稳态分析来讨论系统对任意信号所产生的响应,从而避免了求解微分方程所带来的大量复杂运算。线性系统的频域分析法是一种变换域分析法,如图 3-1 所示,它把时域中求解响应的问题(以时间为变量)通过傅里叶级数或傅里叶变换转换成频域中的问题(以频率为变量)。在频域中求解后再转换回时域,从而得到最终的结果。频域分析法只是变换法的一种,还有其他的变换域方法(比如 z 变换)。变换法的实质是通过函数变量的转换,将系统方程转换为更加便于处理的简单形式,从而简化求解响应的过程。如频域分析法,将时域中的微分方程变换成为频域中的代数方程,然后在频域中通过简单的代数运算求取响应的频域解,最后再由逆变换重新得到时域中的响应。

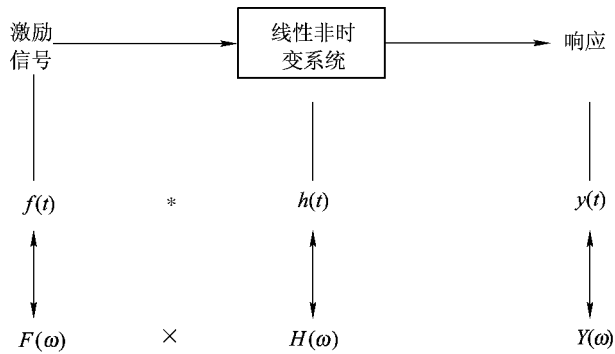


图 3-1 频域分析法

虽然频域分析法通过变换域将时域中的微分方程转换成频域中的代数方程从而简化了运算,但是为此必须增加两次积分变换。在输入端进行傅里叶正变换,把时域中的激励信号 $f(t)$ 转换为频域中 $F(\omega)$;在输出端则需要进行一次傅里叶逆变换,把频域中的响应信号 $Y(\omega)$ 再转换回到时域得到 $y(t)$ 。而这两次积分变换的求解往往是不容易的。另外,傅里叶变换的运用一般要受绝对可积条件的约束,能适用的信号函数有所限制。因此,在分析连续时间系统响应问题时,更多的是使用复频域的拉普拉斯变换分析法。但这并不影响到频域分析法在系统分析中所占有的重要位置。因为信号的频谱具有明确的物理意义,在许多只需定性分析的问题中用频谱的概念来说明更加方便。另外复频域分析法是频域分析法的推

广,在讨论复频域分析法之前先讨论频域分析法比较方便。例如,讨论信号通过某一系统时产生的失真问题就很容易由通过系统前后的频谱变化来说明。而且当系统内部结构无法确知时,系统函数 $H(S)$ 一般不能直接得到,也就无法直接运用拉普拉斯变换。而 $H(j\omega)$ 则可以通过测量直接求得,这时运用傅里叶变换法就比较方便。

本章将以正弦函数为基本信号分析工程上常用的周期和非周期信号的一些基本特性以及信号在系统中的传输问题。由于通过欧拉公式可以将正弦信号同指数信号相互转换:

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad (3-1)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (3-2)$$

故也可把虚指数函数 $e^{j\omega t}$ 作为基本信号,将任意周期信号和非周期信号分解为一系列虚指数函数的离散和连续和。分解工具是傅里叶级数(周期信号)和傅里叶变换(非周期信号)。

3.1 周期信号的频谱 —— 傅里叶级数

在讨论周期信号的傅里叶级数前,先介绍正交函数与正交函数集的概念。若两个函数 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内满足:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} g_1(t) g_2(t) dt &= 0 \\ \int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt &= k_i \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right. \quad (3-3)$$

则称这两个函数在区间 (t_1, t_2) 正交,或它们是区间 (t_1, t_2) 上的正交函数。若函数集 $\{g_i(t)\}$ 在区间 (t_1, t_2) 内且函数 $g_1(t), \dots, g_n(t)$ 满足:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt &= k_i \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j(t) dt &= 0 \quad i \neq j, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right. \quad (3-4)$$

则这个函数集就是正交函数集,当 $k_i = 1$ 时为归一化正交函数集。

满足一定条件的信号可以被分解为正交函数的线性组合,即任意信号 $f(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内可由组成信号空间的 n 个正交函数的线性组合近似表示为

$$f(t) \approx c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \dots + c_n g_n(t) + \dots \quad (3-5)$$

若正交函数集是完备的,则

$$f(t) = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \dots + c_n g_n(t) + \dots \quad (3-6)$$

完备是指对于一个在区间 (t_1, t_2) 内的正交函数集中的所有函数,不可能另外再得到一个非零的函数在同一区间内和它们正交,即不存在这样一个函数 $x(t)$,使之满足:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_i(t) dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3-7)$$

若 $x(t)$ 在这个区间能与它们正交,则 $x(t)$ 本身必属于这个正交函数集。若不包括 $x(t)$,则这个正交函数集也就不完备。

最重要的完备正交函数集包含正、余弦函数的三角函数集和复指数函数集。它们具有以下优点:

(1) 三角函数和指数函数是最常见的基本函数。

(2) 三角函数和指数函数是简谐函数,用它们表示时间信号,建立了时间与频率两个基本物理量之间的联系。

(3) 简谐信号是一种容易产生、传输和处理的信号。

(4) 三角函数和指数函数信号通过线性时不变系统后,频率不变,仅幅度和相位有变化,计算更方便。

由于三角函数和指数函数的上述优点,周期信号通常被分解为无穷多个正弦信号或者指数信号之和。用这两种基本函数表示的级数,分别称为三角形式傅里叶级数和指数形式傅里叶级数,它们是傅里叶级数中两种不同的表达形式,也简称傅氏级数,其英文缩写为FS。本节利用傅氏级数表示信号的方法,研究周期信号的频域特性,建立信号频谱的概念。

3.1.1 三角函数式傅里叶级数

周期信号是周而复始、无始无终的信号。其表示式为

$$f(t) = f(t + kT) \quad (3-8)$$

式中, $f(t)$ 的基波周期 T 是满足式(3-8)的最小的非零正值,其倒数 $f_0 = \frac{1}{T}$ 是信号的基波频率。

若周期函数 $f(t)$ 满足狄里赫利条件:

(1) 在任意周期内存在有限个第一类间断点;

(2) 在任意周期内存在有限个极值点;

(3) 在任意周期上是绝对可积的,即

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt < \infty \quad (3-9)$$

则 $f(t)$ 可以展开为三角形式的傅里叶级数,为

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \cdots + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \end{aligned} \quad (3-10)$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (3-11)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (3-12)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (3-13)$$

式中, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 为基波频率; a_n 为信号 $f(t)$ 在函数 $\cos(n\omega_0 t)$ 中的振幅(相对大小); b_n 为信号

$f(t)$ 在函数 $\sin(n\omega_0 t)$ 中的振幅(相对大小);一般取 $t_0 = -\frac{T}{2}$ 。

利用三角函数的边角关系,还可以将一般三角形式化为标准的三角形式,即

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega_0 t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega_0 t) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n [\cos \varphi_n \cos(n\omega_0 t) - \sin \varphi_n \sin(n\omega_0 t)] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \end{aligned} \tag{3-14}$$

式中, c_n 是第 n 次谐波分量的振幅。

两种三角形式系数的关系为

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= c_0, \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \\ \sin \varphi_n &= \frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \cos \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \\ a_n &= c_n \cos \varphi_n, \quad b_n = -c_n \sin \varphi_n \end{aligned} \right\} \tag{3-15}$$

例 3.1.1 已知周期信号 $f(t)$ 如下, 试画出其频谱图。

$$f(t) = 1 + \sqrt{2}\cos(\omega_0 t) - \cos(2\omega_0 t + \frac{5\pi}{4}) + \sqrt{2}\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\sin(3\omega_0 t)$$

解 将 $f(t)$ 整理为标准形式:

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 + 2\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}) + \cos(2\omega_0 t + \frac{5\pi}{4} - \pi) + \frac{1}{2}\cos(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \\ &= 1 + 2\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}) + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}\cos(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

由

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

可知其基波频率 $\omega = \omega_0$ (rad/s) 和 $\omega = 2\omega_0, 3\omega_0$ 分别为二、三次谐波频率。因此有

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \quad \varphi_0 = 0 \\ c_1 &= 2, \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{4} \\ c_2 &= 1, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4} \\ c_3 &= \frac{1}{2}, \quad \varphi_3 = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

此外有

$$c_n = 0, \quad \varphi_n = 0$$

其振幅谱与相位谱如图 3-2 所示。

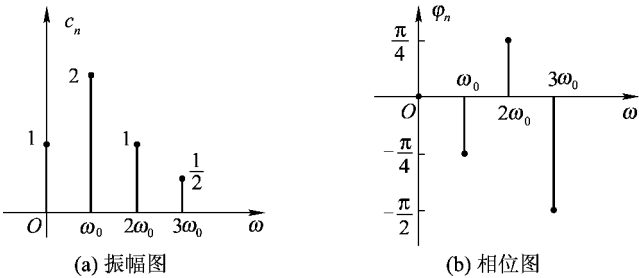


图 3-2 例 3.1.1 的频谱图

3.1.2 指数函数式傅里叶级数

利用欧拉公式：

$$\left. \begin{aligned} \cos(n\omega_0) &= \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0}) \\ \sin(n\omega_0) &= \frac{1}{j2}(e^{jn\omega_0} - e^{-jn\omega_0}) \end{aligned} \right\} \quad (3-16)$$

$$e^{\pm jn\omega_0} = \cos(n\omega_0) \pm j\sin(n\omega_0)$$

可以将三角形式的傅里叶级数表示为复指数形式的傅里叶级数,即

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{2} [e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)} - e^{-j(n\omega_0 t + \varphi_n)}] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{2} e^{jn\omega_0 t} e^{j\varphi_n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{2} e^{-jn\omega_0 t} e^{-j\varphi_n} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{2} e^{jn\omega_0 t} e^{j\varphi_n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{c_n}{2} e^{jn\omega_0 t} e^{j\varphi_n} \end{aligned} \quad (3-17)$$

令 $c_0 = F(0)$ 代入上式,并将两个和式合并得

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{2} e^{jn\omega_0 t} e^{j\varphi_n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3-18)$$

则 $f(t)$ 指数形式为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (3-19)$$

其中

$$F(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} c_n (\cos \varphi_n + j \sin \varphi_n) = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$$

将式(3-12)和式(3-13)代入上式,得

$$\begin{aligned} F(n\omega_0) &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) [\cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (3-20)$$

$F(n\omega_0)$ 是复常数,还可以表示成模和幅角的形式为

$$F(n\omega_0) = |F(n\omega_0)| e^{j\theta_n} = R(n\omega_0) + jX(n\omega_0) \quad (3-21)$$

式中, $|F(n\omega_0)|$ 为 $F(n\omega_0)$ 第 n 次谐波分量的幅度; θ_n 为 $F(n\omega_0)$ 第 n 次谐波分量的相角; $R(n\omega_0)$ 为 $F(n\omega_0)$ 的实数部分; $X(n\omega_0)$ 为 $F(n\omega_0)$ 的虚数部分。

三角函数标准形式中 c_n 是第 n 次谐波分量的振幅,但在指数形式中, $F(n\omega_0)$ 要与相对应的 $-n$ 项 $F(-n\omega_0)$ 合并,构成第 n 次谐波分量的振幅和相位。

指数形式傅里叶级数与三角形式傅里叶级数系数之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} F(0) &= a_0 = c_0 \\ F(n\omega_0) &= |F(n\omega_0)| e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2}c_n e^{j\varphi_n} \\ F(-n\omega_0) &= \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{2}c_n e^{-j\varphi_n} \\ |F(n\omega_0)| &= \frac{1}{2}c_n = |F(-n\omega_0)| \\ \varphi_n &= -\arctan \frac{b_n}{a_n} \\ F(n\omega_0) + F(-n\omega_0) &= 2R(n\omega_0) = a_n \\ j[F(n\omega_0) - F(-n\omega_0)] &= j2X(n\omega_0) = b_n \end{aligned} \right\} \quad (3-22)$$

按照上述关系,例 3.1.1 的指数形式频谱图如图 3-3 所示。

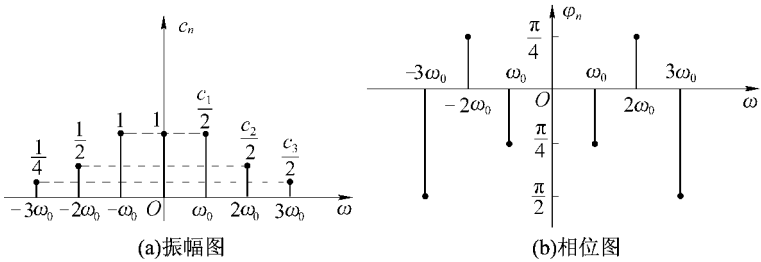


图 3-3 例 3.1.1 频谱图

3.1.3 傅里叶级数的存在性

傅里叶认为所有的周期信号都可以表示成正弦信号或者复指数信号的形式,但是这些周期信号必须满足一定的条件。这个条件是:在一个周期内,信号的变差是有界的,即满足狄里赫利条件。

变差是指在某一确定的区间上信号的变化总量。以如图 3-4 所示图形为例,在区间 (t_1, t_n) 上 $f(t)$ 的变差 V 定义为

$$V = \sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j-1}) - f(t_j)| \quad (3-23)$$

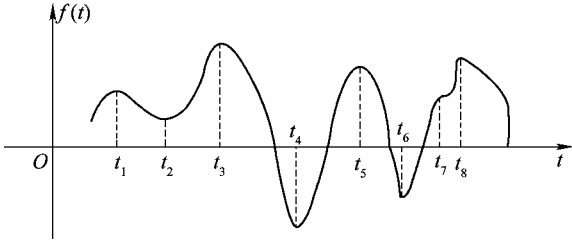


图 3-4 变差的定义

其中, $f(t_j)$ 为极大值或极小值。若 $V < \infty$, 则称 $f(t)$ 在区间 (t_1, t_n) 变差有界。

因为 $f(t)$ 的变差有界, 所以 $f(t)$ 本身一定有界并且在一个周期内只有有限个极大点和极小点。因此 $f(t)$ 在任意周期内必然绝对可积, 即积分 $\int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ 一定存在。 $f(t)$ 的

傅里叶级数 $F(n\omega_0)$ 一定有确定的值,把 $F(n\omega_0)$ 代入式(3-18),得

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{jn\omega_0 t} \\ &= \int_{t_1}^{t_1+T} f(\tau) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{jn\omega_0 (t-\tau)} d\tau \\ &= \int_{t_1}^{t_1+T} f(\tau) \delta_T(t-\tau) d\tau \\ &= f(t)\end{aligned}\quad (3-24)$$

式(3-24)说明,当周期信号满足狄里赫利条件时,傅里叶级数存在并且收敛于 $f(t)$ 。

上述条件可以放宽。假设在一个周期内,信号 $f(t)$ 含有一个或多个冲激,这时它已不满足变差有界。如果 $f(t)$ 能分解为 $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$,其中 $f_1(t)$ 完全由冲激构成,而 $f_2(t)$ 的变差有界,那么 $F(n\omega_0)$ 仍然存在,即信号 $f(t)$ 含有冲激时,如果消除冲激后余下部分能满足狄里赫利条件,则傅里叶级数展开式除了产生冲激的时刻仍然收敛于 $f(t)$ 。

3.1.4 傅里叶级数的性质

讨论傅里叶变换的性质,旨在通过这些性质揭示信号时域特性与频域特性之间的关系,同时掌握和运用这些性质可以简化傅里叶变换对的求取。

1. 线性特性

若周期信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 对应的傅里叶级数的系数分别为 $F_1(n\omega_0)$ 和 $F_2(n\omega_0)$,则有

$$A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t) \leftrightarrow A_1 F_1(n\omega_0) + A_2 F_2(n\omega_0) \quad (3-25)$$

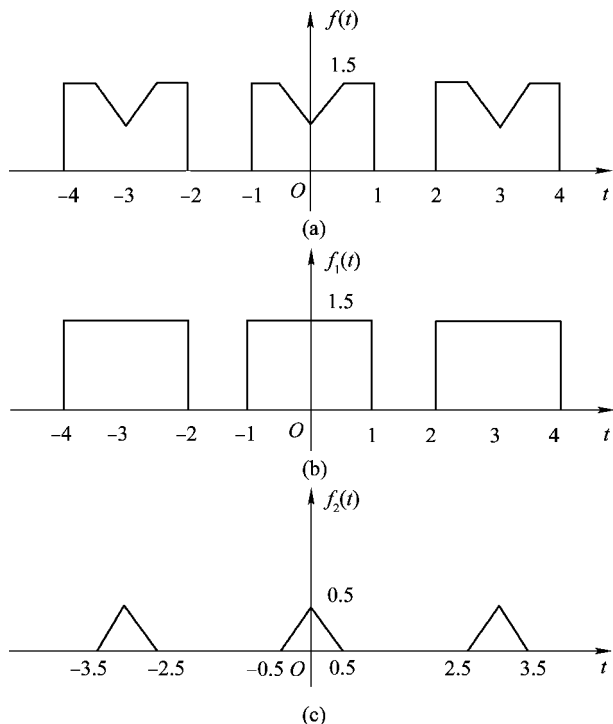


图 3-5 时域频域求解示意图

如图 3-5(a) 所示求解 $f(t)$ 的 $F(n\omega_0)$, 就可以分别求出如图 3-5(b)、(c) 所示中 $f_1(t)$ 和

$f_2(t)$ 的 $F_1(n\omega_0)$ 和 $F_2(n\omega_0)$ 后,再利用关系式 $F(n\omega_0) = F_1(n\omega_0) - F_2(n\omega_0)$ 来计算。

2. 对称特性

实周期信号 $f(t)$ 的傅里叶级数的系数是对称的,即 $F(-n\omega_0) = F^*(n\omega_0)$ 。如果 $f(t)$ 的波形还具有某种对称性,那么它的傅里叶系数还具有另外一些性质。

(1) 偶对称。若 $f(t)$ 是关于纵轴对称的偶函数,即 $f(t) = f(-t)$,则其傅里叶系数有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} F(-n\omega_0) &= F(n\omega_0) = \frac{1}{2}a_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= 0 \\ \theta_n = \varphi_n &= 0 \text{ 或 } \pm \pi \end{aligned} \right\} \quad (3-26)$$

证明:任意周期函数都可以看做是偶函数和奇函数之和,设 $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$,其中, $f_e(t)$ 为偶函数, $f_o(t)$ 为奇函数。由于 $\cos(n\omega_0 t)$ 是偶函数, $\sin(n\omega_0 t)$ 是奇函数,故而根据式(3-10)可得

$$\begin{aligned} f_e(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) \\ f_o(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \end{aligned}$$

当 $f(t)$ 是偶函数时,必有 $f_o(t) = 0$ 。故有

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= f_e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) \\ b_n &= 0 \\ \theta_n = \varphi_n &= -\arctan \frac{b_n}{a_n} = 0 \text{ 或 } \pm \pi \\ F(n\omega_0) &= \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{j}b_n) = \frac{1}{2}a_n \\ F(-n\omega_0) &= \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{j}b_n) = \frac{1}{2}a_n = F(n\omega_0) \end{aligned} \right\} \quad (3-27)$$

再由式(3-12)得

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \cos(n\omega_0 t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \right]$$

由于 $f(t)$ 与 $\cos(n\omega_0 t)$ 皆为偶函数,故而 $f(t) \cos(n\omega_0 t)$ 亦为偶函数,因此上式括号中的两项积分完全相等,即

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ F(n\omega_0) &= \frac{1}{2}a_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

例 3.1.2 计算如图 3-5 所示的 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅里叶系数。

解 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 皆为偶函数,故可用式(3-26) 计算它们的傅里叶系数。

$$\begin{aligned} F_1(n\omega_0) &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f_1(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{3}{2} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}t\right) dt = \frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{\frac{2n\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2(n\omega_0) &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f_2(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^{0.5} \left(\frac{1}{2} - t\right) \cos\left(\frac{2n\pi}{3}t\right) dt \\
 &= \frac{1}{12} \left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{\frac{n\pi}{6}} \right]^2
 \end{aligned}$$

(2) 奇对称。若周期信号 $f(t)$ 是关于原点对称的奇函数, 即 $f(t) = -f(-t)$, 其傅里叶系数满足如下关系:

$$\left. \begin{aligned}
 a_n &= 0 \\
 b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \\
 F(-n\omega_0) &= -F(n\omega_0) = j \frac{b_n}{2} \\
 \theta_n &= \varphi_n = \pm \frac{\pi}{2}
 \end{aligned} \right\} \quad (3-28)$$

上式的证明与偶对称的情况相类似, 这里不再赘述。

式(3-26) 和(3-28) 表明, 偶对称的周期信号不会含有正弦分量, 只含有直流分量和余弦分量; 而奇对称的信号只含有正弦分量, 不含直流分量和余弦分量。实偶函数的傅里叶系数是偶函数, 实奇函数的傅里叶系数是虚奇函数。

3. 时移特性

若连续信号 $f(t)$ 的傅里叶系数为 $F(n\omega_0)$, 则

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(n\omega_0) e^{-jn\omega_0 t_0} \quad (3-29)$$

式中, t_0 是某一固定延时。

证明: 设 $f(t - t_0)$ 的傅里叶系数是 $G(n\omega_0)$, 则

$$G(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t - t_0) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

令 $\tau = t - t_0$ 并代入上式, 得

$$\begin{aligned}
 G(n\omega_0) &= \frac{1}{T} \int_{t_1-t_0}^{t_1-t_0+T} f(\tau) e^{-jn\omega_0(\tau+t_0)} d\tau \\
 &= \left[\frac{1}{T} \int_{t_1-t_0}^{t_1-t_0+T} f(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{-jn\omega_0 t_0}
 \end{aligned}$$

显然, 此式右端括号中的部分就是 $f(t)$ 的傅里叶级数 $F(n\omega_0)$, 故式(3-29) 成立。

傅里叶级数的时移特性说明, 傅里叶级数的幅度只与信号的形状有关, 而与信号在时间轴上的位置无关, 即信号的超前或滞后只会影响傅里叶系数的相角, 而不会改变其幅度。

例 3.1.3 试求如图 3-6 所示周期信号 $g(t)$ 的傅里叶级数。

解 可以直接依据式(3-20) 来计算, 但是利用例 3.1.2 的结果及时移特性就更为简便。比较图 3-6 和图 3-5(b) 可知, 前者是后者滞后 $t_0 = 1$ 后的波形, 即 $g(t) = f(t - 1)$, 则 $g(t)$ 的傅里叶级数为

$$G(n\omega_0) = \frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{\frac{2n\pi}{3}} e^{-j\frac{2n\pi}{3}}$$

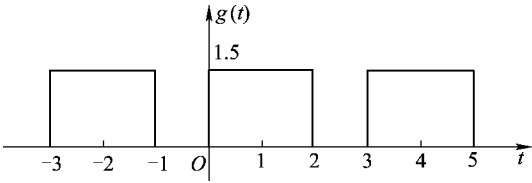


图 3-6 方波周期信号

4. 尺度变换特性

信号 $f(at)$ 与 $f(t)$ 之间(a 是实常数) 幅度相等且波形相似, 但时间变量 t 的尺度却不同。若 $a < 1$, 则 $f(at)$ 的波形在时间轴上会被拉伸; 反之, 若 $a > 1$, 则波形在时间轴上会被压缩; 若 $a < 0$, 则波形不但有拉伸或压缩, 还有在时间轴上的翻转。设 $f(t) \leftrightarrow F(n\omega_0)$, $f(at) \leftrightarrow G(n\omega'_0)$, 现在来讨论当信号的时间尺度变换时, 它的傅里叶系数 $F(n\omega_0)$ 与 $G(n\omega'_0)$ 之间的关系。

若 $f(t)$ 的周期等于 T , 则 $f(at)$ 的周期为 $\frac{T}{a}$, 故有 $\omega'_0 = a\omega_0$ 。根据式(3-20) 可计算 $f(at)$ 的傅里叶系数为

$$\begin{aligned} G(n\omega'_0) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2a}}^{\frac{T}{2a}} f(at) e^{-jn\omega'_0 t} dt \\ &= \frac{a}{T} \int_{-\frac{T}{2a}}^{\frac{T}{2a}} f(at) e^{-jn\omega'_0 t} dt \end{aligned}$$

令 $\tau = at$, 则 $dt = \frac{d\tau}{a}$, 代入上式变换积分限得

$$G(na\omega_0) = \frac{a}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} \frac{d\tau}{a} = F(n\omega_0) \quad (3-30)$$

由此可见, 信号进行时间尺度变换后, 其各次谐波的傅里叶系数保持不变, 但基波频率要从 ω_0 变为 $\omega'_0 = a\omega_0$ 。

例 3.1.4 计算如图 3-7 所示波形的傅里叶系数。

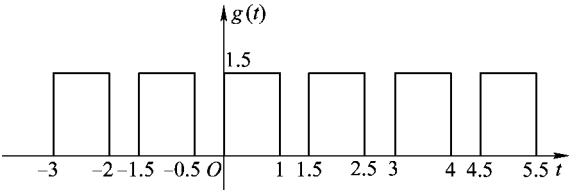


图 3-7 例 3.1.4 用图

解 比较如图 3-6 和图 3-7 所示的波形, 可知后者是经前者在时间轴上压缩而得, 其时

间尺度变换系数 $a = 2$ 。根据尺度变换特性, 图 3-7 所示波形的傅里叶系数为 $\frac{\sin(\frac{2n\pi}{3})}{\frac{2n\pi}{3}} e^{-j\frac{2n\pi}{3}}$,

但基波频率从 $\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$ 变为 $\omega'_0 = 2\omega_0 = \frac{4\pi}{3}$ 。

5. 时域微分特性

如果 $f(t)$ 是以 T 为周期的函数,那么函数 $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ 也必然是周期为 T 的函数,它们的傅里叶系数之间存在如下关系:

设

$$f(t) \leftrightarrow F(n\omega_0)$$

则

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow jn\omega_0 F(n\omega_0) \quad (3-31)$$

证明:根据式(3-20)得 $f'(t)$ 的傅里叶系数为

$$\begin{aligned} G(n\omega_0) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{df(t)}{dt} e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} [f(t)e^{-jn\omega_0 t}]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{jn\omega_0}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

由于 $f(t)$ 和 $e^{-jn\omega_0 t}$ 分别是周期为 T 和 $\frac{T}{n}$ 的函数,故 $f(t)e^{-jn\omega_0 t}$ 必然是周期为 T 的函数,这使得上式右端第一项等于零。从而可得

$$G(n\omega_0) = \frac{jn\omega_0}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = jn\omega_0 F(n\omega_0)$$

上述结论可推广到高阶导数和函数的积分情况,即

$$f^{(k)}(t) = \frac{d^k f(t)}{dt^k} \leftrightarrow (jn\omega_0)^k F(n\omega_0) \quad (3-32)$$

$$f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(n\omega_0)}{jn\omega_0} \quad (n \neq 0) \quad (3-33)$$

本节推导出了三角函数与指数函数两种形式的傅里叶级数,傅里叶系数的求解公式以及两种形式傅里叶级数之间的关系。进一步讨论了傅里叶级数的基本性质,这不但有助于加深对傅里叶级数的理解,简化傅里叶级数的计算,更重要的是进一步揭示了信号在时域和频域之间的对应关系,深化了对信号本质的理解。

3.2 非周期信号的频谱 —— 傅里叶变换

除周期信号外,各种工程技术领域也广泛地存在非周期信号。例如,汽车点火装置产生的电火花是一种脉冲信号,振荡器的频率漂移几乎随时间线性增长等。这些非周期信号能否分解为三角函数或复指数函数呢?应该如何进行分解呢?这些就是本节所要讨论的话题。

3.2.1 从傅里叶级数到傅里叶变换

若将非周期信号看做是周期信号 $T \rightarrow \infty$ 的极限情况,则非周期信号就可以表示为

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t) = f(t) \quad (3-34)$$

以周期矩形脉冲为例,当 $T \rightarrow \infty$ 时,周期信号就变成单脉冲信号的非周期信号。随着 T 的增大,离散谱线间隔 ω_0 就变窄;当 $T \rightarrow \infty, \omega_0 \rightarrow 0, |F(n\omega_0)| \rightarrow 0$ 时,离散谱就变成了连续

谱。虽然 $|F(n\omega_0)| \rightarrow 0$, 但其频谱分布规律依然存在, 它们之间的相对值仍有差别。为了表明这种振幅、相位随频率变化的相对关系, 引入频谱密度函数。

已知周期函数的傅里叶级数为

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (3-35)$$

其中

$$F(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3-36)$$

对式(3-36) 两边同乘以 T , 可得

$$F(n\omega_0) T = \frac{2\pi F(n\omega_0)}{\omega_0} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3-37)$$

因为对于任意一个非周期信号 $f(t)$, 都可以看做是由相应的周期信号 $f_T(t)$ 转化而来, 其周期 $T \rightarrow \infty$, 频率 $\omega_0 \rightarrow 0$, 谱线间距 $\Delta(n\omega_0) \rightarrow d\omega$, 而离散频率 $n\omega_0$ 变成连续频率 ω 。在这种极限情况下, 虽然 $F(n\omega_0) \rightarrow 0$, 但是 $2\pi \frac{F(n\omega_0)}{\omega_0}$ 的极限可以趋近于一个有限值, 成为一个连续函数。通常记作 $F(\omega)$ 或 $F(j\omega)$, 即

$$F(\omega) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} 2\pi \frac{F(n\omega_0)}{\omega_0} \quad (3-38)$$

式中, $\frac{F(n\omega_0)}{\omega_0}$ 为单位频带的频谱值(即频谱密度)。

因此 $F(\omega)$ 称为原函数 $f(t)$ 的频谱密度函数, 简称频谱函数。假如以 $\frac{F(n\omega_0)}{\omega_0}$ 的幅值为高, 以频率 ω_0 为宽做一个小矩形, 则该矩形的面积等于 $\omega = n\omega_0$ 频率处频谱值 $F(n\omega_0)$ 。因此, 式(3-37) 在非周期信号的情况下将变为

$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3-39)$$

即

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3-40)$$

同样, 对于傅里叶级数:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (3-41)$$

因为谱线间距 $\Delta(n\omega_0) = \omega_0$, 所以上式可转化为

$$f(t) = \sum_{n\omega_0=-\infty}^{+\infty} \frac{F(n\omega_0)}{\omega_0} e^{jn\omega_0 t} \Delta(n\omega_0) \quad (3-42)$$

将上式各量做如下变换:

$$\begin{aligned} n\omega_0 &\rightarrow \omega \\ \Delta(n\omega_0) &\rightarrow d\omega \\ \frac{F(n\omega_0)}{\omega_0} &\rightarrow \frac{F(\omega)}{2\pi} \\ \sum_{n\omega_0=-\infty}^{+\infty} &\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned}$$

则可得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-43)$$

式(3-40)和式(3-43)称为傅里叶变换,习惯上采用如下形式:

傅里叶正变换:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-44)$$

傅里叶逆变换:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-45)$$

式中, $F(\omega)$ 为 $f(t)$ 的频谱函数,它是一个复函数,可以写为

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3-46)$$

式中, $|F(\omega)|$ 为 $F(\omega)$ 的模,代表信号中各频率分量的相对大小; $\varphi(\omega)$ 为 $F(\omega)$ 的相位函数,表示信号中各频率分量之间的相位。 $|F(\omega)| \sim \omega$ 和 $\varphi(\omega) \sim \omega$ 曲线就叫做非周期信号的幅度频谱和相位频谱。

3.2.2 傅里叶变换的存在性

前面根据周期信号的傅里叶级数导出了傅里叶变换。那么傅里叶变换也应满足一定条件才能存在。傅里叶变换存在的必要和充分条件的证明需要较多的数学基础理论,在此仅对其充分条件加以讨论。

若信号 $f(t)$ 满足绝对可积条件,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (3-47)$$

则其傅里叶变换 $F(\omega)$ 存在,并满足逆变换式。所有能量信号都能满足上述绝对可积条件。这一条件是傅里叶变换存在的充分条件而不是必要条件。一些不满足绝对可积条件的函数也可有傅里叶变换,如抽样函数 $\text{Sa}(t)$ 、阶跃函数 $u(t)$ 、符号函数、周期函数等。

下面说明为何式(3-47)成立时, $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 一定存在。因为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

要使 $F(\omega)$ 存在,则必须满足:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt < \infty \quad (3-48)$$

式(3-48)中的被积函数 $f(t) e^{-j\omega t}$ 是变量 t 的函数,它可正可负。但若取绝对值再进行积分,则必有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |e^{-j\omega t}| dt$$

又有

$$|e^{-j\omega t}| = 1$$

因此有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \quad (3-49)$$

由式(3-49)可知,若 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$,则 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ 必然存在。

3.2.3 常用信号的傅里叶变换

对于时域和频域都满足绝对可积条件的函数,只要根据傅里叶变换与逆变换的定义,通过积分可由时间函数求其傅里叶变换或反过来由傅里叶变换通过积分求得其对应的时间函数。对于那些时域不满足绝对可积条件的函数,则可以从极限的观点在频域中引入冲激函数,仍然可以得到相应的傅里叶变换。同样,对于那些频域不满足绝对可积条件的函数,如果从极限的观点在时域中引入冲激函数也可以求得对应的时间函数。下面将讨论一些常用信号的傅里叶变换。

1. 实指数信号

(1) $f_1(t) = e^{-at}\epsilon(t), (a > 0)$ 。

由傅里叶变换定义,可得 $f_1(t)$ 的频谱密度函数 $F_1(\omega)$ 为

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\epsilon(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2} \quad (3-50)$$

则 $F_1(\omega)$ 的实部、虚部、模及相角分别为

$$\left. \begin{aligned} R_1(\omega) &= \frac{a}{a^2+\omega^2} \\ X_1(\omega) &= -\frac{\omega}{a^2+\omega^2} \\ |F_1(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \\ \varphi_1(\omega) &= -\arctan \frac{\omega}{a} \end{aligned} \right\}$$

它们的图形如图 3-8 所示。由此可见, $R_1(\omega)$ 和 $|F_1(\omega)|$ 是偶函数, $X_1(\omega)$ 和 $\varphi_1(\omega)$ 是奇函数。注意当 $a < 0$ 时, $e^{-at}\epsilon(t)$ 是增长的指数函数,傅里叶变换不存在。

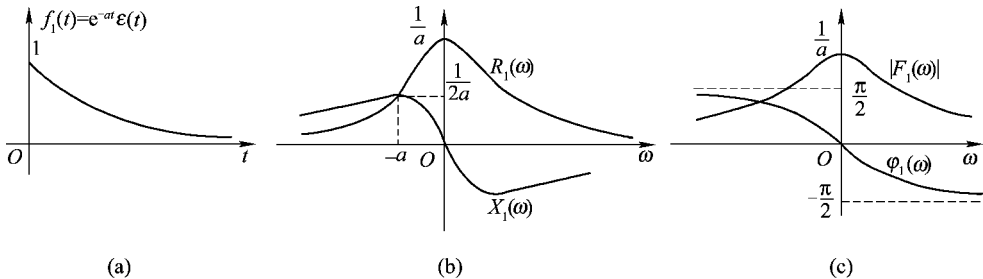


图 3-8 因果指数信号的 $f_1(t)$ 和 $F_1(\omega)$ 的波形

(2) $f_2(t) = e^{at}\epsilon(-t), (a > 0)$ 。

$f_2(t)$ 是 $f_1(t)$ 的反置函数,由式(3-40)可得

$$F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at}\epsilon(-t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^0 e^{(a-j\omega)t} dt = \frac{1}{a-j\omega} = \frac{a+j\omega}{a^2+\omega^2} \quad (3-51)$$

则 $F_2(\omega)$ 的实部、虚部、模及相角分别为

$$\left. \begin{aligned} R_2(\omega) &= \frac{a}{a^2 + \omega^2} \\ X_2(\omega) &= \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \\ |F_2(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \\ \varphi_2(\omega) &= \arctan \frac{\omega}{a} \end{aligned} \right\}$$

相应的图形如图 3-9 所示, 由式(3-50)、(3-51)可知 $F_2(\omega) = F_1(-\omega)$ 。

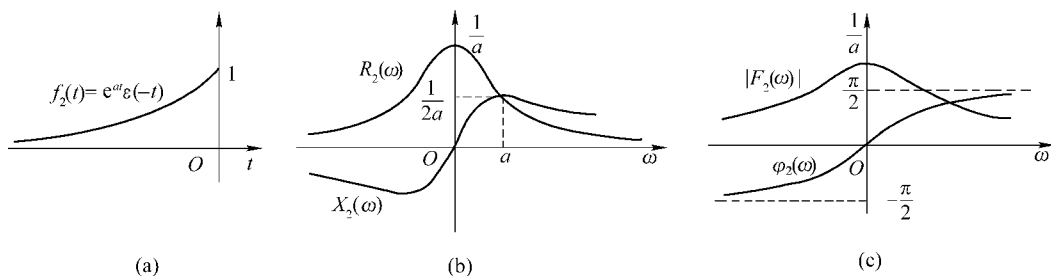


图 3-9 反因果指数信号 $f_2(t)$ 及 $F(\omega)$ 的波形

$$(3) f_3(t) = e^{-a|t|}, (a > 0)。$$

显然 $f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$, 若将 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 叫做单边指数函数, 则 $f_3(t)$ 可称为双边指数函数。则

$$F_3(\omega) = \mathcal{F}[f_3(t)] = F_1(\omega) + F_2(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad (3-52)$$

$$\left. \begin{aligned} R_3(\omega) &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \\ X_3(\omega) &= 0 \\ |F_3(\omega)| &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \\ \varphi_3(\omega) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$f_3(t)$ 和 $F_3(\omega)$ 的波形如图 3-10 所示。

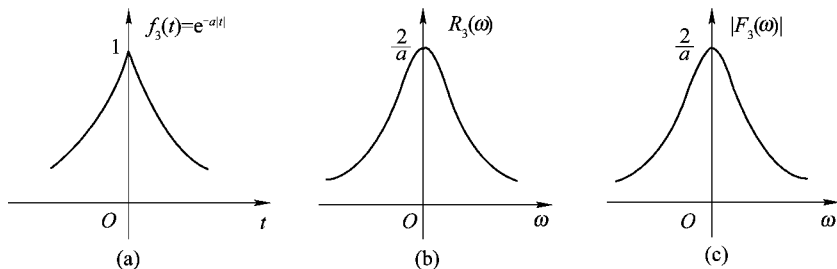


图 3-10 双边指数信号 $f_3(t)$ 和 $F_3(\omega)$ 的波形

例 3.2.1 试计算符号函数 $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$ 的频谱密度函数。

解 符号函数 $\text{sgn}(t)$ 可以用如下的极限形式表示:

$$\operatorname{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)]$$

因此有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] &= \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{F}[e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \right) = \frac{2}{j\omega} \end{aligned} \quad (3-53)$$

由于 $\operatorname{sgn}(t)$ 是实奇函数, 故而其频谱密度是虚奇函数, 如图 3-11 所示。

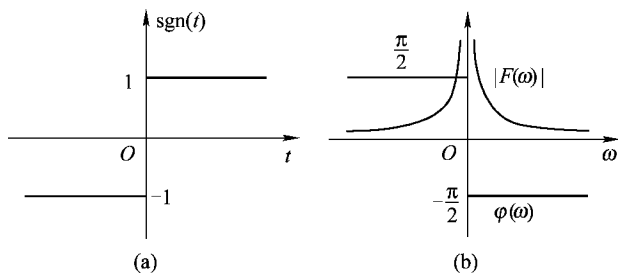


图 3-11 $\operatorname{sgn}(t)$ 及其频谱图

2. 门信号 (矩形脉冲信号)

已知门信号的表达式为

$$g_{\tau}(t) = A[u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})] \quad (3-54)$$

式中, A 为脉冲幅度; τ 为脉冲宽度。

因为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\tau}(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

则

$$F(\omega) = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = A\tau \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \right]$$

又由

$$\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} = \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

所以有

$$F(\omega) = A\tau \cdot \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (3-55)$$

这样, 门信号的幅度谱和相位谱分别为

$$|F(\omega)| = A\tau \cdot \left| \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & \frac{4n\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} \\ \pi & \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{4(n+1)\pi}{\tau} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

因为此处的 $F(\omega)$ 是实函数, 所以通常用一条 $F(\omega)$ 曲线同时表示幅度谱 $|F(\omega)|$ 和相位谱 $\varphi(\omega)$, 如图 3-12 所示。

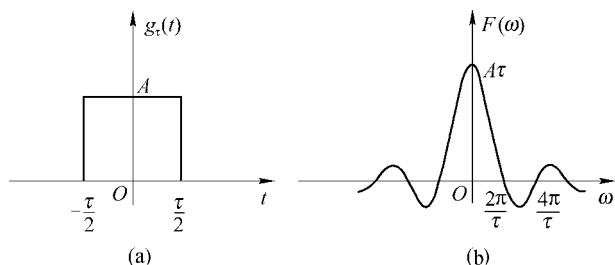


图 3-12 门信号的波形及频谱

由此可见, 在时域门信号集中于有限的范围内, 但它的频谱却以 $\text{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$ 的规律分布在无限宽的频率范围上, 而它主要的信号能量处于 $f = 0 \sim \frac{1}{\tau}$ 范围。因此, 通常认为这种信号占有频率范围(频带) B 近似为 $\frac{1}{\tau}$, 即 $B \approx \frac{1}{\tau}$ 。

3. 冲激信号

单位冲激信号 $\delta(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-56)$$

由冲激信号的抽样性质可知式(3-56)右边的积分是 1, 则

$$F(\omega) = \mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \quad (3-57)$$

上述结果也可由矩形脉冲取极限得到, 当脉宽 τ 逐渐变窄时, 其频谱必然展宽。可以想象, 若 $\tau \rightarrow 0$, 而 $A\tau = 1$, 这时矩形脉冲就变成了 $\delta(t)$, 其相应频谱 $F(\omega)$ 必等于常数 1。

由此可见, 单位冲激信号的频谱等于常数, 即在整个频率范围内频谱是均匀分布的。显然, 在时域中变化异常剧烈的冲激信号包含幅度相等的所有频率分量。因此, 这种频谱通常称为“均匀谱”或“白色谱”, 如图 3-13 所示。

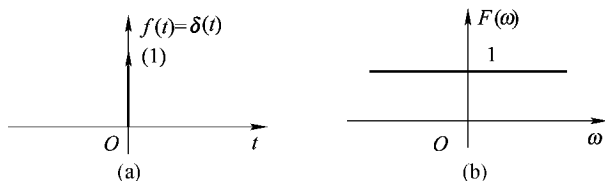


图 3-13 单位冲激信号的频谱

反之

$$\mathcal{F}^{-1}(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t) \quad (3-58)$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (3-59)$$

4. 直流信号

如图 3-14 所示, 设 $f(t) = 1$ 的傅氏变换为 $F(\omega)$, 则由其逆变换定义式(3-43) 得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 1$$

将此式与式(3-58) 比较, 并考虑到 $\delta(t)$ 是偶函数, 则可得

$$\mathcal{F}(1) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \quad (3-60)$$

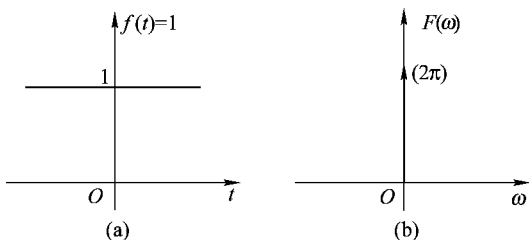


图 3-14 直流信号及其频谱密度

5. 虚指数信号

$e^{j\omega_0 t}$ 是具有虚指数 $j\omega_0$ 的无时限信号, 由傅里叶变换定义式(3-44) 和式(3-60), 可知

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{j\omega_0 t}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (3-61)$$

这说明, $e^{j\omega_0 t}$ 的频谱密度是位于 $\omega = \omega_0$ 处的强度为 2π 的冲激函数(见图 3-15), 即它只含有 ω_0 的频率分量。

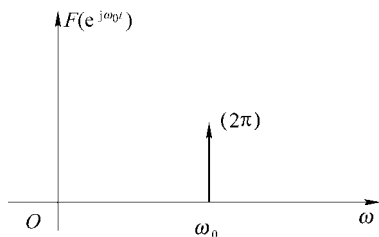


图 3-15 虚指数信号 $e^{j\omega_0 t}$ 频谱示意图

例 3.2.2 试求 $\sin(\omega_0 t)$ 和 $\cos(\omega_0 t)$ 的频谱密度函数。

解 根据欧拉公式:

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}), \quad \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

因此, 由式(3-61) 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\sin(\omega_0 t)] &= j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \\ \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] &= \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned} \quad (3-62)$$

这表明, $\sin(\omega_0 t)$ 和 $\cos(\omega_0 t)$ 的频谱密度都是强度为 π 分别位于 $\omega = \omega_0$ 处的两个冲激, 图形

如图 3-16 所示,所以它们都只含有频率为 ω_0 的分量,而且两者的频谱正好相差 $\frac{\pi}{2}$ 的相位。

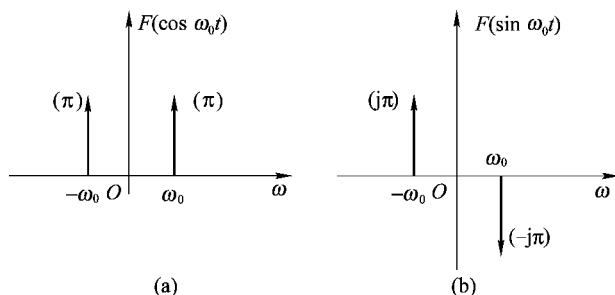


图 3-16 例 3.2.2 用图

6. 阶跃信号

从波形中容易看出阶跃信号 $u(t)$ 不满足绝对可积条件,但它仍然存在傅里叶变换。因为

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \quad (3-63)$$

对等式两边进行傅里叶变换,得

$$\mathcal{F}[u(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)\right]$$

由式(3-53)、(3-60)可得 $u(t)$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (3-64)$$

单位阶跃信号 $u(t)$ 的频谱如图 3-17 所示。

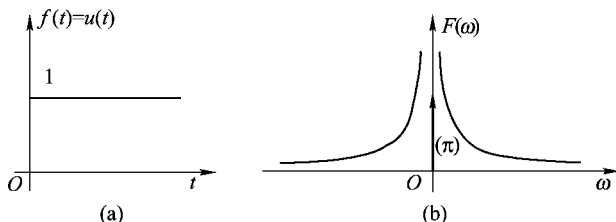


图 3-17 单位阶跃信号的波形和频谱

由此可见,单位阶跃信号 $u(t)$ 的频谱在 $\omega = 0$ 点存在一个冲激信号,因而 $u(t)$ 含有直流分量,这是在预料之中的。此外,由于 $u(t)$ 不是纯直流信号,它在 $t = 0$ 点有跳变,故在频谱中还出现其他频率分量。

3.3 傅里叶变换的性质

在信号分析的理论研究和实际设计工作中,经常需要了解当信号在时域进行某种运算后在频域发生什么变化,或者反过来从频域的运算推测时域的变动。这时可以借助傅里叶变换的基本性质给出结果。这种方法计算过程比较简便,物理概念清楚。因此,熟悉傅里叶变换的一

些基本性质成为信号分析研究工作的重要内容之一。下面对这些基本性质进行讨论。

3.3.1 对称特性

设函数 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$, 则

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega) \tag{3-65}$$

若函数 $f(t)$ 是 t 的偶函数, 则式(3-65) 变为

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(\omega) \tag{3-66}$$

对称特性为某些信号的时间函数和频谱函数互求提供了方便。例如, 矩形脉冲的频谱为抽样函数, 则抽样脉冲的频谱就为矩形函数。同样, 直流信号的频谱为冲激函数, 而冲激函数的频谱为常数, 如图 3-18 和图 3-19 所示。

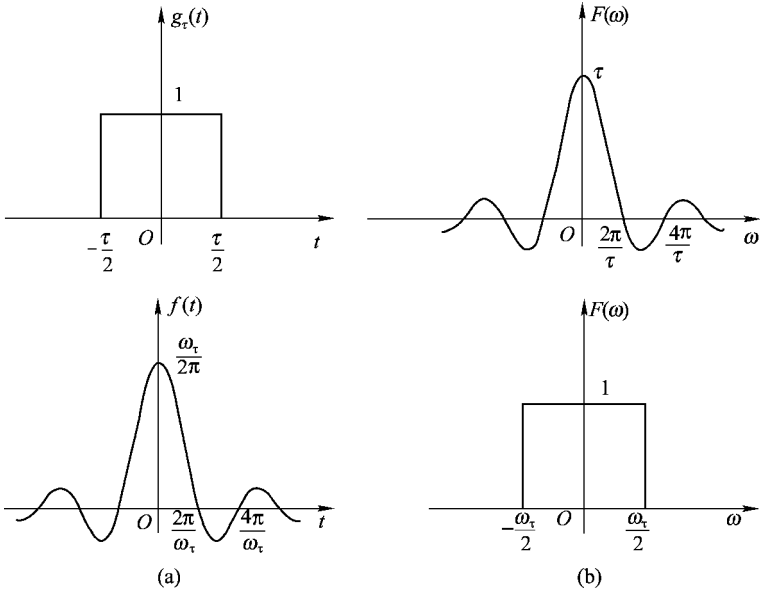


图 3-18 直流函数与频谱的对称性

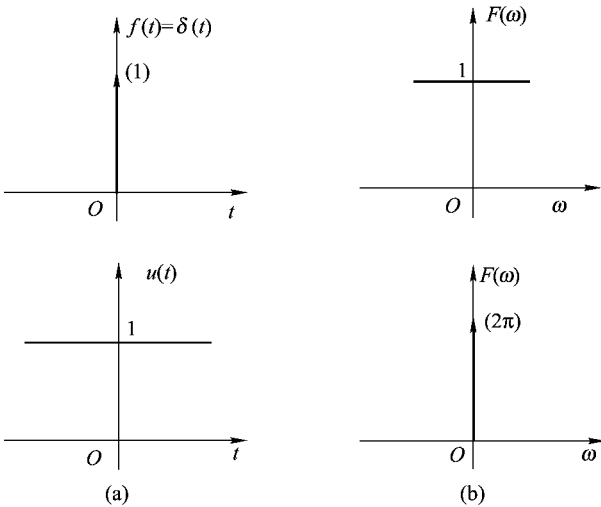


图 3-19 冲激函数与频谱的对称性

3.3.2 线性(叠加性) 特性

某一区域内函数的值作线性变换时与之对应的另一域中象函数的值也作等比例的线性变换。若 $\mathcal{F}[f_i(t)] = F_i(\omega) (i = 1, 2, \dots, n)$, 则

$$\mathcal{F}[a_i f_i(t)] = \sum_{i=1}^n a_i F_i(\omega) \quad (3-67)$$

式中, a_i 为常数; n 为正整数。

由傅里叶变换的定义很容易证明上述结论。

取 $n = 2$, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] e^{-j\omega t} dt \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) \end{aligned}$$

因为傅里叶变换是一种线性运算, 它满足叠加定理, 所以几个信号相加后的频谱等于各个单独信号的频谱之和。

3.3.3 奇偶特性

一般来说, 时间信号 $f(t)$ 通常都是时间 t 的实函数。下面讨论实时间函数的奇偶特性对其傅里叶变换的影响。

由傅里叶变换的定义可知:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

考虑到 $F(\omega)$ 是复函数, 且 $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$, 因而可以把 $F(\omega)$ 表示成模与相位或者实部与虚部两部分, 即

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \\ &= R(\omega) + jX(\omega) \end{aligned} \quad (3-68)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} |F(\omega)| &= \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) &= \arctan\left[\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right] \end{aligned} \right\} \quad (3-69)$$

此时有

$$\left. \begin{aligned} R(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \\ X(\omega) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned} \right\} \quad (3-70)$$

式中, $R(\omega)$ 为偶函数; $X(\omega)$ 为奇函数, 即满足下列关系:

$$\begin{aligned} R(\omega) &= R(-\omega) \\ X(\omega) &= -X(-\omega) \\ F(-\omega) &= F^*(\omega) \end{aligned}$$

利用 $R(\omega)$ 和 $X(\omega)$ 函数的奇偶性可证得 $|F(\omega)|$ 是偶函数, $\varphi(\omega)$ 是奇函数。因此, 实函数傅里叶变换的幅度谱和相位谱分别为偶(奇) 函数。这一特性在信号分析中应用广泛。

当 $f(t)$ 在积分区间内为实偶函数, 即

$$f(t) = f(-t)$$

则式(3-70) 应为

$$X(\omega) = 0$$

此时有

$$F(\omega) = R(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad (3-71)$$

由此可见, 若 $f(t)$ 是实偶函数, $F(\omega)$ 必为 ω 的实偶函数。

若 $f(t)$ 为实奇函数, 即

$$f(t) = -f(-t)$$

那么, 由式(3-70) 求得

$$R(\omega) = 0$$

此时有

$$F(\omega) = X(\omega) = -2j \int_0^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \quad (3-72)$$

由此可见, 若 $f(t)$ 是实奇函数, 则 $F(\omega)$ 必为 ω 的虚奇函数。

若 $f(t)$ 是时间 t 的虚函数, 令 $f(t) = jg(t)$, 则

$$\left. \begin{aligned} R(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin(\omega t) dt \\ X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cos(\omega t) dt \end{aligned} \right\} \quad (3-73)$$

式中, $R(\omega)$ 为奇函数; $X(\omega)$ 为偶函数, 即满足:

$$R(\omega) = -R(-\omega)$$

$$X(\omega) = X(-\omega)$$

无论 $f(t)$ 为实函数或复函数, 都具有以下性质:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}[f(-t)] &= F(-\omega) \\ \mathcal{F}[f^*(t)] &= F^*(-\omega) \\ \mathcal{F}[f^*(-t)] &= F^*(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (3-74)$$

例 3.3.1 已知

$$f(t) = \begin{cases} e^{-At} & t > 0 \\ -e^{At} & t < 0 \end{cases}$$

式中, A 为正实数, 试求该奇函数的频谱。

解

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-At} e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{At} e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

积分结果为

$$F(\omega) = \frac{-2j\omega}{A^2 + \omega^2}$$

$$|F(\omega)| = \frac{2|\omega|}{A^2 + \omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \omega > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \omega < 0 \end{cases}$$

其波形和幅度谱如图 3-20 所示,显然,实奇函数的频谱必然是虚奇函数。

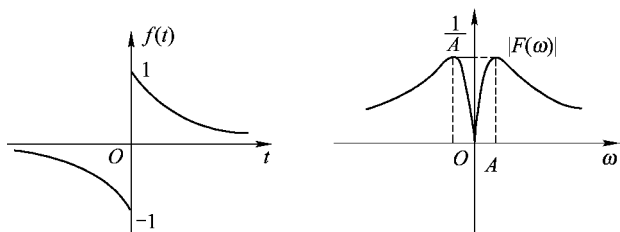


图 3-20 例 3.3.1 用图

3.3.4 尺度变换特性

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则经过压缩或者扩展后的信号 $f_1(t) = f(at)$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (a \text{ 为非零实常数}) \quad (3-75)$$

证明: 因为

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

令 $x = at$, 即 $t = \frac{x}{a}$, $dt = \frac{1}{a} dx$ 。

当 $a > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(at)] &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} dx \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

当 $a < 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(at)] &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} dx \\ &= -\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

由上述两种情况, 可以得到傅里叶变换的尺度变换特性的表达式为

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

当 $a = -1$ 时, 式(3-75) 变为

$$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega) \quad (3-76)$$

用如图 3-21 所示的矩形脉冲的几种情况来进一步说明尺度变换特性。

由此可见, 当 a 为大于 1 的正实数时, 信号在时域中的时间函数扩展 a 倍, 等效于它在频域中的频谱函数压缩 a 倍; 反之, 当 a 为小于 1 的正实数时, 信号在时域中的压缩则对应于在

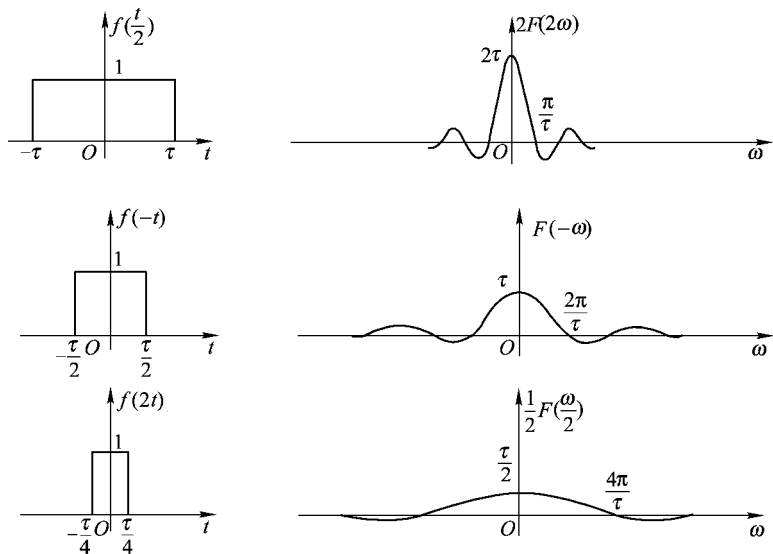


图 3-21 尺度变换特性

频域中的扩展。对于 $a = -1$ 的情况,则说明信号在时域中的时间函数沿纵轴反褶等效于在频域中的频谱函数也沿纵轴反褶。这是因为信号的波形压缩 a 倍,它随时间的变化就加快 a 倍,则信号所包含的频率分量增加 a 倍,即它的频谱展宽了 a 倍。此时,各频率分量的大小必然减小 a 倍。

从信息领域应用的角度来说明尺度变换特性。对任意时间函数 $f(t)$ 和它的频谱函数 $F(\omega)$,设当 $t \rightarrow \infty, \omega \rightarrow \infty$ 时, $f(t)$ 、 $F(\omega)$ 趋近于零,有傅里叶变换:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

所以有

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \tag{3-77}$$

又由傅里叶逆变换:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

所以有

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega = 2\pi f(0) \tag{3-78}$$

式(3-77)和式(3-78)分别说明 $f(t)$ 所覆盖的面积等于 $F(\omega)$ 在零点的数值 $F(0)$; $F(\omega)$ 所覆盖的面积等于 $2\pi f(t)$ 在零点的数值 $2\pi f(0)$ 。

若 $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 函数的最大值分别为 $f(0)$ 和 $F(0)$,如图 3-22 所示,则定义 τ 和 B 分别为 $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 的等效脉冲宽度和频带宽度,可写出如下关系式:

$$\begin{aligned} F(0)B_{\omega} &= 2\pi f(0) \\ f(0)\tau &= F(0) \end{aligned}$$

由此可得

$$B_{\omega} = \frac{2\pi}{\tau} \quad (3-79)$$

由式(3-79)可知,信号在时域中的脉冲宽度与它在频域中的频带宽度成反比,若要压缩信号的持续时间,则必须对它的频带加以展宽。因此,通信速度和占用频带在信息传输领域中是一对矛盾的量。

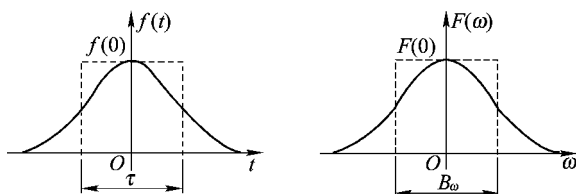


图 3-22 等效脉冲宽度与等效频带宽度

3.3.5 延时特性

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则函数 $f_1(t) = f(t - t_0)$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (3-80)$$

证明: 因为

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

令 $t - t_0 = x$, 那么 $t = x + t_0$, 代入上式, 得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t - t_0)] &= \mathcal{F}[f(x)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega(x+t_0)} dx \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \end{aligned}$$

所以有

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

同样

$$\mathcal{F}[f(t + t_0)] = F(\omega) e^{j\omega t_0} \quad (3-81)$$

由式(3-80)可知,信号 $f(t)$ 在时域中沿时间轴延时(右移) t_0 等效于该信号在频域中频谱乘以 $e^{-j\omega t_0}$, 即信号延时有对信号的幅度谱并不产生影响,而相位谱产生 $(-\omega t_0)$ 的滞后相移。

同理可得

$$\mathcal{F}[f(at - t_0)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}} \quad (3-82)$$

$$\mathcal{F}[f(-at + t_0)] = \frac{1}{|a|} F\left(-\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}} \quad (3-83)$$

当 $t_0 = 0$ 和 $a = \pm 1$ 时, 式(3-82) 和式(3-83) 就变为尺度变换特性和延时特性。

例 3.3.2 设信号 $f(t)$ 由三个矩形脉冲组成, 如图 3-23 所示, 试求三脉冲信号 $f(t)$ 的频谱。

解 用 $f_1(t)$ 来表示矩形单脉冲信号,由式(3-55)知 $f_1(t)$ 的频谱函数 $F_1(\omega)$ 为

$$F_1(\omega) = A\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

因为

$$f(t) = f_1(t-T) + f_1(t) + f_1(t+T)$$

由延时特性可知 $f(t)$ 的频谱函数 $F(\omega)$ 为

$$F(\omega) = F_1(\omega)(e^{-j\omega T} + 1 + e^{j\omega T}) = A\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)[1 + 2\cos(\omega T)]$$

其频谱如图 3-24 所示。

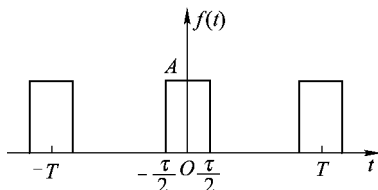


图 3-23 三脉冲信号的波形

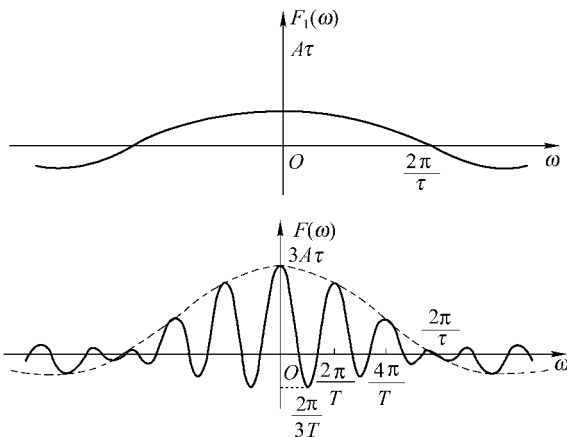


图 3-24 三脉冲信号的频谱

3.3.6 频移特性

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则函数 $f_1(t) = f(t)e^{j\omega_0 t}$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0) \quad (3-84)$$

证明: 因为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \end{aligned}$$

所以有

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0) \quad (3-85)$$

式中, ω_0 为实常数。

由此可见,信号 $f(t)$ 在时域中乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$,等效于 $f(t)$ 在频域中将整个频谱 $F(\omega)$ 沿频率增加的方向搬移 ω_0 。

频谱搬移技术在诸如调幅、同步解调、变频等通信和电子技术过程中得到了广泛应用。频谱搬移是将信号 $f(t)$ 乘以高频载波信号 $\sin(\omega_0 t)$ 或 $\cos(\omega_0 t)$ 实现的。现在分析这种相乘作用引起的频谱搬移。

由欧拉公式:

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

则可得

$$\mathcal{F}[f(t)\sin(\omega_0 t)] = \frac{j}{2}[F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)] \quad (3-86)$$

$$\mathcal{F}[f(t)\cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2}[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)] \quad (3-87)$$

由此可见,若时间信号 $f(t)$ 与 $\sin(\omega_0 t)$ 或 $\cos(\omega_0 t)$ 相乘,等效于 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 沿频率轴向左或向右各平移 ω_0 ,且幅值减半。

例 3.3.3 已知高频脉冲信号为

$$f(t) = g_\tau(t) \cos(\omega_0 t)$$

式中, $g_\tau(t)$ 为矩形脉冲;幅度为 A ;脉宽为 τ 。图形如图 3-25 中虚线所示,试求其频谱函数。

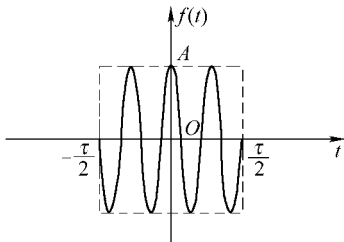


图 3-25 矩形调幅信号的波形

解 由式(3-55)知矩形脉冲 $g_\tau(t)$ 的频谱为

$$G(\omega) = A\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

由

$$f(t) = \frac{1}{2}g_\tau(t)(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

根据频移特性,可得 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2}[G(\omega + \omega_0) + G(\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{A\tau}{2}\text{Sa}\left[(\omega + \omega_0) \frac{\tau}{2}\right] + \frac{A\tau}{2}\text{Sa}\left[(\omega - \omega_0) \frac{\tau}{2}\right] \end{aligned}$$

由此可见,调幅信号的频谱等于将包络线的频谱一分为二,各向左、右移载频 ω_0 。高频脉冲信号 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 如图 3-26 所示。

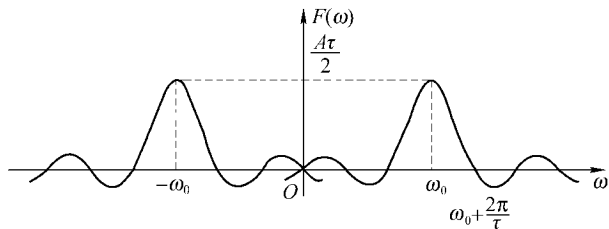


图 3-26 矩形调幅信号的频谱

3.3.7 微分特性

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则函数 $f(t)$ 的导数 $\frac{df(t)}{dt}$ 和 n 阶导数 $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ 的傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= j\omega F(\omega) \\ \mathcal{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] &= (j\omega)^n F(\omega)\end{aligned}\quad (3-88)$$

证明: 因为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

将等式两边进行微分, 得

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [j\omega F(\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

所以有

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega) \quad (3-89)$$

同样

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (j\omega)^n F(\omega) \quad (3-90)$$

式(3-89) 和式(3-90) 表示信号在时域的微分特性, 它说明信号在时域中取 n 阶导数等效于该信号在频域中用因子 $(j\omega)^n$ 与它的傅里叶变换相乘。同样, 可以导出信号在频域的微分特性如下:

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{dF(\omega)}{d\omega}\right] = (-jt)f(t) \quad (3-91)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}\right] = (-jt)^n f(t) \quad (3-92)$$

下面以一个简单的应用例子对时域微分定理加以应用, 若已知单位阶跃信号 $u(t)$ 的傅里叶变换, 可利用此定理求出 $\delta(t)$ 和 $\delta'(t)$ 的变换式:

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = j\omega\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] = 1$$

$$\mathcal{F}[\delta'(t)] = j\omega \quad (3-93)$$

3.3.8 积分特性

在信号分析领域,对一个信号进行积分,就是求该信号函数 $f(t)$ 曲线下的面积,一般用定积分 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ 表示,若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$,则函数 $f_1(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega) \quad (3-94)$$

证明:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) u(t-\tau) d\tau\right] e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (3-95)$$

将函数 $f(\tau)$ 与阶跃函数 $u(t-\tau)$ 相乘,同时将积分上限 t 改写为 $+\infty$,积分结果不变。交换积分次序,并根据延时特性将阶跃信号 $u(t-\tau)$ 的傅里叶变换关系式:

$$\mathcal{F}[u(t-\tau)] = \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] e^{-j\omega\tau}$$

则式(3-95)可改写为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau) e^{-j\omega t} dt\right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \pi\delta(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{e^{-j\omega\tau}}{j\omega} d\tau \\ &= \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega} \end{aligned} \quad (3-96)$$

令 $F(0) = 0$,则式(3-96)化简为

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

和微分特性一样,上述结论也可以推广为:对函数在时域中进行 n 次积分相当于在频域中将其频谱乘以 $(\frac{1}{j\omega})^n$ ($\omega = 0$ 除外)。

例 3.3.4 已知信号 $y(t)$ (见图 3-27) 在时域内的表达式为

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t}{t_0} & 0 \leq t \leq t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

试求其频谱。

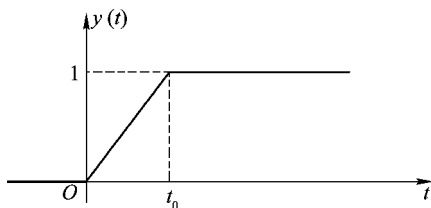


图 3-27 截平的斜变信号

解 由傅里叶变换的积分特性可方便的求出 $y(t)$ 的频谱 $Y(\omega)$ 。

由 $y(t)$ 的表达式和波形可以把 $y(t)$ 看成脉幅为 $\frac{1}{t_0}$, 脉宽为 t_0 的矩形脉冲 $f(\tau)$ 的积分, 即

$$y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

由

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ \frac{1}{t_0} & 0 < \tau < t_0 \\ 1 & \tau > t_0 \end{cases}$$

根据矩形脉冲的频谱及延时特性, 可得 $f(\tau)$ 的频谱 $F(\omega)$ 为

$$F(\omega) = \text{Sa}\left(\frac{\omega t_0}{2}\right) e^{-j\omega \frac{t_0}{2}}$$

因为

$$F(0) = 1 \neq 0$$

求得

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \mathcal{F}[y(t)] \\ &= \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega) \\ &= \frac{1}{j\omega} \text{Sa}\left(\frac{\omega t_0}{2}\right) e^{-j\omega \frac{t_0}{2}} + \pi \delta(\omega) \end{aligned} \quad (3-97)$$

当 $t_0 \rightarrow 0$, $y(t) \rightarrow u(t)$, $f(\tau) \rightarrow \delta(\tau)$, 此时式(3-97)变为

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

与式(3-64)的结果完全相同。

3.3.9 时域和频域卷积特性(卷积定理)

卷积特性是讨论一个域中的卷积运算对应于另一个域中何种运算的性质, 它是通信系统和信号处理研究领域中的应用最为广泛的傅里叶变换性质之一, 在以后的章节中还将频繁出现。

1. 时域卷积特性

给定两个时间函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$, 如果它们的傅里叶变换分别为

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$$

那么这两个函数在时域内的卷积的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (3-98)$$

证明: 由卷积定义, 已知

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (3-99)$$

因此有

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) F_2(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= F_2(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau
 \end{aligned}$$

所以有

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (3-100)$$

式(3-100)称为时域卷积定理,它说明时域中两个信号的卷积等效于在频域中频谱相乘。

2. 频域卷积特性

若函数 $f_1(t), f_2(t)$ 的傅里叶变换分别为

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$$

$$\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$$

则它们在时域内的乘积的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \quad (3-101)$$

其中

$$F_1(\omega) * F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(u) F_2(\omega - u) du$$

式(3-101)称为频域卷积特性,它说明两个时间函数在时域内乘积的频谱等效于两个函数频谱的卷积再乘以 $\frac{1}{2\pi}$ 。傅里叶变换的对称特性决定了时域与频域卷积特性的对称。

3.4 傅里叶分析的应用举例

在前面三节里,已经对傅里叶级数和傅里叶变换的基本概念、运算方法、常见变换对及主要性质进行了详细讨论,同时也涉及到它们的一些应用。这一节将进一步讨论傅里叶分析的一些重要应用。

3.4.1 线性系统的傅里叶分析

1. 系统分析的基本任务

线性连续时不变(LTI)系统的特性在时域里可用系统的单位冲激响应 $h(t)$ 来描述,也可用系统的数学模型 $y(t) = h(t) * f(t)$ 来描述;在频域里则可用其频率特性 $H(\omega)$ 来描述。两者完全等效且可互相转换,如图 3-28 所示。因此,LTI 系统的分析实际上就是研究变量 $f(t) \leftrightarrow F(\omega), h(t) \leftrightarrow H(\omega), y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$ 之间的相互关系。如果是研究 $f(t), h(t)$ 和 $y(t)$ 三个时间变量之间的关系,就是系统的时域分析;如果是研究 $F(\omega), H(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 三个频率变量之间及时间变量间的关系,则是系统的频域分析或称傅里叶分析。显然,知道 $F(\omega), H(\omega)$ 和 $Y(\omega)$ 中的两个,就可解出第三个。如果已知系统特性 $H(\omega)$ 求输出 $Y(\omega)$,这一过程就是系统分析,也就是已知系统结构和参数,求系统在一定输入下的响应;如果希望在一定输入 $F(\omega)$ 的作用下,产生一定输出 $Y(\omega)$,求所需系统的频率特性 $H(\omega)$,这种求解过程称为系统的综合,即在给定系统特性的情况下,确定系统的结构和参数。

无论是系统的分析还是综合,系统的频率特性 $H(\omega)$ 都起着重要的作用。与 $H(\omega)$ 相关

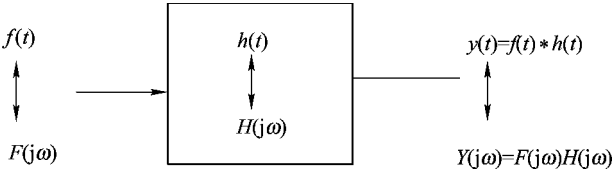


图 3-28 时域频域转换模型

的主要公式为

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] \tag{3-102}$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{F(\omega)} \tag{3-103}$$

式(3-102) 成立的条件是 $h(t)$ 必须满足傅里叶变换的存在条件(即狄里赫利条件)。

在前面已详细讨论 LTI 系统的单位冲激响应的计算公式, $h(t)$ 一般表达式为

$$h(t) = \cdots + A_1\delta(t) + A_0\delta(t) + \sum_{j=1}^n K_j e^{\lambda_j t} u(t) \tag{3-104}$$

式中, $\cdots, A_1, A_0, K_j (j = 1 - n)$ 均是系统 $H(\omega)$ 的部分展开式系数, λ_j 是系统特征方程的第 j 个根, 即 $H(\omega)$ 的第 j 个极点。若系统所有特征根的实部都小于零, 即 $\text{Re}(\lambda_j) < 0$, 这种系统叫稳定系统。这种系统在有界的内部或者外部扰动作用时, 系统的输出发生变化; 而扰动消除后, 经过足够长的时间, 系统的输出能回到原来的状态。反之, 若系统某一特征根的实部大于零, 即 $\text{Re}(\lambda_j) > 0$, 这种系统叫不稳定系统。因为即使在任何微小扰动的激励下, 系统的输出也会发生变化, 产生无限增长的响应, 而且随着时间的推移, 系统的输出越来越大。而当某一个(或几个)特征根满足条件 $\text{Re}(\lambda_j) = 0$, 其余的根全部满足条件 $\text{Re}(\lambda_j) < 0$ 时, 这样的系统叫临界稳定系统。下面对一个 RC 串联系统进行简单的分析。

例 3.4.1 试计算如图 3-29 所示系统当激励为 $u(t)$, 响应为 $u_c(t)$ 时的频率特征。

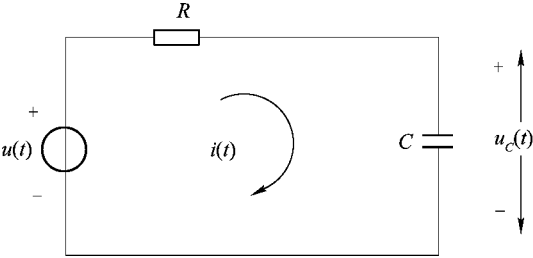


图 3-29 RC 串联电路

该电路的微分方程为

$$u(t) = (R + \frac{1}{j\omega C})i(t)$$

或

$$u(t) = (j\omega RC + 1)u_c(t)$$

因此, 从 $u(t)$ 至 $u_c(t)$ 的转移算子为

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

对微分方程取傅里叶变换, 设 $u(t) \leftrightarrow F(\omega), u_c(t) \leftrightarrow U_c(\omega)$ 。根据时域微分性质可得

$$(\mathrm{j}\omega RC + 1)U_C(\omega) = F(\omega)$$

或

$$U_C(\omega) = \frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega RC + 1} = H(\omega)F(\omega)$$

其中

$$H(\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega RC + 1}$$

因为电容器上的电压与流过的电流呈积分关系,所以根据傅里叶变换的时域微积分性质,在实际问题中常把电容 C 用 $\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$ 标注,叫容抗。这样,当激励与响应皆用其频谱 $F(\omega)$ 、 $Y(\omega)$ 标注时,就可以直接用欧姆定律来列写电路的频域方程式,如图 3-29 所示电路即有

$$(R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C})I(\omega) = F(\omega)$$

或

$$(R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C})(\mathrm{j}\omega C)U_C(\omega) = F(\omega)$$

2. 系统对周期激励信号的响应

因为任意信号都可以分解为无限多个不同频率的复指数信号 $e^{\mathrm{j}\omega_0 t}$ 的叠加,所以先从指数信号开始进行分析。设 $f(t) = e^{\mathrm{j}\omega_0 t}$,则 $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$,于是相应的输出信号频谱为

$$Y(\omega) = 2\pi H(\omega)\delta(\omega - \omega_0) = 2\pi H(\omega_0)\delta(\omega - \omega_0) \quad (3-105)$$

则输出的时域表达式为

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)] = H(\omega)e^{\mathrm{j}\omega_0 t} = |H(\omega_0)|e^{\mathrm{j}[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} \quad (3-106)$$

式中, $|H(\omega_0)|$ 和 $\varphi(\omega_0)$ 分别为 $H(\omega_0)$ 的模和相位角。

式(3-106)说明,LTI系统在单一频率的周期信号激励下,响应的频率不变,幅度改变了 $|H(\omega_0)|$ 倍而且增加了一个相移 $\varphi(\omega_0)$,改变量完全由系统的频率特性 $H(\omega)$ 在激励信号频率 ω_0 处的值 $H(\omega_0)$ 决定。

如果系统的激励 $f(t)$ 是满足狄里赫利条件的任意周期信号,由于它可以展开成傅里叶级数 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\omega_0)e^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$,利用傅里叶变换的线性特性,就可方便地计算出稳定系统对此激励 $f(t)$ 的响应 $y(t)$ 的频谱为

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi H(\omega)F(n\omega_0)\delta(\omega - \omega_0) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi H(n\omega_0)F(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned} \quad (3-107)$$

经逆变换计算,求得输出信号为

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(n\omega_0)F(n\omega_0)e^{\mathrm{j}n\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |H(n\omega_0)| |F(n\omega_0)| e^{\mathrm{j}[n\omega_0 t + \varphi(n\omega_0) + \theta(n\omega_0)]} \end{aligned}$$

其中

$$\varphi(n\omega_0) = \angle H(\omega) \big|_{\omega = n\omega_0} \quad (3-108)$$

$$\theta(n\omega_0) = \angle F(n\omega_0) \quad (3-109)$$

由式(3-107)可知,线性时不变系统对周期激励信号的响应仍然是周期信号,且频率不变,只是各次谐波(包括直流)的幅度和相位要受到系统频率特性的影响。

3. 系统对非周期激励信号的响应

非周期信号具有连续的频谱,且每一个频率分量都只有无穷小的幅度,因此不能像周期激励信号那样用傅里叶级数的形式来表征激励 $f(t)$ 和响应 $y(t)$,而只能用频谱密度来描述。利用傅里叶变换用下列公式来进行分析:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= F(\omega)H(\omega) \\ y(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)H(\omega)e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (3-110)$$

例 3.4.2 试分析如图 3-30(a) 所示 RC 电路对单位阶跃信号 $f(t) = u(t)$ 的响应。

解 因为

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

所以有

$$F(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

将 RC 电路中 C 用 $\frac{1}{j\omega C}$ 代替,已知该电路的频率特性为

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

它的幅频特性和相频特性分别为

$$\begin{cases} |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC) \end{cases} \quad (3-111)$$

如图 3-30(b) 所示是一个简单的低通滤波器: $|\omega| < \omega_0$ 的频率分量基本不受影响可以顺利通过; $|\omega| > \omega_0$ 的频率分量则受较大的衰减。在 $|\omega| = \omega_0$ 处,信号的能量已减少一半。所以称 ω_0 为该滤波器的截止频率(又称为三分贝带宽)。显然有

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (3-112)$$

由上面的结果可求出输出信号的频谱为

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= [\pi\delta(\omega + \frac{1}{j\omega})](\frac{1}{1 + j\omega RC}) \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega(1 + j\omega RC)} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} + \frac{-1}{j\omega + \frac{1}{RC}} \end{aligned}$$

于是有

$$y(t) = u(t) - e^{-\frac{1}{RC}t}u(t) = (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})u(t)$$

相应的波形如图 3-30(c) 所示。由图可见, $y(t)$ 并不能跟随 $u(t)$ 突变, 而是必须经过一段时间上升过程, 才会随着时间的推移逐步地逼近 $u(t)$ 。通常用 $y(t)$ 上升到 0.9 时, 误差已能满足工程需要, 所以通常把 $y(t)$ 从 0 上升到 0.9 这段时间 t_r , 叫该系统的上升时间。由

$$(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) = 0.9$$

由此求得

$$t_r \approx RC \ln 10 \quad (3-113)$$

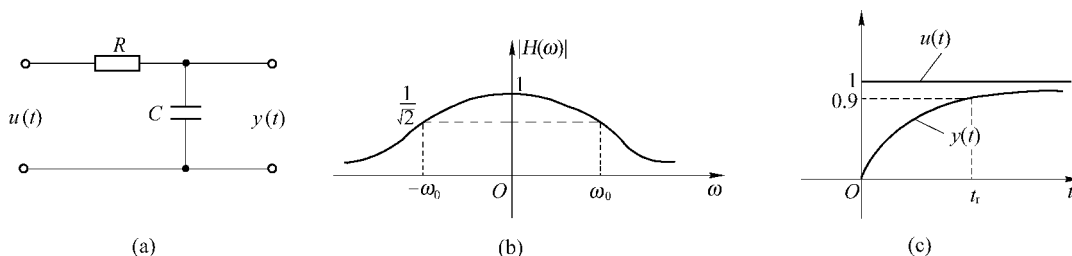


图 3-30 例 3.4.2 用图

这表明, t_r 正比于 RC , 所以 RC 又称为系统的时间常数。由式(3-112) 可以看出 $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, 即系统的时间常数越大, 系统的带宽越窄。合并式(3-112) 和式(3-113) 可得

$$t_r f_0 = \frac{\ln 10}{2\pi} \approx 0.36 \quad (3-114)$$

其中

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

这说明系统的结构一旦确定, 其上升时间就是一个常数, 和系统的具体元件参数完全无关。大多数系统这个值都介于 $0.3 \sim 0.5$ 之间, 例如, 带宽为 100 MHz 的示波器, 其固有上升的时间都可以用 3.6 ns 来估计。

3.4.2 无失真传输系统

有些情况下, 要求系统的响应波形与激励波形保持一致, 这种传输称为无失真传输。在应用到放大器、传输线的场合都有这样的要求。例如, 高保真音响系统或称 Hi-Fi(High Fidelity) 系统, 需要喇叭高保真地重现磁带或唱盘上录制的音乐; 示波器应尽可能无失真地显示输入信号波形等。显然, 无失真传输系统对激励信号 $f(t)$ 的响应 $y(t)$ 应是 $f(t)$ 的准确复制品, 两者的幅值和相位可以不同, 但波形的变换规律应完全一样, 即

$$y(t) = Kf(t - t_d) \quad (3-115)$$

式中, K 和 t_d 都是常数; K 为系统的增益; t_d 为延迟时间。

式(3-115) 亦可改写为

$$y(t) = f(t) * K\delta(t - t_d) \quad (3-116)$$

这说明无失真系统的单位冲激响应为

$$h(t) = K\delta(t - t_d) \quad (3-117)$$

对式(3-115) 作傅里叶变换得

$$Y(\omega) = KF(\omega)e^{-j\omega t_d}$$

又由

$$Y(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$

于是导出无失真传输系统的频率特性为

$$H(\omega) = Ke^{-j\omega t_d} \tag{3-118}$$

显然,式(3-118)也可由式(3-117)直接作傅里叶变换得到。更进一步讲,一个无失真传输系统应满足两个条件。

(1) 幅频特性:在整个 $f(t)$ 的频率范围内频率特性的模应保持常数,即

$$|H(\omega)| = K$$

(2) 相频特性:在整个 $f(t)$ 的频谱范围内频率特性的相位必须和其频率成正比,即无失真传输系统的幅频特性曲线和相频特性曲线如图 3-31 所示。

$$\varphi(\omega) = -\omega t_d$$

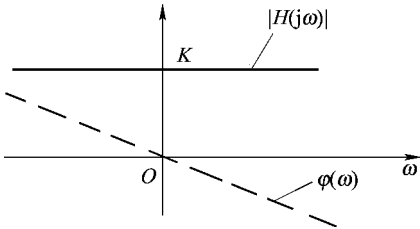


图 3-31 无失真传输系统

3.4.3 滤波

在通信和信号处理中经常需要解决一个问题:如何从受到噪声及各种干扰信号污染的信号中分离出有用的信号。其中一个办法就是利用有用信号和干扰信号之间在频谱上的差别,让信号通过一个系统,把不需要的频率成分滤掉同时把需要的频率成分保留下来,这个过程叫做信号的滤波,这样的系统叫做滤波器。任何一个线性时不变系统都是一个滤波器,例如,为了使收音机收到指定的电台信号,所有的收音机在天线之后都配置了一个滤波器,它调谐在所需电台信号的频率上使其顺利通过,同时可以过滤掉其他电台的频率信号。

滤波器的种类很多,按其频率特性可分为低通、高通、带通和带阻四种滤波器,它们的频率特性如图 3-32 所示,图(a)为理想低通,图(b)为理想高通,图(c)为理想带通,图(d)为理想带阻。低通滤波器 $H_1(\omega)$ 让信号的低频分量顺利通过,而滤除高频分量;高通滤波器 $H_2(\omega)$ 则让高频分量顺利通过,而滤除低频分量;带通滤波器 $H_3(\omega)$ 则只让 $|\omega| = \omega_L - \omega_0$ 这一段范围内的频率分量通过,而滤除高于和低于它的其他频率分量;带阻滤波器 $H_4(\omega)$ 则只滤除 $|\omega| = \omega_L - \omega_0$ 这一段范围内的频率分量,而让高于和低于它的其他频率分量通过。上面提到的收音机输入滤波器属于带通滤波器。直流电源的整流器中的滤波器就属于低通滤波器,用它来滤除输出直流电压中的交流纹波。汽车的减震装置是低通滤波器,它可以大大缓解汽车在行驶过程中的快速震动。积分器也是一种低通滤波器。微分器则是一种高通滤波器,微分可以增强信号快速变化的部分,因此在图像处理中可用来增强图像的边缘部分,使图像轮廓更加清晰。

滤波器的种类很多,但实际的设计中,总是以低通滤波器为原型,先设计出低通滤波器,然后通过频率变换可以设计出其他几种类型的滤波器。为此,下面重点讨论低通滤波器。

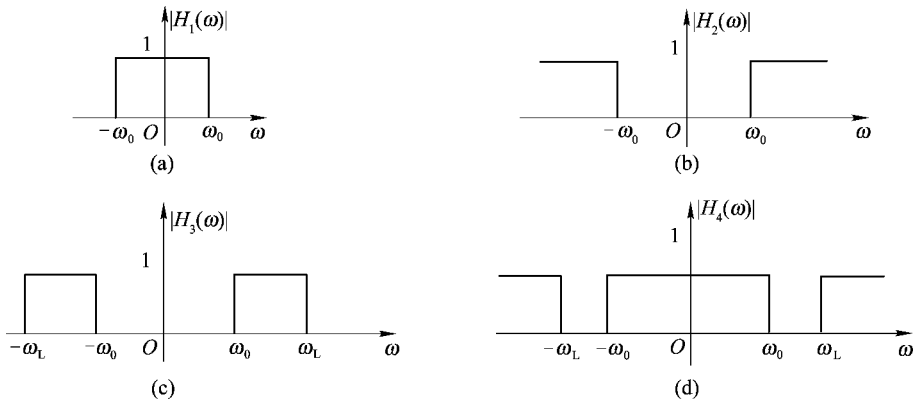


图 3-32 理想滤波器的频率特性

1. 理想低通滤波器

低通滤波器的理想幅频特性是一个矩形,其相频特性与频率成正比,如图 3-33 所示。因此理想低通滤波器的频率特性函数可参照门函数写为

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= P_{2\omega_0}(\omega) e^{-j\omega t_d} \\
 &= \begin{cases} e^{-j\omega t_d} & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases} \quad (3-119)
 \end{aligned}$$

式中, t_d 为相频特性的斜率; ω_0 为滤波器的截止频率。

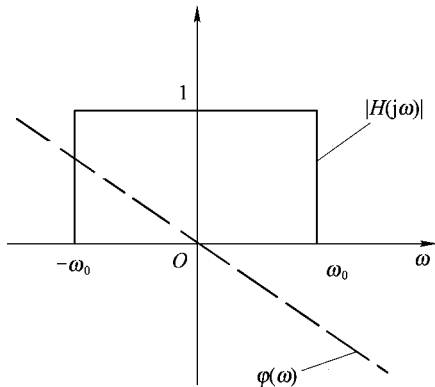


图 3-33 理想低通滤波器的幅频特性

在 $|\omega| < \omega_0$ 的频率范围内输入信号能顺利通过,只不过在时间上延迟 t_d ,这个范围称为滤波器的通频带;在 $|\omega| > \omega_0$ 的频率范围内,输入信号一律不能通过,即输出中这些分量为零,这个范围称为滤波器的阻带。通带和阻带之间没有渐变的过渡带,而是突变的,故称为理想滤波器。

现在先讨论理想低通滤波器的冲激响应。如果理想低通滤波器的激励为冲激信号,那么由傅里叶变换的对称特性和延时特性很容易写出理想低通滤波器的单位冲激响应的表达式为

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[P_{2\omega_0}(\omega) e^{-j\omega t_d}] = \frac{\omega_0}{\pi} \text{Sa}[\omega_0(t - t_d)] \quad (3-120)$$

理想低通滤波器的冲激响应是一个延迟了 t_d 的抽样函数,相应的波形如图 3-34(a) 所示。

接下来讨论理想低滤波器的阶跃响应,由于上文已经求出阶跃信号的傅里叶变换式为

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

故可以利用卷积的方法求得阶跃响应,理想低滤波器的单位阶跃响应 $g(t)$ 为

$$g(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{\omega_0}{\pi} \frac{\sin \omega_0 (\tau - t_d)}{\omega_0 (\tau - t_d)} d\tau \tag{3-121}$$

令 $x = \omega_0 (\tau - t_d)$, 则 $d\tau = \frac{dx}{\omega_0}$, 代入上式得

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega_0 (t-t_d)} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0 (t-t_d)} \frac{\sin x}{x} dx \tag{3-122}$$

上式的积分叫正弦积分, 记为

$$\text{Si}(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx \tag{3-123}$$

其函数值由正弦积分函数表给出, 可知

$$\text{Si}(-\infty) = -\text{Si}(+\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

于是式(3-122) 可改写为

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_0 (t - t_d)] \tag{3-124}$$

从数学手册中的正弦积分函数表可查出 $\text{Si}(y)$ 的值, 于是可直接由式(3-124) 画出理想低滤波器的过渡特性曲线如图 3-34(b) 所示。

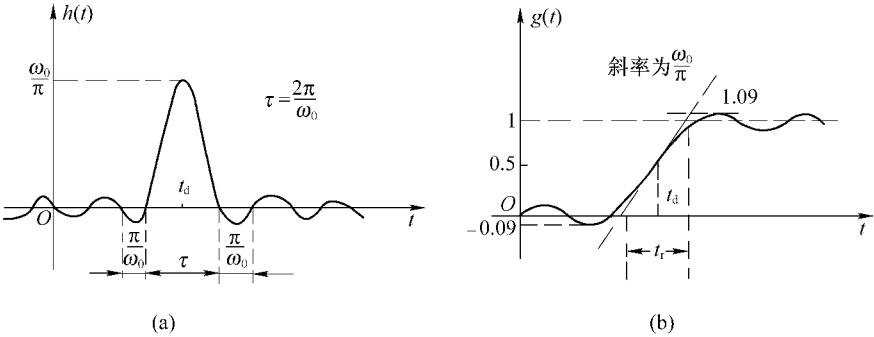


图 3-34 理想低通滤波器特性

由图 3-34(b) 还可知, 与 $h(t)$ 相同, 理想低滤波器的过渡特性 $g(t)$ 也有起伏, 且起伏频率也等于 ω_0 。和 $h(t)$ 不同的是起伏的幅度与 ω_0 无关, 只不过随 ω_0 的增大, 起伏的极值更为密集且更趋近于 $t = t_d$ 的位置, 这就是有名的吉布斯现象。

吉布斯现象(又叫吉布斯效应): 将具有不连续点的周期函数(如矩形脉冲) 进行傅里叶级数展开后, 选取有限项进行合成。当选取的项数越多, 在所合成的波形中出现的峰起值越靠近原信号的不连续点。当选取的项数很大时, 该峰起值趋于一个常数, 大约等于总跳变值的 9%。

尽管理想低通滤波器是无法实现的, 但是通过对它的研究可以得到许多有用的结论启示。

(1) 过渡时间与带宽成反比。

(2) 在信号时间波形的不连续点处, 其傅里叶变换收敛于不连续点左极限与右极限的平均值。这一结论常用来定义函数不连续点处的数值。

(3) 由于理想低通滤波器的通频带在 $\pm \omega_0$ 处被突然截断, 从而引起吉布斯现象, 并一直延伸至 $t = \pm \infty$ 。这说明, 在通带与阻带之间加一个渐变的过渡带, 一方面可以减弱振荡现象, 另一方面也使低通滤波器成为物理可实现的系统。

由于有理想滤波特性的滤波器无法实现, 因此实际滤波器只能接近于理想特性。下面来讨论低通滤波器特性的逼近。

2. 非理想低通滤波器

非理想低通滤波器的幅频特性如图 3-35 所示。在通带 $|\omega| < \omega_p$ 的范围内信号的传输值允许有小的变化, 但不能超过某一允许值 δ_1 ; 而在阻带 $|\omega| > \omega_s$ 的范围内, 信号的传输不得大于某一允许值 δ_2 ; 其中 ω_p 为通频带的截止频率, ω_s 为阻带的截止频率, 而 $\omega_p < |\omega| < \omega_s$, 这一频率范围是通带到阻带的过渡带, 要求不超过某一规定的宽度。能满足滤波性能的非理想低通滤波器的种类很多, 使用中最常见的是最平坦型低通滤波器和通带起伏型低通滤波器。

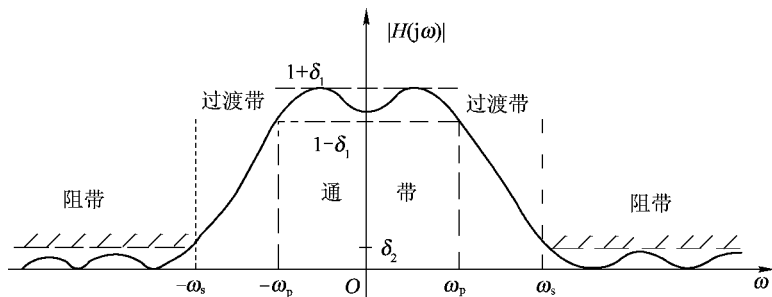


图 3-35 非理想低通滤波器的幅频特性

最平坦型低通滤波器又称巴特沃斯滤波器。一个 n 阶巴特沃斯滤波器的幅频特性公式为式(3-125), 其曲线如图 3-36 所示。

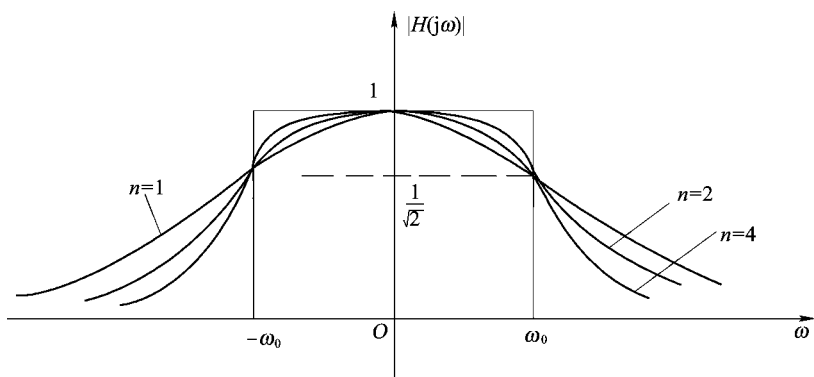


图 3-36 最平坦型低通滤波器的幅频特性

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}} \quad (3-125)$$

由图 3-36 不难看出, 巴特沃斯滤波特性是单调的, 当 $\omega = 0$ 时, $|H(\omega)|$ 达到最大值, 与理想滤波特性逼近效果最好。而随着频率的增大, 误差逐渐增加, 在截止频率附近的逼近效

果很差。另外在其通带内,随阶数 n 的增大曲线更加平坦;在阻带内,随阶数 n 增大而增大曲线更加陡峭;特性也更接近于理想低通滤波器。当然 n 越大,电路也复杂,成本也会急剧增加。

除了上述这种在通带和阻带内幅频特性都呈单调形状的巴特沃斯滤波器外,另一比较常用的是通带等起伏型滤波器,也叫切比雪夫滤波器,它的阻带呈单调状,其示意曲线图如图 3-37(a) 所示。另外还有通带、阻带等起伏的椭圆滤波器如图 3-37(b) 所示以及通带单调阻带等起伏的反切比雪夫滤波器如图 3-37(c) 所示。这里不再一一详述。

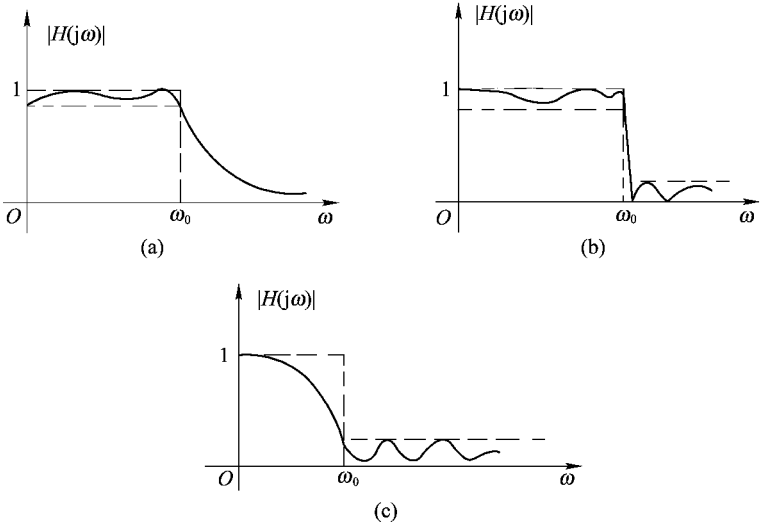


图 3-37 各种滤波器的幅频特性

3.4.4 调制与解调

电磁辐射理论说明,只有当发送到天线的电流频率足够高,波长足够短,使得天线尺寸与辐射信号的波长可以相比较时,信号才能有效地辐射出去。因此,如果需要通过电台将由声音、图像、编码等转换而成的电信号直接辐射到空间时,所需的天线尺寸将达到几万米甚至几十万米以上,这是无法实现的。一种有效的方法是把需要发射的信号作为原信号,通过调制,把它所携带的信号通过频率高得多的载波信号辐射出去,到了接收端再通过解调,从已调制的载波信号中把信号恢复出来。另外,即使可以直接辐射信号,那么各电台所发出的信号也会混叠在一起互相干扰而使接收者无法区分,利用调制就可以通过同一信道使用不同的载波频段传送很多信号而互不干扰。

调制通常是由待传输的低频电信号控制另一个高频信号的振幅、频率、初相位等参数的过程。例如,正弦信号 $A\sin(\omega + \varphi)$ 有三个参数: A 为振幅, ω 为频率, φ 为初相位。若用待传输的调制信号去控制这个正弦信号的振幅 A ,使其按照调制信号的规律变化,称为幅度调制,简称调幅(AM);同样,如果被控参数是 ω 或 φ ,则分别称为频率调制和相位调制,简称调频(FM)和调相(PM 或 φM)。待传输信号又称为调制信号,被控制的信号又称为载波信号。实际中也常把周期矩形脉冲信号作为载波信号,使调制信号去控制脉冲信号的脉冲宽度、脉冲幅度或脉冲位置等参数中的一个,分别称为脉冲幅度调制(PAM)、脉冲宽度调制(PDM)和脉冲位置调制(PPM)等。

解调是调制的逆过程,也就是从已调制信号中恢复或提取出被调制信号的过程。对调幅信号进行的解调也叫做检波,对调频和调相信号的解调也叫做鉴频和鉴相。下面以信号的调幅和检波为例介绍信号的调制和解调过程。

1. 调幅

设调制信号和载波信号分别为 $x(t)$ 和 $f(t) = A\cos(\omega_0 t)$, 则调幅后的已调信号可表示为

$$y(t) = Ax(t)\cos(\omega_0 t) \quad (3-126)$$

若

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega), \quad y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$$

则由频移特性,可得

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{A}{2\pi} X(\omega) * \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{A}{2} [X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)] \end{aligned} \quad (3-127)$$

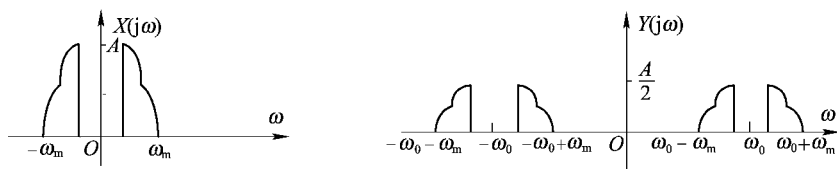


图 3-38 抑制载波的 AM 频谱

如图 3-38 所示的频谱可以看出经幅度调制之后,被调制信号 $x(t)$ 的频谱一分为二且不失真地分别搬移到载波频率 ω_0 和 $-\omega_0$ 两旁。

式(3-126)所代表的调幅方式,在已调信号中并不包含载波信号的信息,因此称为抑制载波调幅,或称为平衡调幅。这种方式由于不传送载波信号,故可以节省功率,提高发射效率。但是在接收端,须产生出载波信号 $f(t) = A\cos(\omega_0 t)$,以便把调制信号的频谱重新搬回到 ω_0 两旁,这就是同步解调方式。

2. 检波

抑制载波调幅信号要利用乘法器和低通滤波器(LPF)才能实现幅度解调,其原理方框如图 3-39 所示。由于已调信号 $f(t) = Ax(t)\cos(\omega_0 t)$ 再次与载波信号 $\cos(\omega_0 t)$ 相乘,得到

$$\begin{aligned} g(t) &= y(t)\cos(\omega_0 t) = Ax(t)\cos^2(\omega_0 t) \\ &= Ax(t) \frac{1 + \cos(2\omega_0 t)}{2} \end{aligned} \quad (3-128)$$

则其频谱为

$$G(\omega) = \frac{A}{2} X(\omega) + \frac{A\pi}{2} [X(\omega + 2\omega_0) + X(\omega - 2\omega_0)] \quad (3-129)$$

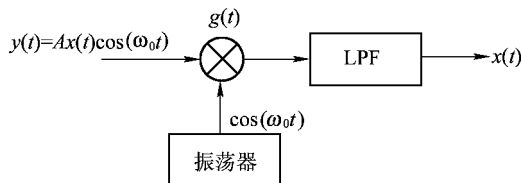


图 3-39 同步解调器

这样,在乘法器之后再接上截止频率介于 $X(\omega)$ 的最高频率 ω_m 和 $2\omega_0 - \omega_m$ 之间的低通滤波器,就可滤除掉 $G(\omega)$ 中的高频成分 $X(\omega \pm 2\omega_0)$,从而恢复出被调制信号 $x(t)$,如图 3-40 所示。即

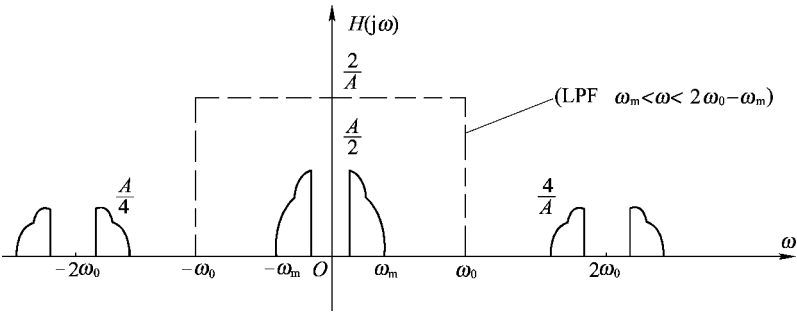


图 3-40 解调波形

$$G(\omega)H(\omega) = X(\omega)$$

其中

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{A} & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

此为低通滤波器的频率特性,且 $\omega_m < \omega < 2\omega_0 - \omega_m$ 。

3.4.5 抽样信号与抽样定理

自然界中大量存在的信号,无论是周期的还是非周期的,大都是时间 t 的连续函数,故统称为连续时间信号,如声音、图像等信号。随着计算机的广泛普及和数字化技术的迅猛发展,导致在现代通信系统、自动控制系统及信息系统领域中,离散信号得到了更加广泛的应用,这在很多场合需要将连续信号转化为离散信号,以便于信息的传输与处理。

1. 抽样信号

离散信号是在不连续的点上有确定值的信号。这些不连续的间隔可以是均匀的,也可以是不均匀的。离散信号可以是实际存在的信号,如医院人口出生统计等,也可对连续信号每隔一定时间进行抽样(也称采样、取样)获得。电信号的抽样可以通过最简单的抽样器进行,如图 3-41 所示为其示意图。设抽样器的动作周期(即抽样周期)为 T_s ,图 3-41(c)所示为离散抽样信号 $f_s(t)$ 。它是一组脉冲宽度为 τ 、间隔为 T_s 、幅度按连续信号 $f(t)$ 变化的脉冲信号。

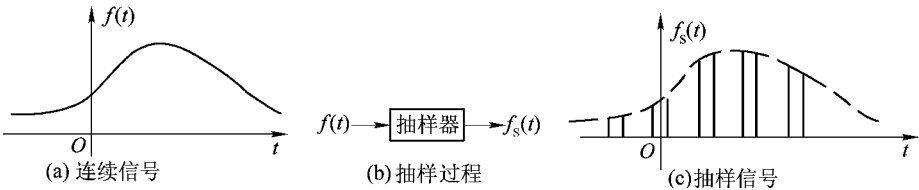


图 3-41 电信号的抽样示意图

虽然对连续信号 $f(t)$ 进行抽样得到的信号 $f_s(t)$ 只是连续信号 $f(t)$ 在一些离散瞬间的

值,但在满足一定的条件下,抽样信号 $f_s(t)$ 完全可以代表连续信号 $f(t)$ 。由于离散信号的传送效果远比连续信号好,故可只传送 $f_s(t)$ 而不直接传送 $f(t)$ 。在系统的终端仍可以从 $f_s(t)$ 中恢复原信号 $f(t)$ 。

在实际工程中,抽样脉冲的宽度 τ 一般远小于抽样周期 T_s ,因此在传输信号时,只占用了信道的一部分时间,其他的时间都是空余的。可以利用这些空余的时间去传送别的信号,这就使得在同一信道中可以同时传送多路信号,从而大大提高了信道的利用率,此即所谓的“时分复用系统”。如图 3-42 所示表示同一信道中同时传送两路抽样信号的情形。

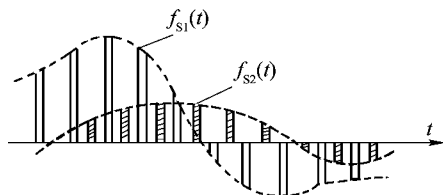


图 3-42 用时分复用法传送两个信号

2. 抽样定理

连续信号 $f(t)$ 被离散抽样后,抽样信号 $f_s(t)$ 只是 $f(t)$ 中很小的一部分。现在的问题是抽样信号是否保留了原信号的全部信息,也就是说能否从抽样信号中无失真地还原出原来的连续信号 $f(t)$ 。著名的抽样定理(Sampling Theorem)对此做出了明确而精辟的回答。

抽样定理:一个频谱受限信号 $f(t)$ 的最高频率为 f_m ,则 $f(t)$ 可以用不大于 $T_s = \frac{1}{2f_m}$ 的时间间隔对信号 $f(t)$ 进行等间隔抽样所得的抽样信号 $f_s(t)$ 将保留原信号 $f(t)$ 的全部信息,从而可利用 $f_s(t)$ 完全还原 $f(t)$ 。

该定理表明,若要求信号 $f(t)$ 抽样后信息能够完整保留下来,必须满足两个条件:一是 $f(t)$ 应为频谱受限的,即其频谱在 $\omega > \omega_m$ (或 $f > f_m$) 时为零;二是抽样周期不能过大,必须满足 $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$ 。通常把 $f_s = 2f_m$ 称为奈奎斯特抽样频率,把最大允许抽样间隔 $T_s = \frac{1}{2f_m}$ 称为奈奎斯特(Nyquist)间隔。例如,要传送频带为 15 kHz 的音频信号,抽样频率至少应为 $2f_m = 30$ kHz,即每秒至少要抽样 30000 次,如果低于此抽样频率,那么原信号 $f(t)$ 的信息就会不完整。

抽样定理表明了在什么条件下,抽样信号能够保留原信号的全部信息。下面来说明抽样定理的正确性。把抽样后信号 $f_s(t)$ 表示为连续信号 $f(t)$ 与抽样脉冲信号 $p(t)$ 相乘,即

$$f_s(t) = f(t) \cdot p(t)$$

抽样脉冲信号如图 3-43 所示,它是周期为 T_s 、宽度为 τ 的矩形脉冲序列。

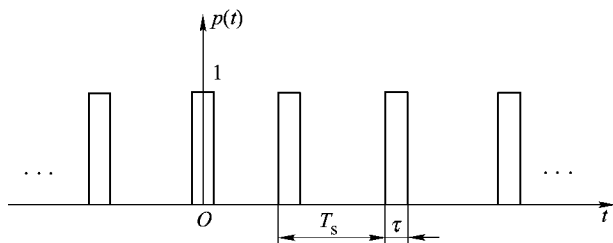


图 3-43 抽样脉冲信号

因为抽样脉冲 $p(t)$ 为周期信号, 所以由式(3-18) 将 $p(t)$ 展开为傅里叶级数可得

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_s t}$$

将上式两边取傅里叶变换:

$$\mathcal{F}[p(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_s t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \mathcal{F}[e^{jn\omega_s t}]$$

由式(3-61) 可知

$$\mathcal{F}(e^{jn\omega_s t}) = 2\pi\delta(\omega - n\omega_s)$$

所以有

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_s) \quad (3-130)$$

式中, ω_s 称为抽样频率; 系数为 $F_n = \frac{\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right)$ 。

利用卷积特性, 可得抽样信号 $f_s(t)$ 的频谱 $F_s(\omega)$ 为

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_s) \\ &= F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s) \\ &= \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s) \end{aligned} \quad (3-131)$$

式(3-131) 表明: 用抽样脉冲信号对 $f(t)$ 信号抽样时, 所得抽样信号 $f_s(t)$ 的频谱是由原信号频谱 $F(\omega)$ 的周期重复, 重复周期的间隔为 ω_s , 只要抽样周期 $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$, 基带频谱和各次谐波频谱互相就不会重叠。当 $n=0$ 时, $F_s(\omega)$ 中仅存 $F(\omega)$, 只是系数变化了 $\frac{\tau}{T_s}$, 这说明 $F_s(\omega)$ 中包含了原信号 $f(t)$ 的全部信息。如图 3-44 所示为抽样信号及其频谱的示意图。其中, $f_s(t)$ 是由 $f(t)$ 与 $p(t)$ 相乘得到, 相应地, $F_s(\omega)$ 是 $F(\omega)$ 与 $P(\omega)$ 两者的卷积得。

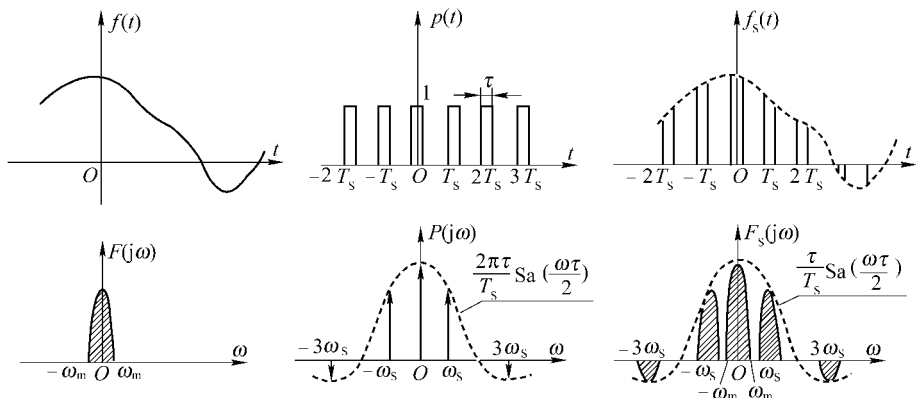


图 3-44 抽样信号及其频谱的示意图

再来讨论从 $f_s(t)$ 中恢复原信号 $f(t)$ 的问题。观察图 3-44 可知,从无混叠的 $F_s(\omega)$ 中提取原信号 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$,可以用一个截止频率 $\omega_0 = \omega_m$ 的矩形频谱函数(理想低通滤波器)与 $F_s(\omega)$ 相乘,即可完全取出 $F(\omega)$ 的所有信息。从时域角度看,这就相当于从 $f_s(t)$ 中恢复出原信号 $f(t)$ 。如图 3-45 所示为恢复 $f(t)$ 的原理框图。

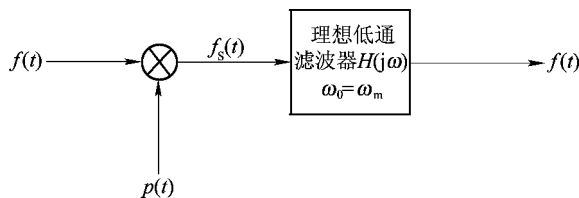


图 3-45 恢复 $f(t)$ 的原理框图

由理想滤波器的分析可知,理想低通是不可实现的。而一般实际非理想低通的幅频特性进入截止区后又不夠陡直,所以除了原信号的频谱分量外,实际采样信号经过实际低通滤波器后,还会有相邻部分的频率分量,使还原信号与原信号有差别。解决的方法是提高采样频率或使用更高阶(性能好)的滤波器。

另外,实际信号的频谱也不会无限宽,只是随着频率升高,振幅很快衰减而已。这就是说,一般采样后的频谱总会有重叠部分,即使利用理想低通也不可能完全恢复原信号。通常认为信号有一定的有效带宽,或在实际工作中采用预滤波,这样使某个有效的频率以外的分量可以忽略不计,在工程上这是允许的。因此只要采样频率足够高,滤波器特性又足够好,保证在一定精度条件下,原信号的恢复是可能的。

3.5 利用 MATLAB 进行系统的频域分析

利用 MATLAB 软件强大的数值计算功能,以及 MATLAB 信号处理(Signal Processing)工具箱和符号运算(Symbolic Math)工具箱提供的函数,可以方便地对连续信号和系统进行频域分析。本节将简单介绍连续信号。

3.5.1 连续信号的频域分析

要对连续信号 $f(t)$ 进行频谱分析,关键是求得它的傅里叶变换 $F(j\omega)$ 。MATLAB 的符号运算工具箱提供了能直接求解傅里叶变换的函数 `fourier()`,它的调用格式如下:

$$F = \text{fourier}(f)$$

其中, f 一个符号函数,使用前应先定义。函数的返回值 F 即为符号函数 f 的傅里叶变换,它的默认自变量是 ω 。下面通过一个实例来说明这个函数的用法。

例 3.5.1 试求 $f(t) = e^{-2|t|}$ 的傅里叶变换。

解 为求得 $f(t)$ 的傅里叶变换,需要先定义对应的符号函数,这可以通过以下命令完成:

```
syms t real
```

```
f = exp(- 2 * abs(t))
```

上面第一个命令定义了一个实数型的符号变量 t ,然后以它为自变量定义了符号函数 f 。

为求得符号函数 f 的傅里叶变换,使用以下命令:

```
F = fourier(f)
```

命令执行结果为

```
F =  
4/(4 + w^2)
```

说明函数 $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \frac{4}{4 + \omega^2}$$

MATLAB 的符号运算工具箱同样提供了求解傅里叶逆变换的函数 ifourier(), 它的调用格式如下:

```
f = ifourier(F)
```

其中, f 为符号函数 F 的傅里叶逆变换。此函数的使用不再详述。

例 3.5.2 已知 $f(t) = e^{-2t}u(t)$, 试画出 $f(t)$ 的波形及其频谱图。

解 此题 $f(t)$ 的表达式中出现了单位阶跃信号 $u(t)$, 在 MATLAB 软件中, 单位阶跃信号可表示为 Heaviside(t)。解决此题的命令如下:

```
syms t w x;  
x = exp(- 2 * t) * sym('Heaviside(t)');  
F = fourier(x);  
Subplot(2,1,1);  
Ezplot(x);  
Subplot(2,1,2);  
Ezplot(abs(F));
```

因为程序中的符号函数 x 与 F 都是符号函数, 所以对它们作图示应使用 ezplot() 命令。程序运行结果如图 3-46 所示。

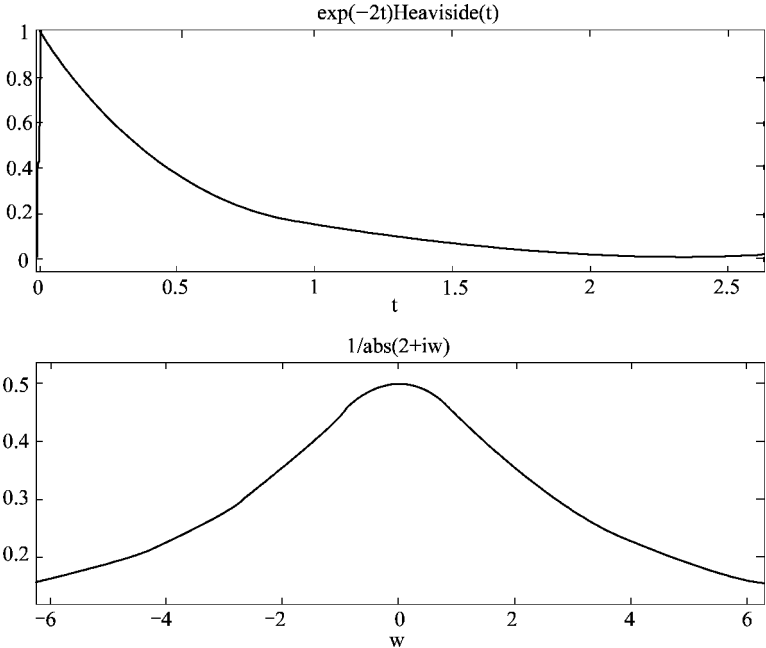


图 3-46 例 3.5.2 用图

3.5.2 连续系统的频域分析

当连续系统的频率响应 $H(j\omega)$ 是 $j\omega$ 的有理多项式时,即 $H(j\omega)$ 形如

$$H(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_0}$$

MATLAB 信号处理工具箱提供的函数 `freqs()` 可以直接计算系统的频率响应,它的调用格式为

$$h = \text{freqs}(b,a,w)$$

其中, b 为向量 $[b_m, \cdots, b_1, b_0]$; a 为向量 $[a_n, \cdots, a_1, a_0]$; w 为规定频率响应频率范围的向量,它一般通过以下命令来定义:

$$w = w1:p:w2$$

其中, $w1$ 为起始频率; $w2$ 为终止频率; p 为相邻两频率点之间的间隔。 H 返回的就是在 w 规定的频率点上系统频率响应的值。

例 3.5.3 已知某系统的频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{100}{(j\omega)^2 + 70j\omega + 100}$$

画出系统幅频特性图和相频特性图。

解 解答此题的 MATLAB 程序如下:

```
b = [100];
a = [1 70 100];
w = 0:1:100;
h = freqs(b,a,w);
h1 = abs(h);
h2 = angle(h) * 180/pi;
subplot(2,2,1);
plot(w,h1);
grid
xlabel('频率');
ylabel('幅度');
title('幅频特性');
subplot(2,2,2);
plot(w,h2);
grid
xlabel('频率');
ylabel('相位');
title('相频特性');
```

程序中首先利用 `freqs()` 函数求得了系统的频率特性值,然后利用 `abs()` 函数得到其幅值,即系统的幅频特性值;利用 `angle()` 函数得到其相位角,即系统的相频特性值。程序运行结果如图 3-47 所示。

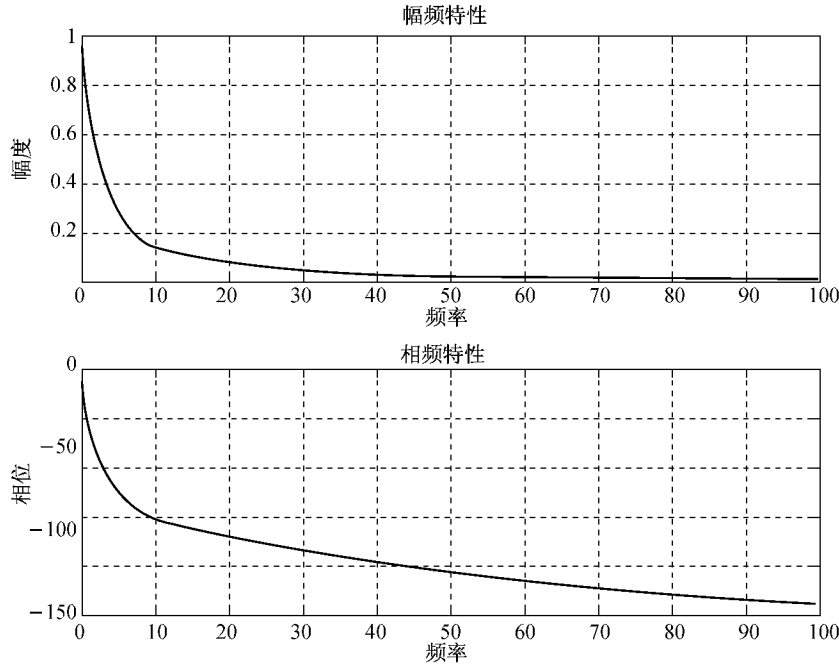


图 3-47 例 3.5.3 用图

本章小结

1. 当周期信号用三角傅氏级数展开时,表示信号可由无穷多谐波分量叠加组成,分解结果由单边离散谱表示;当周期信号用指数傅氏级数展开时,意味着信号可由无穷多指数分量叠加组成,其结果可由双边离散频谱图表示。

2. 非周期信号的傅里叶变换,是将信号分解为无穷多指数分量的连续和(积分),其结果为连续频谱图。信号的持续时间与频带宽度成反比是一切非周期信号所共有的重要特点。

3. 系统频域分析的基础是卷积定理,其纽带是系统的频率特性 $H(\omega)$,它表示了系统在正弦稳态下的传输特性。系统的频率特性 $H(\omega)$ 与冲激响应 $h(t)$ 构成傅氏变换对。

4. 无失真传输系统的特性为

$$H(\omega) = K e^{-j\omega t_0}$$

理想低通滤波器在截止频率以内可以满足上述特性。

5. 对于 $F(\omega)$ 为有限带宽的信号,只要按抽样频率为

$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2f_m$$

进行均匀抽样,则抽样信号中将包含原信号的全部信息,因而可从抽样信号中恢复出原信号。

习 题 3

3.1 试求如图 3-48 所示对称周期矩形信号的傅里叶级数(三角形形式与指数形式)。