

# 第3章 时域分析

控制系统常用的分析方法有时域分析法、根轨迹法和频域分析法。本章讨论控制系统的时域分析法。

时域分析法是根据系统的微分方程(或传递函数),以拉普拉斯变换作为数学工具,直接解出系统对给定输入信号的时间响应,然后根据响应来评价系统性能的方法。其特点是准确、直观,但在控制理论发展初期,该方法只限于处理阶次较低的简单系统。随着计算机技术的不断发展,目前很多复杂系统都可以在时域中直接分析,使时域分析法在现代控制理论中得到了广泛应用。

## 3.1 控制系统的时域性能指标

为了便于对系统进行分析、设计和比较,根据系统通常遇到的输入信号形式,对其数学描述进行理想化得到的一些基本输入函数,称为典型输入信号。控制系统中常用的输入信号有单位阶跃信号、单位斜坡(速度)信号、单位加速度(抛物线)信号、单位脉冲信号和正弦信号。这些典型输入信号的数学表达式如下:

单位阶跃函数为

$$r(t) = 1(t) \quad (t \geq 0)$$

单位斜坡函数为

$$r(t) = t \quad (t \geq 0)$$

单位加速度函数为

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2 \quad (t \geq 0)$$

单位脉冲函数为

$$r(t) = \delta(t) \quad (t = 0)$$

正弦函数为

$$r(t) = A \sin \omega t \quad (t \geq 0)$$

由于这些典型输入信号的数学表达式比较简单,对系统的实际输入也有代表性,并且在实验室容易获得,因此利用它们对系统进行研究是有实际意义的。对实际系统进行分析时,应根据系统的实际情况选择合适的典型输入信号。当系统的输入作用有突变的性质时,可以选择阶跃信号作为典型输入信号,如电力系统的负荷变化等;当系统的输入随时间增长而变化时,可选择斜坡信号作为典型输入信号,如跟踪卫星的天线控制系统;当系统的输入具有周期性变化时,可以选择正弦信号作为典型输入信号。

对同一系统,输入信号不同,其相应的时间响应也不同,但它们所表征的系统的性能是一致的。通常,用系统的时域性能指标来衡量一个控制系统的优劣,时域性能指标是根据系统的时间响应来定义的。

在典型输入信号作用下,控制系统的输出时间响应由暂态响应和稳态响应构成。从初始状态转移到终止状态的响应称为暂态响应或动态响应,又称为过渡过程。暂态响应提供系统稳定性、响应速度和阻尼状况等信息,属于系统快速性问题。当时间  $t \rightarrow \infty$  时,稳定控制系统的输出表现形式称为稳态响应,又称为稳态过程。稳态响应提供系统控制精度信息,属于系统准确性问题。

如果以  $c(t)$  表示时间响应,那么其一般形式可写为

$$c(t) = c_{ss}(t) + c_t(t)$$

式中,  $c_{ss}(t)$  为稳态响应;  $c_t(t)$  为暂态响应。

稳态响应由稳态性能描述,而暂态响应由暂态性能描述。因此,系统的性能指标由暂态性能指标和稳态性能指标两部分组成。

### 3.1.1 暂态性能指标

虽然控制系统常用的输入信号有单位阶跃函数、单位斜坡(速度)函数、单位加速度(抛物线)函数、单位脉冲函数和正弦函数等,但通常根据阶跃响应曲线来定义系统的暂态性能指标,如图 3-1 所示。

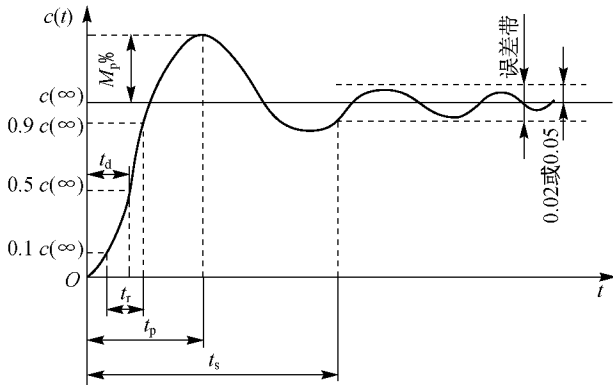


图 3-1 描述性能指标的单位阶跃响应曲线

系统的暂态性能指标如下:

- (1) 延迟时间  $t_d$ 。延迟时间是曲线第一次达到终值一半所需的时间。
- (2) 上升时间  $t_r$ 。上升时间是响应曲线从终值 10% 上升到 90% 所需的时间,对于欠阻尼系统可定义为响应从零第一次上升到终值所需的时间。
- (3) 峰值时间  $t_p$ 。峰值时间是响应超过终值到达第一个峰值所需的时间。
- (4) 超调量  $M_p\%$ 。超调量是响应的最大偏离量  $c(t_p)$  与终值  $c(\infty)$  之差的百分比,即

$$M_p\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

- (5) 调节时间  $t_s$ 。调节时间是响应到达并保持终值  $\pm 5\%$  (或  $\pm 2\%$ ) 误差范围所需的最小时间。

(6) 振荡次数  $N$ 。振荡次数是在调节时间内, 响应曲线穿越稳态值的次数的  $\frac{1}{2}$ 。

以上各性能指标中, 上升时间  $t_r$  和峰值时间  $t_p$  描述系统起始阶段的快慢; 最大超调量  $M_p\%$  和振荡次数  $N$  反映系统的平稳性; 调节时间  $t_s$  表示系统过渡过程的持续时间, 总体上反映系统的快速性。

### 3.1.2 稳态性能指标

控制系统在输入信号作用下, 其输出量中包含暂态分量和稳态分量。对于稳定系统, 暂态分量随时间的推移而逐渐消失; 稳态分量则从输入信号加入的瞬时起就始终存在, 其表现方式就是稳态响应。稳态分量反映了控制系统跟踪输入信号或抑制扰动信号的能力和精度, 这种能力和精度称为系统的稳态性能。一个系统的稳态性能是以系统响应某些典型输入信号时的稳态误差  $e_{ss}$  来评价的。在稳态条件下, 系统输出响应的期望值与实际值之差就称为稳态误差, 它反映系统复现输入信号的最终精度, 这些将在 3.5 节作详细介绍。

## 3.2 一阶系统的时域分析

### 3.2.1 一阶系统的数学模型

能够用一阶微分方程描述的系统为一阶系统。其传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \quad (3-1)$$

式中,  $T$  为系统的时间常数。

典型一阶系统的结构图如图 3-2 所示。

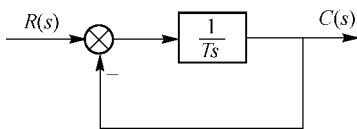


图 3-2 典型一阶系统

### 3.2.2 一阶系统的单位阶跃响应

单位阶跃函数的拉氏变换为  $R(s) = \frac{1}{s}$ , 则由式(3-1)得到系统输出为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts+1} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1}$$

对上式求拉氏反变换, 得到系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0) \quad (3-2)$$

由式(3-2)知, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 暂态分量将按指数规律衰减到零, 而  $c(t)$  中只剩下稳态分量。由此可知, 一阶系统的单位阶跃响应是一条初始值为零、以指数规律上升到稳态值的曲线, 如图 3-3 所示。

响应曲线的初始斜率为

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T}$$

按此斜率由零点等速上升至稳态值所需时间恰为  $T$ 。显然,减小时间常数  $T$  可以提高一阶系统响应的初始速度。

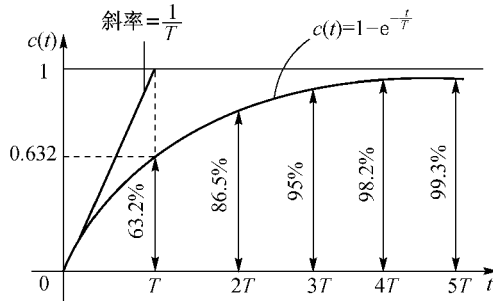


图 3-3 一阶系统的单位阶跃响应

由图 3-3 可知,一阶系统的阶跃响应没有超调量,其动态性能指标主要是调节时间  $t_s$ 。当  $t=3T$  时,响应  $c(t)=0.95$ ;当  $t=4T$  时, $c(t)=0.982$ ,故取

$$t_s = \begin{cases} 3T & (\Delta = \pm 5\%) \\ 4T & (\Delta = \pm 2\%) \end{cases}$$

显然,时间常数  $T$  反映了系统的响应速度。系统的时间常数  $T$  越小,则调节时间  $t_s$  越短,动态过程的快速性就越好。

### 3.2.3 一阶系统的单位脉冲响应

当输入信号为理想单位脉冲函数时, $R(s)=1$ ,由式(3-1)得到系统的输出为

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

求拉氏反变换,得到相应的系统单位脉冲响应为

$$c(t) = L^{-1}[C(s)] = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$$

其响应曲线如图 3-4 所示。由图 3-4 可看出,一阶系统的单位脉冲响应为一单调下降的指数曲线。系统的调节时间为

$$t_s = \begin{cases} 3T & (\Delta = 5\%) \\ 4T & (\Delta = 2\%) \end{cases}$$

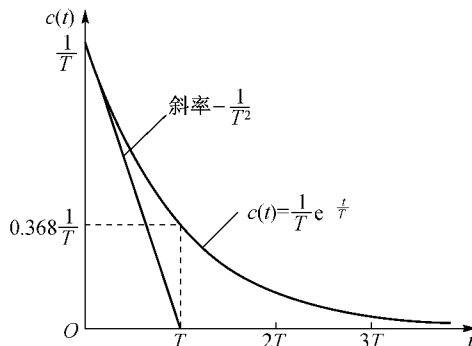


图 3-4 一阶系统的单位脉冲响应

由此可知,系统的惯性时间常数  $T$  越小,响应速度就越快。

### 3.2.4 一阶系统的单位斜坡响应

当输入信号为理想单位斜坡函数  $r(t) = t$  时,  $R(s) = \frac{1}{s^2}$ , 由式(3-1)得到系统的输出为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts+1} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{1+Ts}$$

求拉氏反变换,得到系统的单位斜坡响应为

$$c(t) = t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) = (t - T) + Te^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$$

等号右侧第一项是一阶系统单位斜坡响应的稳态分量,它是一个与输入斜坡函数有相同斜率,但在时间上迟后一个时间常数  $T$  的斜坡函数。响应曲线如图 3-5 所示。

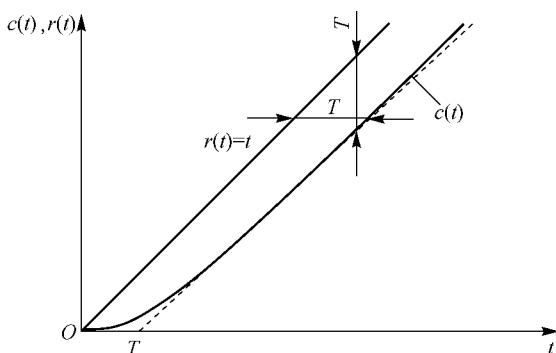


图 3-5 一阶系统单位斜坡响应

显然,一些系统在跟踪单位速度信号时,当过渡过程结束后,其稳态输出与输入在位置上仍有误差。误差计算式为  $e(t) = r(t) - c(t) = T(1 - e^{-\frac{t}{T}})$ , 所以一阶系统跟踪单位斜坡信号的稳态误差为  $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = T$ 。

### 3.2.5 一阶系统的单位加速度响应

当输入信号为单位加速度函数  $r(t) = \frac{1}{2}t^2$  时,  $R(s) = \frac{1}{s^3}$ , 由式(3-1)得到系统的输出为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts+1} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{s^3} - \frac{T}{s^2} + \frac{T^2}{s} - \frac{T^2}{s + \frac{1}{T}}$$

求拉氏反变换,得

$$c(t) = \frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (t \geq 0)$$

误差为

$$e(t) = r(t) - c(t) = Tt - T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

可见,跟踪误差随时间推移而增大,直至无穷。因此,一阶系统不能实现对加速度输入函数的跟踪。一阶系统对典型输入信号的响应见表 3-1。

表 3-1 一阶系统对典型输入信号的响应

传递函数	输入信号		输出响应 $C(s)$
	$r(t)$	$R(s)$	
$\frac{1}{Ts+1}$	$\delta(t)$	1	$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$
	$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$
	$t$	$\frac{1}{s^2}$	$t - T + Te^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$
	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (t \geq 0)$

### 3.3 二阶系统的时域分析

凡以二阶微分方程作为运动方程的控制系统,统称为二阶系统。它在控制工程中的应用极为广泛,如  $RLC$  网络、忽略电枢电感后的电动机、具有质量的物体运动等。因此,许多高阶系统在一定条件下,常近似为二阶系统来研究。因此,详细讨论和分析二阶系统的特性具有极其重要的实际意义。

#### 3.3.1 二阶系统的数学模型

典型的单位反馈二阶系统的结构图如图 3-6 所示。它的开环传递函数和闭环传递函数分别为

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-3)$$

式中,  $\zeta$  为阻尼系数;  $\omega_n$  为无阻尼自然振荡频率,  $\text{rad/s}$ 。

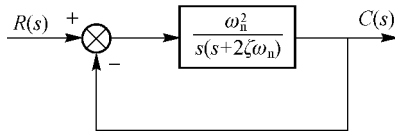


图 3-6 典型二阶系统

闭环系统的特征方程为

$$D(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

其特征方程的根,即闭环极点为  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$ 。系统的全部特征根完全由  $\zeta$  和  $\omega_n$  两个参数来描述。

#### 3.3.2 二阶系统的单位阶跃响应

对于单位阶跃输入  $r(t) = 1(t)$ ,  $R(s) = \frac{1}{s}$ ,由式(3-3)得到系统的输出为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-4)$$

求其拉氏反变换可得到二阶系统的单位阶跃响应。当  $\zeta$  为不同值时,所对应的响应具有不同的形式。

1) 当  $\zeta=0$  时为零阻尼情况

将  $\zeta=0$  带入式(3-4),可得系统的输出为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

进行拉氏反变换可得到相应的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t \quad (t \geq 0)$$

此时,闭环系统的两个极点为

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

系统在  $S$  平面上的极点分布情况如图 3-7 所示,一般用符号“ $\times$ ”表示系统极点。响应曲线如图 3-8 所示,是一条平均值为 1 的等幅余弦振荡曲线。

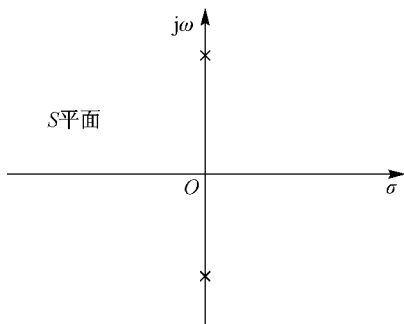


图 3-7  $\zeta=0$  时系统的极点分布情况

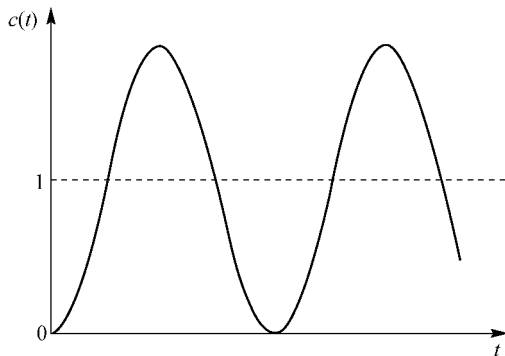


图 3-8  $\zeta=0$  时的单位阶跃响应

可见,系统有一对纯虚数极点,系统处于无阻尼状态,其暂态响应为等幅振荡的周期函数,且频率为  $\omega_n$ ,称为无阻尼自然角频率。

2) 当  $0 < \zeta < 1$  时为欠阻尼情况

可将式(3-4)写为如下形式

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})^2} \end{aligned}$$

经过拉氏反变换可求得系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right) \quad (t \geq 0) \quad (3-5)$$

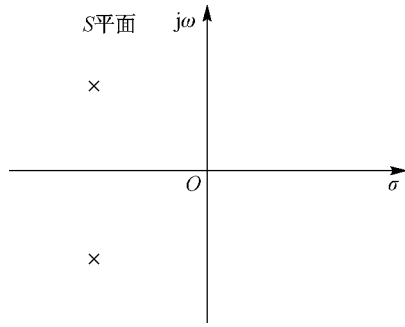
由式(3-5)可见,系统的暂态分量为振幅随时间按指数函数规律衰减的周期函数,其振荡频率为

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

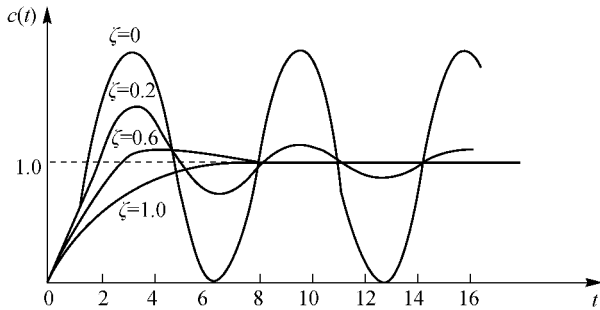
显然, $\zeta$  值越大,振幅衰减越快。此时,系统具有一对共轭复数极点

$$s_{1,2} = -\zeta \pm j\omega \sqrt{1 - \zeta^2}$$

在  $S$  平面上的分布情况如图 3-9 所示。

图 3-9  $0 < \zeta < 1$  时系统的极点分布情况

如图 3-10 所示为阻尼比  $\zeta$  为不同值时二阶系统单位阶跃响应曲线簇。

图 3-10  $0 < \zeta < 1$  时的单位阶跃响应

根据式(3-5)计算在  $0 < \zeta < 1$  情况下二阶系统单位阶跃响应的暂态性能的各项指标。

(1) 上升时间  $t_r$ 。上升时间是指在暂态过程中第一次达到稳态值的时间。在式(3-5)中令  $c(t) = 1$ , 可得

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = 0$$

当  $t = t_r$  时,  $e^{-\zeta\omega_n t_r} \neq 0$ , 故有

$$\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_r + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = 0$$

则必有

$$\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_r + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = n\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

因为上升时间是第一次达到稳态值的时间, 故取  $n=1$ , 令  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ , 于是

$$t_r = \frac{\pi - \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{\omega_d} \left(\pi - \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

(2) 峰值时间  $t_p$ 。峰值时间是指响应由零上升到第一个峰值所需的时间。对式(3-5)求一阶导数, 并令其为零, 取  $\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ , 得

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = \omega_d \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos(\omega_d t_p + \varphi) - \zeta\omega_n \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_p + \varphi) = 0$$



移项并简化后得

$$\tan(\omega_d t_p + \varphi) = \frac{\omega_d}{\zeta \omega_n} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

到达第一个峰值时,  $\omega_d t_p = \pi$ , 即

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

当  $\zeta$  一定时,  $\omega_n$  增大, 则  $t_p$  减小; 当  $\omega_n$  一定时,  $\zeta$  减小, 则  $t_p$  减小。

(3) 最大超调量  $M_p\%$ 。最大超调量发生在  $t=t_p$  时刻, 将  $t=t_p$  代入式(3-5), 使得

$$M_p\% = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \times 100\% \quad (3-6)$$

由式(3-6)可见,  $M_p\%$  完全由  $\zeta$  决定, 当  $\zeta$  减小时, 则  $M_p\%$  会增大; 当  $\zeta=0$  时,  $M_p\% = 100\%$ ; 当  $\zeta \rightarrow 1$  时,  $M_p\% \approx 0$ 。

在设计系统时, 人们通常要求系统的超调量  $M_p\%$  不能超过某个值, 于是由式(3-6)可知  $\zeta$  由要求的  $M_p\%$  决定。

(4) 调节时间  $t_s$ 。调节时间为  $c(t)$  与稳态值  $c(\infty)$  之间的差值达到允许范围(取 5% 或 2%)时的暂态过程时间。

$$\Delta e = c(\infty) - c(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi) = 0.05 \text{ (或 } 0.02)$$

满足上式的  $t_s$  值有多个, 取其中最小值为调节时间  $t_s$ 。

为简单起见, 采用近似的计算方法, 认为指数项衰减到 0.05 或 0.02 时, 暂态过程结束, 从而忽略正弦函数的影响, 得到

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} = 0.05 \text{ (或 } 0.02)$$

当  $0 < \zeta < 0.9$  时, 可得

$$t_s(5\%) = \frac{1}{\zeta\omega_n} \left[ 3 - \frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2) \right] \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (3-7)$$

$$t_s(2\%) = \frac{1}{\zeta\omega_n} \left[ 4 - \frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2) \right] \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (3-8)$$

由式(3-7)和式(3-8)可知,  $t_s$  近似与  $\zeta\omega_n$  成反比, 所以  $t_s$  由  $\omega_n$  决定。

3) 当  $\zeta=1$  时为临界阻尼情况

将  $\zeta=1$  代入式(3-4), 可得系统的输出为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2}$$

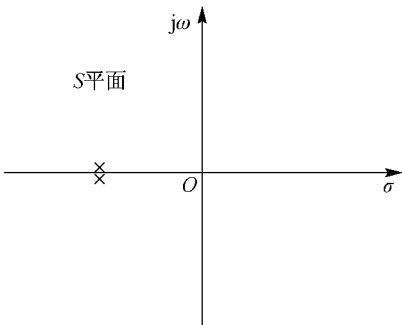
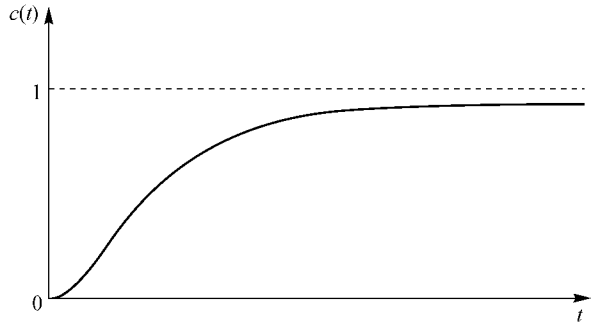
进行拉氏反变换可求得系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (t \geq 0) \quad (3-9)$$

式(3-9)表明, 临界阻尼二阶系统的单位阶跃响应仍是稳态值为 1 的非周期上升过程。此时, 闭环系统的两个极点为

$$s_{1,2} = -\omega_n$$

在 S 平面上的分布情况如图 3-11 所示, 响应曲线如图 3-12 所示。

图 3-11  $\zeta=1$  时系统的极点分布情况图 3-12  $\zeta=1$  时的单位阶跃响应

可见,此时系统具有两个相等的负实数极点,响应单调上升,无超调,但它是二阶系统单位阶跃响应中最快的,调节时间为

$$t_s \approx \frac{5.8}{\omega_n} \quad (\text{取 } \Delta = \pm 2\%)$$

4) 当  $\zeta > 1$  时为过阻尼情况

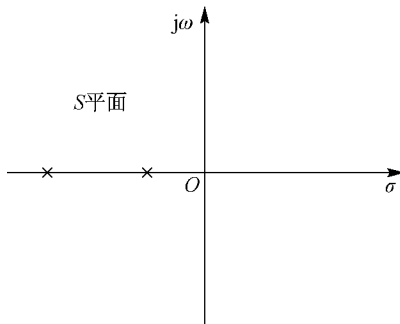
系统的输出为

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

此时,系统的两个闭环极点为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

在 S 平面上的分布情况如图 3-13 所示。

图 3-13  $\zeta > 1$  时系统的极点分布情况

可见,系统具有两个不相等的负实数极点。单位阶跃响应可写为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2}{s(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2}$$

$$\text{式中, } A_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = 1; A_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\omega_n^2}{s(s-s_2)} = -\frac{1}{2/\zeta^2 - 1(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})};$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow s_2} \frac{\omega_n^2}{s(s-s_1)} = \frac{1}{2/\zeta^2 - 1(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}。$$

因此,系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - \frac{1}{2/\zeta^2 - 1} \left[ \frac{1}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{s_1 t} - \frac{1}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{s_2 t} \right] \quad (t \geq 0) \quad (3-10)$$

式(3-10)表明,系统的暂态分量是两个指数函数之和。当  $t \rightarrow \infty$  时,此和项趋于 1。因此,过阻尼二阶系统的单位阶跃响应是单调上升的,响应曲线如图 3-14 所示。

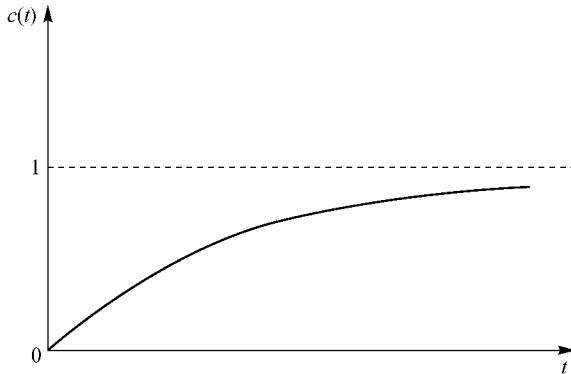


图 3-14  $\zeta > 1$  时的单位阶跃响应

由于  $\zeta > 1$ , 尤其是在  $\zeta \gg 1$  的情况下,  $\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \gg \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}$ , 故式(3-10)等号右侧的指数项随着时间的增长, 后一项远比前一项衰减得快。因此, 后一项指数函数只在  $t > 0$  后的前期对响应有影响, 为此在求取调节时间  $t_s$  时可忽略不计。此时有

$$\Phi(s) \approx \frac{-s_1}{s - s_1} = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n / \sqrt{\zeta^2 - 1}}{s + \zeta\omega_n - \omega_n / \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

系统降为一阶系统, 即

$$C(s) = \frac{\zeta\omega_n - \omega_n / \sqrt{\zeta^2 - 1}}{s(s + \zeta\omega_n - \omega_n / \sqrt{\zeta^2 - 1})} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \zeta\omega_n - \omega_n / \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

于是

$$c(t) = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (t \geq 0)$$

因此过阻尼情况下二阶系统单位阶跃响应的调节时间为

$$t_s \approx \frac{4}{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n} \quad (\text{取 } \Delta = \pm 2\%) \quad (3-11)$$

在工程上, 若  $\zeta \geq 1.5$ , 按照式(3-11)即可得到满意的准确度。

通过本节分析, 可以得到以下结论:

- (1) 根据  $\zeta$  值的大小可以间接判断一个二阶系统的暂态特性。
  - ①  $\zeta > 1$ , 单位阶跃响应为单调曲线, 没有超调和振荡, 但调节时间较长, 系统反应迟缓。
  - ②  $\zeta = 1$ , 响应为单调曲线, 调节时间最短。
  - ③  $\zeta = 0$ , 输出为等幅振荡, 系统不能稳定工作。

一般期望二阶系统工作在欠阻尼  $0 < \zeta < 1$  状态下, 但  $\zeta$  不能过小, 否则超调量  $M_p\%$  将增大, 振荡次数  $N$  增多, 调节时间  $t_s$  变长。为了限制超调量,  $\zeta$  应在  $0.4 \sim 0.8$  之间, 这时超调量将在  $25\% \sim 1.5\%$  之间。因为  $M_p$  只和  $\zeta$  有关, 常根据允许的  $M_p\%$  来选择  $\zeta$ 。

(2) 以闭环极点在  $S$  平面上的位置可以大致估计  $t_p$  和  $t_s$  的大小。

- ①  $t_p$  与闭环极点到实轴的距离  $\omega_n / \sqrt{1 - \zeta^2}$  成反比。
- ②  $t_s$  可近似地认为与闭环极点到虚轴的距离  $\zeta\omega_n$  成反比。

③在  $\zeta$  一定时,可通过改变  $\omega_n$  来改变  $t_s$ ,  $\omega_n$  越大,  $t_s$  越小。

**例 3-1** 已知单位反馈系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

试确定系统的  $\zeta$  和  $\omega_n$ , 并求最大超调量  $M_p\%$  和调节时间  $t_s$ 。

**解** 因为  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$

可得

$$\omega_n = \sqrt{4} \text{ rad/s} = 2 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = \frac{2}{2\omega_n} = \frac{2}{2 \times 2} = 0.5$$

$$M_p\% = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \times 100\% = \exp\left(-\frac{0.5\pi}{\sqrt{1-0.5^2}}\right) \times 100\% = 16.3\%$$

$$t_s(5\%) = \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{0.5 \times 2} \text{ s} = 3 \text{ s}$$

**例 3-2** 控制系统结构图如图 3-15 所示:

(1) 当开环增益  $K=10$  时, 求系统的暂态性能指标。

(2) 确定使系统阻尼比  $\zeta=0.707$  的  $K$  值。

**解** (1) 当  $K=10$  时, 系统闭环传递函数

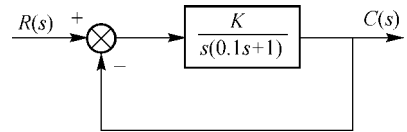


图 3-15 控制系统结构图

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(0.1s+1)}}{1 + \frac{K}{s(0.1s+1)}} = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$$

与传递函数的标准式相比, 可得

$$\omega_n = \sqrt{100} \text{ rad/s} = 10 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = \frac{10}{2\omega_n} = \frac{10}{2 \times 10} = 0.5$$

$$t_p = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} = \frac{\pi}{\sqrt{1-0.5^2} \times 10} \text{ s} = 0.363 \text{ s}$$

$$M_p\% = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \times 100\% = \exp\left(-\frac{0.5\pi}{\sqrt{1-0.5^2}}\right) \times 100\% = 16.3\%$$

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = \frac{3.5}{0.5 \times 10} \text{ s} = 0.7 \text{ s}$$

(2) 由  $\Phi(s) = \frac{10K}{s^2 + 10s + 10K}$ , 得

$$\left. \begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{10K} \\ \zeta &= \frac{10}{2\omega_n} \end{aligned} \right\}$$

令  $\zeta=0.707$ , 得

$$K = \frac{100 \times 2}{4 \times 10} = 5$$

### 3.3.3 二阶系统的单位脉冲响应

对于单位脉冲输入  $r(t) = \delta(t)$ ,  $R(s) = 1$ , 由式(3-3)得到系统的输出为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

对于同一系统来说,其单位脉冲响应是该系统单位阶跃响应的导数。于是,通过对单位阶跃响应求导可得到单位脉冲响应如下:

- (1) 当  $\zeta = 0$  时,  $c(t) = \omega_n \sin \omega_n t (t \geq 0)$ 。
- (2) 当  $0 < \zeta < 1$  时,  $c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n t \sqrt{1-\zeta^2} (t \geq 0)$ 。
- (3) 当  $\zeta = 1$  时,  $c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} (t \geq 0)$ 。
- (4) 当  $\zeta > 1$  时,  $c(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} (t \geq 0)$ 。

单位脉冲响应曲线如图 3-16 所示。对于单位脉冲响应:

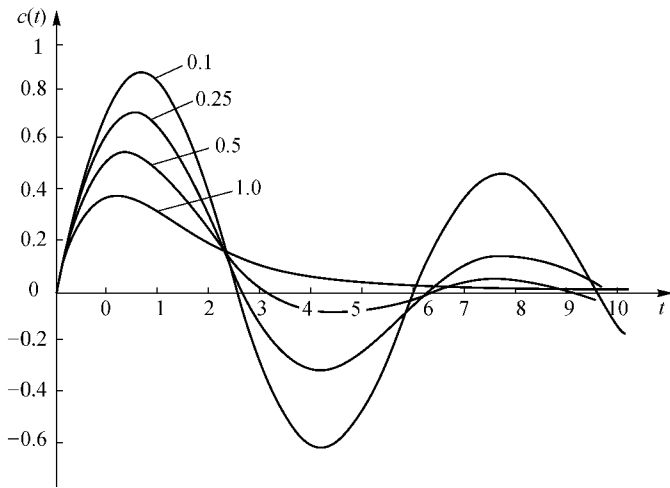


图 3-16 二阶系统单位脉冲响应曲线

(1) 临界阻尼 ( $\zeta = 1$ ) 和过阻尼 ( $\zeta > 1$ ) 时, 单位脉冲响应总是大于零, 并在  $t \rightarrow \infty$  时衰减为零, 是单调变化的。

(2) 欠阻尼 ( $0 < \zeta < 1$ ) 时, 响应曲线围绕零值衰减振荡。并且, 由于单位脉冲响应是单位阶跃响应的导数, 因此单位脉冲响应曲线与时间轴第一次的交点所对应时间必是峰值时间  $t_p$ , 而从  $t = 0$  到  $t = t_p$  这一段曲线与时间轴所包围的面积等于  $1 + M_p\%$ , 如图 3-17 所示。单位脉冲响应曲线与时间轴所包围面积的总和 (或代数和) 为 1。

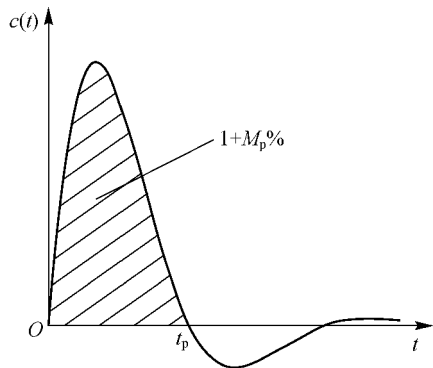


图 3-17 由脉冲响应求  $M_p\%$

### 3.3.4 零点对二阶系统暂态性能的影响

设系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(\tau s + 1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2(s + \frac{1}{\tau})}{\frac{1}{\tau}(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

式中,  $\tau$  为时间常数。

令  $\frac{1}{\tau} = z$ , 则

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(s + z)}{z(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

将系统的结构图等效成如图 3-18 所示的结构。

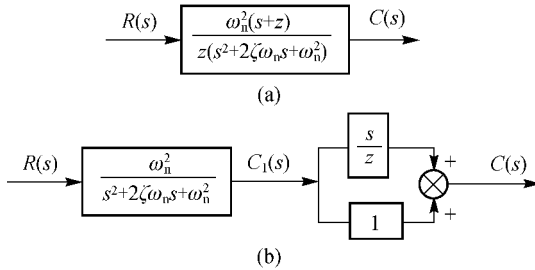


图 3-18 二阶系统等效结构图

由此可得

$$\left. \begin{aligned} C_1(s) &= \frac{\omega_n^2 R(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (0 < \zeta < 1) \\ C(s) &= C_1(s) + \frac{s}{z} C_1(s) \\ R(s) &= \frac{1}{s} \end{aligned} \right\}$$

在初始条件为零时, 取拉氏反变换为

$$\begin{aligned} c_1(t) &= L^{-1} \left[ \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right] \\ c(t) &= L^{-1}[C_1(s)] + L^{-1} \left[ \frac{s}{z} C_1(s) \right] = c_1(t) + \frac{1}{z} \frac{dc_1(t)}{dt} \\ c_1(t) &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \theta) \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{1}{z} \left[ (z - \zeta\omega_n) \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \theta) + \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \theta) \right] \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{l}{z} \left[ \frac{z - \zeta\omega_n}{l} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \theta) + \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{l} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \theta) \right] \end{aligned}$$

式中,  $l$  为极点与零点间的距离, 可由系统闭环传递函数的零点和极点在复平面上所在的位置确定。

零、极点在  $S$  平面上的分布如图 3-19 所示。一般用符号“ $\circ$ ”表示系统零点。

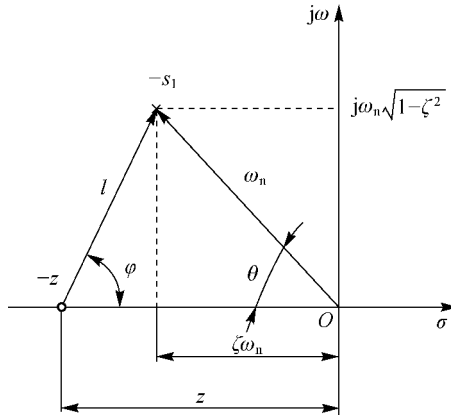


图 3-19 二阶系统零、极点分布图

由图 3-19 可知

$$l = |z - s_1| = \sqrt{(z - \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{|z - \zeta\omega_n|}{l} &= \cos \varphi \\ \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{l} &= \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

所以

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{l}{z} [\sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \theta) \cos \varphi + \cos(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \theta) \sin \varphi]$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{l}{z} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \varphi + \theta)$$

式中,  $\theta = \arctan \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$ ;  $\varphi = \arctan \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{z - \zeta\omega_n}$ ;  $\frac{l}{z} = \frac{\sqrt{(z - \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})^2}}{z^2} = \frac{\sqrt{z^2 - 2z\zeta\omega_n + \omega_n^2}}{z^2}$ 。

令  $r = \frac{\zeta\omega_n}{z}$ ,  $r$  为闭环传递函数的复数极点的实部与零点的实部之比, 则得

$$\frac{l}{z} = \frac{1}{\zeta} \sqrt{\zeta^2 - 2r\zeta^2 + r^2}$$

所以

$$c(t) = 1 - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 2r\zeta^2 + r^2}}{\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \varphi + \theta) \quad (t \geq 0)$$

因此可以得出: 由于闭环传递函数零点的存在, 使振荡性增强。

### 3.4 控制系统的稳定性分析

一个线性系统正常工作的首要条件,就是它必须是稳定的。一般可以用代数的方法判断线性系统的稳定性,本节主要分析系统参数变化对稳定性的影响。

如果系统受扰动后,偏离了原来的工作状态,而当扰动取消后,系统又能逐渐恢复到原来的工作状态,则称系统是稳定的。可见,稳定性是指系统去掉外界作用后,自身具有的一种恢复平衡状态的能力,是系统的一种固有特性,这种特性取决于系统的结构和参数,而与初始条件及外界作用无关。

由于稳定性所研究的是外界作用取消后的情况,因此可用线性系统在初始条件为零时的单位脉冲响应来研究。如果随着时间的推移,脉冲响应函数是收敛的,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$$

则系统是稳定的。

设线性系统闭环传递函数为  $\Phi(s)$ , 输入单位脉冲信号  $R(s) = 1$  时, 则响应为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - s_i}$$

式中,  $s_i$  为闭环极点;  $A_i$  为待定系数。

进行拉氏反变换, 得

$$c(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t}$$

因此, 如果系统稳定, 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t} = 0 \quad (3-12)$$

考虑到系数  $A_i$  的任意性, 式(3-12)中的每项都应该趋于零, 故有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_i e^{s_i t} = 0 \quad (3-13)$$

可见, 要使式(3-13)成立, 必须使系统闭环特征方程的根全部都具有负实部。因此, 自动控制系统稳定的充要条件是: 系统闭环特征方程的根全部都具有负实部, 或者说, 闭环传递函数的极点全部都在  $S$  的左半平面。

显然, 如果系统特征方程有一个根为零, 则系统输出为常数; 如果有一对共轭虚根, 则系统输出为等幅振荡。这两种情况在实际工程中都是不稳定的。

#### 3.4.1 劳斯判据

线性定常系统稳定的条件是其闭环特征根具有负实部, 因此, 判别稳定性就是要求解系统特征方程的全部根, 并判断这些根是否都具有负实部。这对一阶和二阶的系统容易操作, 但实际系统中特征方程的阶次往往较高。当阶次高于四阶时, 根的求解较为困难。于是, 人们期望寻求一种不要求解特征根, 就能判断系统稳定与否的间接方法。劳斯基于特征方程的根与系数的关系, 提出了判别系统稳定性的充分必要条件, 即劳斯判据。该判据和下面将要介绍的赫尔维茨判据都称为稳定性的代数判据。

系统特征方程的标准形式为



$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

这就是稳定的必要条件。若特征方程所有系数均为正,则系统可能稳定,可以用劳斯判据判断系统的稳定性。

首先,根据特征方程作出如下的劳斯表,然后再根据劳斯表中的相关数据去判断系统的稳定性。

列劳斯表

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	$\dots$
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	$\dots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$\dots$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s^2$	$e_1$	$e_2$			
$s^1$	$f_1$				
$s^0$	$g_1$				

可见,劳斯表中第一、二行由间隔取特征方程系数形成,从第三行开始,各元素按以下规律推算

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}, \dots$$

系数  $b$  的计算一直进行到其余的  $b$  值全部等于零时为止;系数  $c, e, f$  的计算,可分别用前两行系数交叉相乘的方法求得

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}, \dots$$

这一计算过程一直进行到第  $n$  行为止。为了简化数值运算,可以用一个正整数去除或乘某一行的各项,这样并不改变稳定性的结论。

劳斯判据的内容如下:线性系统稳定的充分必要条件是劳斯表中第一列各元素严格为正。反之,如果第一列出现小于或等于零的元素,则系统不稳定,且第一列各元素符号的改变次数代表特征方程正实部根的数目。

**例 3-3** 某三阶系统特征方程为

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

试确定系统稳定的充分必要条件。

**解** 特征方程的各项系数为正,满足稳定的必要条件。于是,列出劳斯表如下

$s^3$	$a_0$	$a_2$
$s^2$	$a_1$	$a_3$
$s$	$\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$0$
$s^0$	$a_3$	

根据劳斯表,由劳斯判据知,系统稳定的充分必要条件是

$$\left. \begin{aligned} a_i > 0 \quad (i=0, 1, 2, 3) \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \end{aligned} \right\}$$

在应用劳斯判据判别系统的稳定性时,有两种特殊情况需要处理,以便使劳斯表的计算能够进行下去。

(1) 第一列中有一元素为零, 而该行其他元素不全为零或没有其他元素, 则在计算下一行时, 元素必趋于无穷大, 于是劳斯表无法计算下去。为克服这一困难, 以一个很小的正数  $\epsilon$  代替零元素, 计算劳斯表的其余元素, 然后通过令  $\epsilon \rightarrow 0$  来研究劳斯表第一列元素的符号。

(2) 劳斯表中一行元素均为零。这个条件表明系统特征方程的根可能出现下列三种情形之一: ①特征方程有一对实根, 大小相等, 符号相反; ②有一对虚根; ③有对称于  $S$  平面原点的共轭复根。在这种情况下, 可利用零行的上一行元素构成一个辅助多项式。取该多项式一阶导数的系数组成劳斯表的零行, 这时的劳斯表能够继续计算下去。 $S$  平面上这些大小相等、位置关于原点对称的根, 可以通过求解辅助方程得到, 而且根的数目总是偶数, 辅助多项式的阶次总是偶数。

下面举例说明遇到这两种特殊情况的处理方法。

**例 3-4** 某系统的特征方程为

$$s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 1 = 0$$

试判断系统的稳定性。

**解** 特征方程的各项系数为正, 满足稳定的必要条件。于是, 列出劳斯表如下

$s^4$	1	1	1
$s^3$	2	2	
$s^2$	$\epsilon$	1	
$s$	$\frac{2\epsilon-2}{\epsilon}$	0	
$s^0$	1		

根据劳斯表, 当  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\frac{2\epsilon-2}{\epsilon} \rightarrow -\infty$ , 劳斯表第一列系数数值符号改变了两次, 则有两个根位于右半平面, 系统不稳定。

**例 3-5** 某系统特征方程为  $s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$ , 试判断系统的稳定性。

**解** 特征方程的各项系数为正, 满足稳定的必要条件。于是, 列出劳斯表如下

$s^6$	1	8	20	16
$s^5$	2	12	16	0
$s^4$	1	6	8	
$s^3$	0	0	0	
$s^3$	4	12	0	
$s^2$	3	8		
$s$	$\frac{4}{3}$	0		
$s^0$	8			

辅助方程及其一阶导数为

$$A(s) = s^4 + 6s^2 + 8, A'(s) = 4s^3 + 12s$$

第一列没有改变符号, 右半平面没有根。所以, 有一对共轭虚根。在实际中, 该系统是不稳定的。这些虚根可由辅助方程求出。

辅助方程为

$$s^4 + 6s^2 + 8 = s^4 + 2s^2 + 4s^2 + 8 = (s^2 + 4)(s^2 + 2) = 0$$

求解得特征方程根为

$$-s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}, -s_{3,4} = \pm j2$$

劳斯判据还可用于确定个别参数变化对系统稳定性的影响,从而给出使系统稳定的参数取值范围。

**例 3-6** 试用劳斯判据确定如图 3-20 所示的使系统稳定的开环增益  $K$  的取值范围。

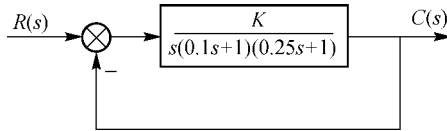


图 3-20 控制系统结构图

**解** 由图 3-20 知,系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{40K}{s(s+10)(s+4) + 40K} = \frac{40K}{s^3 + 14s^2 + 40s + 40K}$$

系统特征方程式为

$$s^3 + 14s^2 + 40s + 40K = 0$$

列劳斯表为

$s^3$	1	40
$s^2$	14	40K
$s^1$	$\frac{560 - 40K}{14}$	0
$s^0$	40K	

为使系统稳定,首先,特征方程的各项系数必须大于零,所以  $40K > 0$ ,即  $K > 0$ ;其次,由劳斯判据知,劳斯表中第一列各元素要严格为正,所以  $560 - 40K > 0$ ,即  $K < 14$ 。综合起来, $K$  的取值范围为  $0 < K < 14$ 。

劳斯判据用于确定使系统稳定的参数取值范围,但这些不能表明特征根距虚轴的远近,为了保证系统稳定且具有良好的动态特性,期望特征根在  $S$  左半面与虚轴有一定距离,此距离通常称为稳定裕量。

**例 3-7** 例 3-6 中若要求闭环系统极点全部位于  $s = -1$  垂线之左, $K$  应取何值?

**解** 令  $s = z - 1$ ,代入原特征方程,得

$$(z-1)^3 + 14(z-1)^2 + 40(z-1) + 40K = 0$$

$$z^3 + 11z^2 + 15z + (40K - 27) = 0$$

列劳斯表为

$z^3$	1	15
$z^2$	11	$40K - 27$
$z^1$	$\frac{165 - (40K - 27)}{11}$	0
$z^0$	$40K - 27$	

为使系统稳定,首先,特征方程的各项系数必须大于零,所以  $40K - 27 > 0$ ,即  $K > 0.675$ ;其次,由劳斯判据知,劳斯表中第一列各元素要严格为正,所以  $165 - (40K - 27) > 0$ ,即  $K < 4.8$ 。综合起来, $K$  的取值范围为  $0.675 < K < 4.8$ 。

### 3.4.2 赫尔维茨稳定判据

分析六阶以下系统的稳定性时,还可以应用赫尔维茨判据。

设系统特征方程为

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (a_0 > 0)$$

构造如下的赫尔维茨行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

则系统稳定的充分必要条件为:特征方程的全部系数都为正,即  $a_1 > 0, a_2 > 0, \cdots, a_n > 0$ , 且赫尔维茨行列式的各级主子行列式都大于零。即系统要稳定,下列式子必须成立

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} > 0$$

由于高阶行列式计算较复杂,因此,赫尔维茨判据一般用于  $n \leq 5$  的系统。

**例 3-8** 系统特征方程为

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$$

试用赫尔维茨判据判别系统是否稳定。

**解** 首先,特征方程的全部系数都为正。

其次

$$\Delta_1 = a_1 = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7 < 0$$

系统不稳定,无须再计算  $\Delta_3$  和  $\Delta_4$ 。

**例 3-9** 系统的特征方程为

$$s^4 + 2s^3 + 8s^2 + 4s + 2 = 0$$

试用赫尔维茨判据判别系统是否稳定。

**解** 首先,特征方程的全部系数都为正。

其次

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 12 > 0 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 40 > 0 \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 80 > 0 \end{aligned}$$

因此,系统稳定。

### 3.5 控制系统的稳态误差分析

系统的时间响应包含暂态响应和稳态响应两部分。其中,暂态分量反映了系统的动态品质,由暂态响应性能指标描述;稳态分量反映了系统稳态精确性,由稳态误差性能指标描述。

一般来说,控制系统的稳态误差是不可避免的,通常可能由如下原因引起:

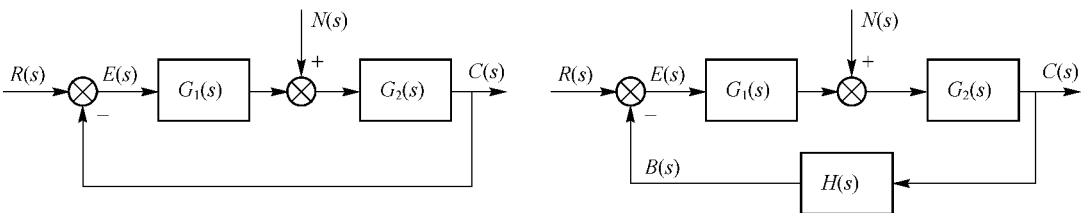
(1)由于输入量(控制量)、扰动量、输入函数(阶跃、斜坡或加速度)的形式不同,控制系统的输出不可能在任何情况下都与输入量一致或相当,也不可能在任何形式的扰动作用下都准确地恢复到原平衡位置。

(2)控制系统中不可避免地存在摩擦、不灵敏区、零位输出等非线性因素,都会造成附加的稳态误差。

一个符合工程要求的系统,其稳态误差必须控制在允许的范围之内,如工业加热炉的炉温误差若超过其允许的限度,就会影响加工产品的质量。又如造纸厂中卷绕纸张的恒张力控制系统,要求纸张在卷绕过程中张力的误差保持在某一允许的范围之内。若张力过小,就会出现松滚现象;而张力过大,又会促使纸张的断裂。因此,在控制系统设计中,稳态误差是一项重要的技术指标。

#### 3.5.1 稳态误差的定义

设控制系统如图 3-21 所示。其中  $R(s)$  为给定信号,  $N(s)$  为扰动信号。



(a)单位反馈

(b)非单位反馈

图 3-21 控制系统框图

系统的误差一般定义为被控量期望值  $c_0(t)$  和实际值  $c(t)$  之差,即

$$e(t) = c_0(t) - c(t)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时,系统误差称为稳态误差,用  $e_{ss}$  表示,即

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

也就是说,稳态误差是在稳态条件下,加入输入信号后经过足够长的时间,其暂态响应已经衰减到微不足道时,稳态响应的期望值与实际值之差。因此,只有对于稳定系统,讨论稳态误差才有意义。

如图 3-21(a)所示的单位反馈系统,其给定信号  $r(t)$  即为要求值,  $c_0(t) = r(t)$ , 所以

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)]$$

如图 3-21(b)所示的非单位反馈系统,给定量  $R(s)$  与系统的反馈量  $B(s)$  之差为

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

而  $B(s) = C(s)H(s)$ , 因此

$$C(s) = \frac{R(s) - E(s)}{H(s)} \quad (3-14)$$

同时,由图 3-21(b)可写出关系式

$$[E(s)G_1(s) + N(s)]G_2(s) = C(s)$$

将式(3-14)代入上式得

$$[E(s)G_1(s) + N(s)]G_2(s)H(s) = R(s) - E(s)$$

因此误差信号为

$$E(s) = \frac{R(s) - G_2(s)H(s)N(s)}{1 + G(s)}$$

式中,  $G(s) = G_1(s)G_2(s)H(s)$ 。

对  $E(s)$  取拉氏反变换,得误差信号  $e(t)$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时得到稳态误差  $e_{ss}$ , 即

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

如果函数  $sE(s)$  在  $S$  右半平面及虚轴上可解析,则利用终值定理有

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s) - G_2(s)H(s)N(s)}{1 + G(s)} \quad (3-15)$$

式(3-15)是在给定信号和扰动信号同时作用于系统时所产生的稳态误差计算公式。

### 3.5.2 三种典型输入信号下的稳态误差

在随动系统中,给定输入信号是变化的,要求系统响应以一定的精度跟随给定输入变化,这时的稳态误差反映了随动系统的跟踪能力。

令  $N(s) = 0$ , 式(3-15)则变为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)} \quad (3-16)$$

式(3-16)是在给定输入下所产生的稳态误差计算公式。它表明这时稳态误差与系统结构、参数及输入信号有关。

一般情况下,系统开环传递函数可写为

$$G(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^{\nu} \prod_{i=1}^{n-\nu} (T_i s + 1)}$$

式中,  $K$  为开环增益;  $\nu$  为开环系统串联的积分环节个数。

一般根据系统串联积分环节的个数划分型别, 当  $\nu=0$  时, 称为 0 型系统; 当  $\nu=1$  时, 称为 I 型系统; 当  $\nu=2$  时, 称为 II 型系统。

### 1. 单位阶跃输入时的稳态误差

对于单位阶跃输入信号  $r(t)=1(t)$ , 有  $R(s)=\frac{1}{s}$ , 代入式(3-16)得

$$e_{\text{ssp}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1+G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

式中,  $K_p$  为静态位置误差系数,  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$ 。

对于 0 型系统,  $K_p = K$ ,  $e_{\text{ssp}} = \frac{1}{1+K}$ ; 对于 I 型系统和 II 型系统,  $K_p = \infty$ ,  $e_{\text{ssp}} = 0$ 。

可见, 0 型系统不含积分环节, 其阶跃输入下的稳态误差为一个定值, 且与  $K$  有关, 因此常称为有差系统。为了减小稳态误差, 可在稳定条件允许的前提下, 增大  $K$  值; I 型和 II 型系统在阶跃输入下均为无差系统。因此, 若要消除 0 型系统的稳态误差, 则必须增加积分环节的个数, 提高系统型别, 使其为 I 型或 II 型系统。

### 2. 单位斜坡输入时的稳态误差

对于单位斜坡输入信号,  $r(t)=t$ ,  $R(s)=\frac{1}{s^2}$ , 代入式(3-16)得

$$e_{\text{ssv}} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{K_v}$$

式中,  $K_v$  为静态速度误差系数,  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$ 。

对于 0 型系统,  $K_v = 0$ ,  $e_{\text{ssv}} = \infty$ ; 对于 I 型系统,  $K_v = K$ ,  $e_{\text{ssv}} = \frac{1}{K}$ ; 对于 II 型系统,  $K_v = \infty$ ,  $e_{\text{ssv}} = 0$ 。

可见, 0 型系统不能跟踪斜坡输入信号; I 型系统可以跟踪斜坡输入信号, 但有稳态误差, 且与  $K$  有关, 若要减小稳态误差, 必须增大  $K$  值; II 型及 II 型以上的系统, 在斜坡输入信号下的稳态误差为零。

### 3. 单位加速度输入时的稳态误差

对于单位加速度输入信号,  $r(t)=\frac{1}{2}t^2$ ,  $R(s)=\frac{1}{s^3}$ , 代入式(3-16)得

$$e_{\text{ssa}} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} = \frac{1}{K_a}$$

式中,  $K_a$  为静态加速度误差系数,  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$ 。

对于 0 型系统,  $K_a = 0$ ,  $e_{\text{ssa}} = \infty$ ; 对于 I 型系统,  $K_a = 0$ ,  $e_{\text{ssa}} = \infty$ ; 对于 II 型系统,  $K_a = K$ ,  $e_{\text{ssa}} = \frac{1}{K}$ 。

显然, 0 型和 I 型系统都不能跟踪加速度输入; II 型系统可以跟踪加速度输入, 但存在一定的误差; 只有 III 型或 III 型以上的系统, 才能准确地跟踪加速度输入。

不同类型的系统在不同信号作用下的稳态误差见表 3-2。另外值得注意的是, 如果输入信号为上述三种信号的叠加, 则利用线性系统的叠加原理, 其稳态误差也相应叠加。

表 3-2 不同输入信号下各种类型系统的稳态误差

输入信号	稳态误差		
	0 型系统	I 型系统	II 型系统
单位阶跃	$\frac{1}{1+K_p}$	0	0
单位斜坡	$\infty$	$\frac{1}{K_v}$	0
单位加速度	$\infty$	$\infty$	$\frac{1}{K_a}$

从以上分析可见,提高系统的开环增益  $K$  可减小系统的稳态误差,提高系统精度。增加开环系统串联的积分环节个数可以消除稳态误差,使系统最终成为无差系统。

**例 3-10** 已知单位反馈控制系统的开环传递函数如下。试求其静态位置、速度和加速度误差系数,并求当输入信号分别为  $r(t)=1(t)$ 、 $r(t)=4t$ 、 $r(t)=t^2$ 、 $r(t)=1+4t+t^2$  时系统的稳态误差。

$$(1)G(s)=\frac{10}{s(0.1s+1)(0.5s+1)}$$

$$(2)G(s)=\frac{10}{s(s+1)(0.2s+1)}$$

**解** (1)首先判断系统的稳定性。系统的闭环特征方程为

$$0.05s^3+0.6s^2+s+10=0$$

由劳斯判据可知系统是稳定的。系统为 I 型,开环放大系数为  $K=10$ 。可以求得静态误差系数为

$$K_p=\lim_{s \rightarrow 0} G(s)=\lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s}=\infty$$

$$K_v=\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)=\lim_{s \rightarrow 0} K=10$$

$$K_a=\lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)=\lim_{s \rightarrow 0} sK=0$$

所以给定输入信号下的稳态误差计算如下:

$$\textcircled{1} \text{ 当 } r(t)=1(t) \text{ 时, } e_{\text{ssp}}=\frac{1}{1+K_p}=0。$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } r(t)=4t \text{ 时, } e_{\text{ssv}}=\frac{4}{K_v}=0.4。$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } r(t)=t^2 \text{ 时, } e_{\text{ssa}}=\frac{2}{K_a}=\infty。$$

$$\textcircled{4} \text{ 当 } r(t)=1+4t+t^2 \text{ 时, } e_{\text{ssd}}=e_{\text{ssp}}+e_{\text{ssv}}+e_{\text{ssa}}=\infty。$$

(2)判断系统的稳定性。系统的闭环特征方程为

$$0.2s^3+1.2s^2+s+10=0$$

由劳斯判据可知系统是不稳定的,因此不能定义静态误差系数,也不用求解稳态误差。

### 3.5.3 扰动作用下的稳态误差

系统在扰动信号作用下将产生稳态误差,其值大小反映了系统抗干扰的能力。

设  $R(s)=0$ , 则式(3-15)变为

$$e_{\text{ssn}}=\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-G_2(s)H(s)}{1+G(s)} N(s) \quad (3-17)$$



式(3-17)是扰动信号引起的稳态误差基本计算公式。当  $|G(s)| \gg 1$  时,  $1+G(s) \approx G(s)$   $=G_1(s)G_2(s)H(s)$ , 则式(3-17)近似为

$$e_{\text{ssn}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-sN(s)}{G_1(s)}$$

此时,系统在扰动信号作用下产生的稳态误差,主要取决于扰动作用点以前的前向通道环节  $G_1(s)$ ,而与扰动作用点之后的环节  $G_2(s)$  基本无关。

**例 3-11** 设控制系统如图 3-22 所示,其中扰动信号  $n(t) = 1(t)$ 。试问是否可以选择某一合适的  $K_1$  值,使系统在扰动作用下的稳态误差值为  $e_{\text{ssn}} = -0.099$ ?

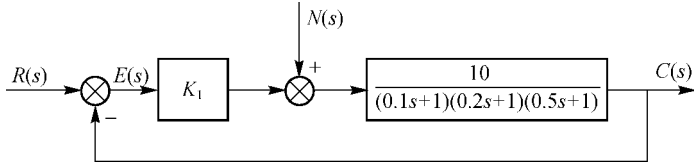


图 3-22 控制系统结构图

**解** 由控制系统结构图,得

$$[N(s) - K_1 E(s)] \frac{10}{(0.1s+1)(0.2s+1)(0.5s+1)} = E(s)$$

系统对扰动的误差传递函数为

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{10}{(0.1s+1)(0.2s+1)(0.5s+1) + 10K_1}$$

利用终值定理可得

$$e_{\text{ssn}} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{10}{(0.1s+1)(0.2s+1)(0.5s+1) + 10K_1} \frac{1}{s} = - \frac{10}{1+10K_1}$$

由此可解得

$$K_1 = - \frac{10 + e_{\text{ssn}}}{10e_{\text{ssn}}}$$

代入所要求的性能指标  $e_{\text{ssn}} = -0.099$ , 得

$$K_1 = 10$$

由于闭环特征方程为

$$(s+10)(s+5)(s+2) + 1000K_1 = 0$$

若取  $K_1 = 10$ , 有

$$s^3 + 17s^2 + 80s + 10100 = 0$$

由劳斯判据可以计算得到此时该闭环系统不稳定。因此,不存在适当的  $K_1$  可使  $e_{\text{ssn}} = -0.099$ 。

实际上,由劳斯判据可知,使系统稳定的  $K_1$  的取值范围为  $0 < K_1 < 1.26$ 。

### 3.5.4 动态误差系数

前面讨论的稳态误差,仅限于输入信号为阶跃函数、速度函数和加速度函数的情况,且用稳态误差系数求出的稳态误差值只有零、常值和无穷大三种。如果输入信号为其他形式的函数时,如正弦函数,静态误差系数法便无法应用。此外,系统的稳态误差一般是时间的函数,此时用静态误差系数法则不能表示稳态误差随时间的变化规律。为此,引入动态误差系数的概念。利用动态误差系数法,可以研究输入信号为任意时间函数时系统的稳态误差,

因此动态误差系数又称为广义误差系数。

误差传递函数为

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

将  $\Phi_e(s)$  在  $s=0$  的邻域内展开成泰勒级数, 即

$$\Phi_e(s) = \Phi_e(0) + \Phi_e'(0)s + \frac{1}{2!}\Phi_e''(0)s^2 + \cdots + \frac{1}{i!}\Phi_e^{(i)}(0)s^i + \cdots$$

则误差信号可表示为

$$E(s) = \Phi_e(0)R(s) + \Phi_e'(0)sR(s) + \frac{1}{2!}\Phi_e''(0)s^2R(s) + \cdots + \frac{1}{i!}\Phi_e^{(i)}(0)s^iR(s) + \cdots \quad (3-18)$$

式(3-18)称为误差级数, 它是以  $s=0$  邻域为收敛域的无穷级数, 相当于在时域内  $t \rightarrow \infty$  时成立。因此, 在零初始条件下对式(3-18)进行拉氏反变换, 就得到稳态误差的表达式

$$e_{ss}(t) = \Phi_e(0)r(t) + \Phi_e'(0)r'(t) + \frac{1}{2!}\Phi_e''(0)r''(t) + \cdots + \frac{1}{i!}\Phi_e^{(i)}(0)r^{(i)}(t) + \cdots$$

令  $C_i = \frac{1}{i!}\Phi_e^{(i)}(0)$ , 其中,  $i=0, 1, 2, \cdots$  则稳态误差的表达式可以写成

$$e_{ss}(t) = C_0r(t) + C_1r'(t) + C_2r''(t) + \cdots + C_i r^{(i)}(t) + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i r^{(i)}(t) \quad (3-19)$$

式中,  $C_0, C_1, C_2, \cdots$  为动态误差系数。

通常称  $C_0$  为动态位置误差系数,  $C_1$  为动态速度误差系数,  $C_2$  为动态加速度误差系数。

由式(3-19)可见, 稳态误差  $e_{ss}(t)$  与动态误差系数、输入信号及其各阶导数有关。由于输入信号是已知的, 关键是求动态误差系数。但当系统阶次较高时, 用式(3-19)确定动态误差系数不太方便, 因此通常采用如下简便方法。

首先, 将系统的开环传递函数按  $s$  有理分式的形式写为

$$G(s)H(s) = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} = \frac{M(s)}{N(s)}$$

然后, 写出有理分式形式的误差传递函数(按  $s$  的升幂次序排列), 即

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)} = \frac{N(s)}{N(s)+M(s)}$$

用上式的分母多项式去除它的分子多项式, 得到一个  $s$  的升幂级数

$$\Phi_e(s) = C_0 + C_1s + C_2s^2 + C_3s^3 + \cdots$$

于是有

$$E(s) = \Phi_e(s)R(s) = (C_0 + C_1s + C_2s^2 + \cdots)R(s)$$

所以

$$e_{ss}(t) = C_0r(t) + C_1r'(t) + C_2r''(t) + \cdots$$

**例 3-12** 设某单位反馈系统前向通道的传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

试求系统的动态误差系数。当系统的输入量为  $r(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$  时, 求系统的稳态误差。

**解** 此系统的误差传递函数为

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{s+s^2}{10+s+s^2} = 0.1s + 0.09s^2 - 0.019s^3 + \cdots$$

$$E(s) = 0.1sR(s) + 0.09s^2R(s) - 0.019s^3R(s) + \cdots$$

动态误差系数为

$$C_0=0, C_1=0.1, C_2=0.09, C_3=-0.019\dots$$

稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [0.1r'_i(t) + 0.09r''_i(t) - 0.019r'''_i(t)]$$

因为

$$\begin{aligned} r(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \\ r'_i(t) &= a_1 + 2a_2 t, r''_i(t) = 2a_2, r'''_i(t) = 0 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} [0.1(a_1 + 2a_2 t) + 0.09(2a_2)] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (0.1a_1 + 0.18a_2 + 0.2a_2 t) \end{aligned}$$

## 3.6 应用 MATLAB 进行时域响应与稳定性分析

运用相关的 MATLAB 函数可以对系统进行阶跃响应、脉冲响应、零输入响应、斜坡响应和任意输入响应分析。下面介绍相关的函数及其在时域响应分析中的应用。

### 3.6.1 单位阶跃响应

当输入为单位阶跃信号时,系统的输出为单位阶跃响应,在 MATLAB 中可用 step() 函数实现。其调用格式为

$$[y, x, t] = \text{step}(\text{num}, \text{den}, t); \text{或 } \text{step}(\text{num}, \text{den});$$

其中,num/den 为系数传递函数  $G(s)$ ;  $t$  为仿真时间;  $y$  为时间  $t$  的输出响应;  $x$  为时间  $t$  的状态响应。

**例 3-13** 设系统传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$$

求取其单位阶跃响应。

**解** MATLAB 命令为

```
num=[1];
den=[1,0.5,1];
t=[0:0.1:10];
[y,x,t]=step(num,den,t);
plot(t,y);
grid;
xlabel('Time');
ylabel('y');
```

其响应曲线如图 3-23 所示。

### 3.6.2 单位脉冲响应

当输入信号为单位脉冲函数  $\delta(t)$  时,系统输出为单位脉冲响应。MATLAB 中求取脉冲响应的函数为 impulse(),其调用格式为

$[y, x, t] = \text{impz}(\text{num}, \text{den}, t);$  或  $\text{impz}(\text{num}, \text{den});$

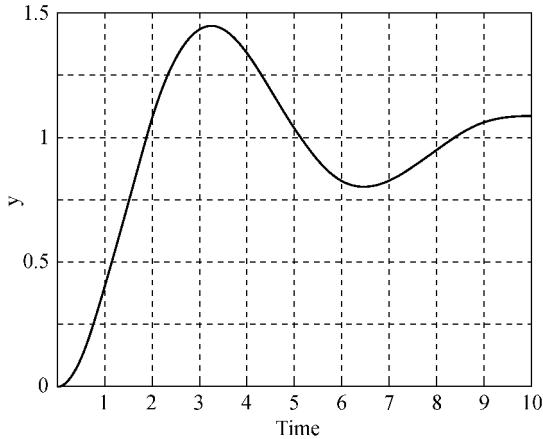


图 3-23 例 3-13 的单位阶跃响应曲线

**例 3-14** 试求下列系统的单位脉冲响应

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1}$$

**解** MATLAB 命令为

```
t=[0:0.1:40];
```

```
num=[1];
```

```
den=[1,0.3,1];
```

```
impz(num,den,t);
```

```
grid;
```

```
title('Unit-impulse Response of G(s)=1/(s^2+0.3s+1)');
```

其响应结果如图 3-24 所示。

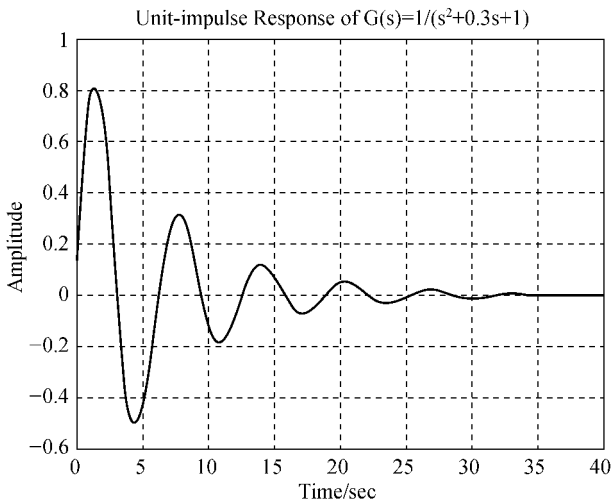


图 3-24 例 3-14 的单位脉冲响应曲线

**例 3-15** 已知系统传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (t \in [0, 10])$$

求取其单位脉冲响应。

**解** MATLAB 命令为

```
t=[0:0.1:10];
num=[1];
den=[1,1,1];
[y,x,t]=impz(num,den,t);
plot(t,y);
grid on;
xlabel('t');
ylabel('y');
```

其响应结果如图 3-25 所示。

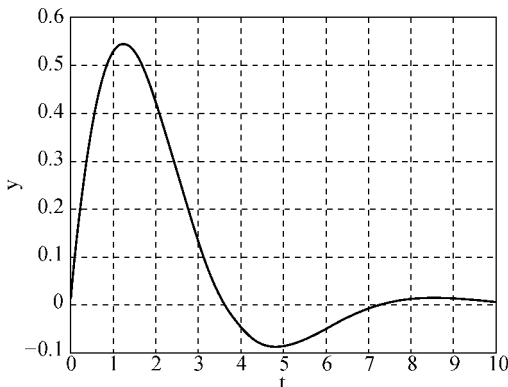


图 3-25 例 3-15 的单位脉冲响应曲线

### 3.6.3 单位斜坡响应

在 MATLAB 中没有单位斜坡响应命令,因此,需要利用单位阶跃响应命令来求单位斜坡响应。根据单位斜坡响应是单位阶跃响应的积分这一关系,求单位斜坡响应时,可先用系统闭环传递函数除以微分算子  $s$  (即乘积分算子  $\frac{1}{s}$ ),再利用单位阶跃响应命令即可求得系统单位斜坡响应。

**例 3-16** 已知闭环系统传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1}$$

对单位斜坡输入,  $r(t) = t, R(s) = \frac{1}{s^2}$ , 求取其单位斜坡响应。

**解** 把单位斜坡输出函数转化为

$$C(s) = \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{(s^2 + 0.3s + 1)s} \frac{1}{s}$$

系统单位斜坡响应的 MATLAB 命令为

```

num=[1];
den=[1,0.3,1,0];
t=[0:0.1:10];
c=step(num,den,t);
plot(t,c);
grid on;
xlabel('t');
ylabel('Input and Output');

```

其响应结果如图 3-26 所示。

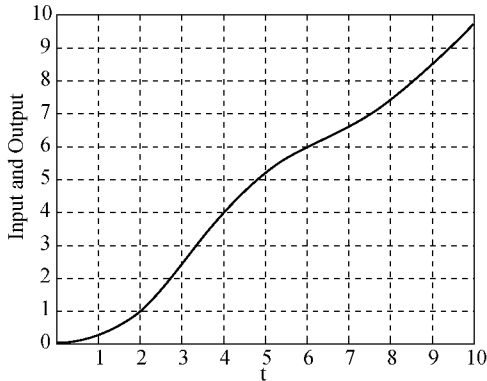


图 3-26 例 3-16 的单位斜坡响应曲线

### 3.6.4 判别系统稳定性

MATLAB 提供了将传递函数形式的系统模型转化为零、极点形式的模型的函数,通过零、极点模型求系统的闭环极点,从而判断系统的稳定性。

**例 3-17** 试利用 MATLAB 判断系统  $G(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 24s + 24}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$  的稳定性。

**解** MATLAB 命令为

```

num=[0,1,7,24,24];
den=[1,10,35,50,24];
[z,p]=tf2zp(num,den);
程序运行结果如下

```

z=

```

-2.7306+2.8531i
-2.7306-2.8531i
-1.5388

```

p=

```

-4.000
-3.000
-2.000
-1.000

```

由运行结果可见,系统有四个极点,均为负实根,故系统稳定。

## 本章小结

本章阐述了通过系统的时间响应去分析系统的稳定性以及暂态和稳态响应性能的问题,其主要内容如下。

时域分析是通过直接求描述系统的微分方程在典型输入信号作用下的解(即系统的时间响应)来分析系统的性能。通常以阶跃响应的延迟时间、上升时间、峰值时间、振荡次数、超调量、调节时间和稳态误差等性能指标来评价系统性能的优劣。

线性定常一、二阶系统的时间响应不难由解析方法求得,它们的各项动态性能指标与相应的系统传递函数中的各项参数有着严格的对应关系,如超调量  $M_p\%$ 、调节时间  $t_s$  等的计算表达式通过推导均由传递函数中的某些参数表示出来。

线性定常系统稳定的充分必要条件是:其传递函数的极点全部位于  $S$  平面的左半部分。

判别系统的稳定性并不需求出传递函数的极点。从传递函数分母多项式各项系数就能确定极点的位置,这就是判别系统稳定性的一种间接方法——劳斯判据和赫尔维茨判据。

系统的稳态误差不但与系统的结构和参数有关,而且与输入(或扰动)的形式密切相关。

使用计算机和 MATLAB 控制系统工具箱中线性定常系统时域响应分析模块的功能,可以很方便地绘制出系统的响应曲线并分析系统的稳定性等。

## 习 题 3

**3-1** 设系统的微分方程如下:

(1)  $0.2y'(t) = 2r(t)$

(2)  $0.5y'(t) + y(t) = 10r(t)$

(3)  $y''(t) + 6y'(t) + 25y(t) = 25r(t)$

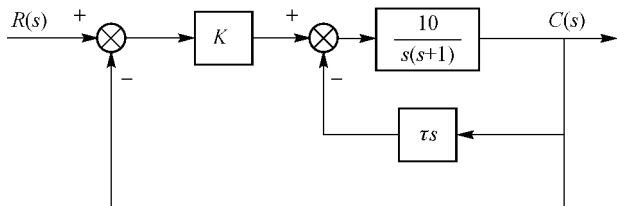
试求系统的单位脉冲响应  $g(t)$  和单位阶跃响应  $h(t)$ 。

**3-2** 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_1}{s(Ts+1)}$$

其动态性能指标满足  $t_s = 6\text{ s}$ ,  $M_p\% = 16\%$ 。试确定系统参数  $K_1$  和  $T$  的值。

**3-3** 已知控制系统方框图如图题 3-3 所示,要求超调量  $M_p\% = 16.3\%$ , 峰值时间  $t_p = 1\text{ s}$ , 求  $K$  与  $\tau$ 。



图题 3-3

**3-4** 单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)}$$

(1) 求阻尼系数  $\zeta=0.5$  时的  $K$  值。

(2) 当  $K=5$  时, 求系统的动态性能指标  $t_r$ 、 $t_p$ 、 $t_s$  和  $M_p\%$ 。

**3-5** 已知控制系统的特征方程如下, 判断系统的稳定性; 如不稳定, 求出系统在  $S$  右半平面根的数目, 并求出对称于平面原点的根(如果存在这样的根)。

(1)  $s^4 + 7s^3 + 25s^2 + 42s + 30 = 0$

(2)  $s^3 + 3s^2 + 2s + 34 = 0$

(3)  $s^5 + 8s^4 + 25s^3 + 40s^2 + 39s + 12 = 0$

(4)  $s^6 + 2s^5 + 5s^4 + 28s^3 + 27s^2 + 66s + 63 = 0$

(5)  $2s^5 + s^4 + 6s^3 + 3s^2 + s + 1 = 0$

(6)  $s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$

(7)  $s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$

**3-6** 已知控制系统的特征方程如下, 试确定保证系统稳定的  $K$  的取值范围。

(1)  $s^3 + 3Ks^2 + (K+2)s + 4 = 0$

(2)  $s^4 + 20Ks^3 + 5s^2 + 10s + 15 = 0$

(3)  $4s^4 + 0.8s^3 + s^2 + 5Ks + K = 0$

**3-7** 已知温度计单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 7s + 17)}$$

(1) 确定使系统产生持续等幅振荡的  $K$  值及相应的振荡角频率。

(2) 确定使全部闭环系统极点位于  $s=-1$  垂直线左侧时  $K$  的取值范围。

(3) 确定使全部闭环系统极点位于  $s=-2$  垂直线左侧时  $K$  的取值范围。

**3-8** 设某温度计的传递函数为  $G(s) = \frac{1}{(Ts+1)}$ 。现用该温度计测量某容器中的水温,

发现经 1 min 后才能指示出实际水温的 96%, 问:

(1) 该温度计的指示从实际水温的 10% 变化到 90% 所需的时间是多少?

(2) 如果给该容器加热, 使容器内水温以  $0.1\text{ }^\circ\text{C/s}$  的速度均匀上升, 当定义  $e(t) = r(t) - y(t)$  时, 温度计的稳态指示误差有多大?

**3-9** 某控制系统的微分方程为

$$Ty'(t) + y(t) = Kr(t)$$

其中,  $T=0.5\text{ s}$ ,  $K=10$ 。设初始条件为 0, 试求:

(1) 系统单位脉冲响应  $g(t)$  以及  $g_1(t)=1$  时的  $t_1$ 。

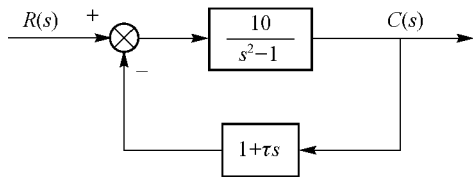
(2) 与时间  $t_1$  对应的系统单位阶跃响应和单位斜坡响应的值。

**3-10** 某控制系统结构图如图题 3-10 所示, 试求:

(1) 当  $\tau=0$  时, 系统的脉冲响应函数。

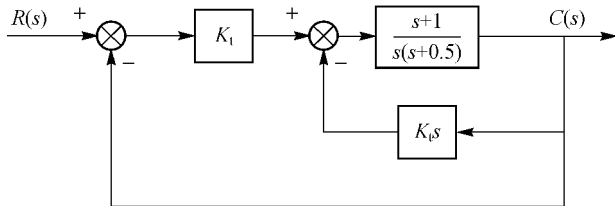
(2) 当定义误差  $e(t) = r(t) - c(t)$  时, 为了使系统具有阻尼比  $\zeta=0.5$ , 确定  $\tau$  的值, 并计算单位阶跃输入时的超调量  $M_p\%$ 、上升时间  $t_r$ 、调节时间  $t_s$  和稳态误差  $e_{ss}$ 。





图题 3-10

**3-11** 设系统结构图如图题 3-11 所示。已知速度反馈系数  $K_t=0$  时,系统的静态速度误差系数  $K_v=2$ 。当  $K_t \neq 0$  时,若要求系统极点具有临界阻尼比,试确定  $K_t$  值,此时  $K_v$  有无变化?



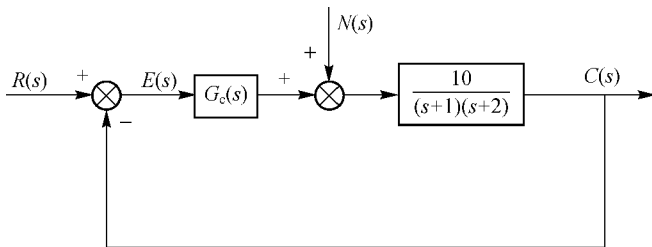
图题 3-11

**3-12** 已知控制系统结构图如图题 3-12 所示,要求此系统的稳态误差满足:(a)当扰动  $n(t)=1(t)$  时,稳态误差为零;(b)当输入  $r(t)=2t$  时,稳态误差不大于 0.2。试在下列三种控制器结构形式中,选择一种能同时满足上述要求的  $G_c(s)$ ,并确定  $G_c(s)$  参数的取值范围。

$$(1) G_c(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{T_s + 1}$$

$$(2) G_c(s) = \frac{K}{s}$$

$$(3) G_c(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s}$$



图题 3-12

## 第 4 章 根轨迹分析

闭环系统的稳定性,完全由它的闭环极点(即系统特征方程的特征根)在 S 平面上的分布情况决定,系统的动态性能也与闭环极点在 S 平面上的位置密切相关。因此,在分析控制系统的性能时,确定闭环极点在 S 平面上的位置非常重要。在设计闭环系统时,期望能通过调节开环极点和零点,使闭环极点和零点位于 S 平面上所期望的位置。而闭环极点的位置与系统参数有关,当系统的参数已经确定时,欲知闭环极点在 S 平面上的位置,就要求解闭环系统的特征方程。当系统特征方程阶次较高,尤其系统参数变化时,需要多次求解,计算量很大,而且无法清晰地观察到系统参数变化对闭环极点分布趋势的影响,这对分析和设计控制系统极其不便。

1948 年,伊文思(W. R. Evans)根据反馈控制系统开环传递函数与其闭环特征方程之间的联系,提出一种简便地求解系统特征方程的特征根的图解法——根轨迹法。已知开环系统零、极点,当一个或一些系统参数变化时,可采用根轨迹法确定闭环系统极点在 S 平面上随参数变化运动的轨迹。利用这种方法可以比较简便、直观地分析系统特征方程的特征根与系统参数之间的关系,而且易于确定系统参数的调节。这种定性分析方法对于研究、改善系统性能具有重要意义。根轨迹法既适用于线性定常连续系统,也适用于线性定常离散系统,因此在控制工程中得到广泛应用,已发展成为经典控制理论的基本分析方法之一。根轨迹法与频域分析法相结合是研究自动控制系统的有效工具。

### 4.1 根轨迹的基本概念

所谓根轨迹,就是指当系统的某个参数(如开环增益  $K$ )由零连续变化到无穷大时,闭环特征方程的特征根在 S 平面上形成的若干条曲线。分析根轨迹应首先从闭环零、极点与开环零、极点之间的关系推导出根轨迹方程的模值条件和相角条件形式。

#### 4.1.1 闭环零、极点与开环零、极点之间的关系

首先分析如图 4-1 所示的系统,可将系统的开环传递函数用如下两种形式表示:

$$G(s)H(s) = \frac{K(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \cdots (1 + \tau_m s)}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cdots (1 + T_n s)} = \frac{K \prod_{j=1}^m (1 + \tau_j s)}{s \prod_{i=1}^n (1 + T_i s)} \quad (4-1)$$

或

$$G(s)H(s) = \frac{b_0(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{a_0(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} = \frac{K^* \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \quad (4-2)$$

# 第 5 章 频域分析

第 3 章介绍的时域分析方法比较直观、准确,但用解析法求解高阶系统的时域响应一般比较困难,同时难以得到方程中的系数(通常对应于系统中元部件的参数)对系统输出(通常对应于系统中的被控制量)的影响。

频域分析是在正弦输入信号作用下,考察系统稳态输出量与输入量之间的振幅比和相位差的变化规律,其基本思想是把控制系统中的各个变量看成一些由不同频率正弦信号组合而成的信号,系统响应为对不同频率信号的响应的总和。系统对正弦输入信号的稳态响应称为频率响应,也叫频率特性。利用这种思想研究控制系统稳定性和动态特性的方法即为频域分析法,此方法是在 20 世纪 30 年代和 40 年代发展起来的。对于后续的鲁棒控制理论来说,频域分析法的一些基本概念和理论是不可缺少的。在经典控制论中,系统频域分析方法具有重要的位置。

## 5.1 频率特性的基本概念

在傅立叶变换、拉普拉斯变换的基础上,将微分方程从时间域变换到频率域的系统频域分析法可以通过实验对一些难以分析的元部件和稳定系统进行测定与分析,同时克服了求解高阶系统时域响应十分困难的缺点,可以根据系统的开环频率特性去判断闭环系统的稳定性。

作为三大分析方法之一,掌握频域分析法的理论基础在某种程度上是一种挑战,需要有相当广泛的复变量知识。但是,频域分析法作为一种图解方法应用起来比较容易,在工业领域,反馈控制系统的设计大多数都是应用频域分析法来设计的。

### 5.1.1 频率特性的定义

频域分析法是分析线性系统的工程实用方法,频率特性反映了系统响应与正弦输入信号之间的关系。在前几章,讨论了以阶跃、斜坡、抛物线以及脉冲等函数作为输入信号对控制系统的作用及性能分析。当正弦函数作为输入信号作用于系统时,通过以下学习将体会到系统的频率特性也能够反映系统的稳定性、稳态性能和暂态性能。

下面根据如图 5-1 所示的 RC 网络来阐述频率特性的基本概念。

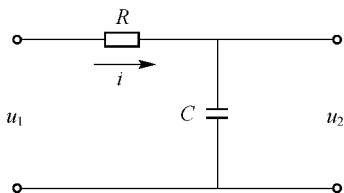


图 5-1 RC 网络

对于此 RC 网络,其传递函数为

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{1}{Ts+1} \quad (5-1)$$

若输入正弦电压信号  $u_1 = U_{1m} \sin \omega t$ , 则其对应的拉氏变换为

$$U_1(s) = U_{1m} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5-2)$$

此网络输出电压  $u_2$  的拉氏变换式为

$$U_2(s) = G(s)U_1(s) = \frac{1}{Ts+1} \frac{U_{1m}\omega}{s^2 + \omega^2}$$

对应的拉氏反变换为

$$u_2 = \frac{U_{1m}\omega T}{1+T^2\omega^2} e^{-\frac{t}{T}} + \frac{U_{1m}}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi) \quad (5-3)$$

式中,  $\varphi = -\arctan T\omega$ 。

由式(5-3)可知,“+”号将系统的暂态响应分量和稳态响应分量间隔起来。随着时间趋于无穷大,第一项暂态响应会逐渐趋于零,而第二项稳态响应则是由输入正弦信号激励的结果,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_2 = \frac{U_{1m}}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \sin(\omega t + \angle \frac{1}{1+j\omega T}) \quad (5-4)$$

可见,此 RC 网络的稳态输出量是同频率的正弦电压信号,但其幅值是输入正弦信号的  $\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$  倍,相位则延迟了  $\arctan \omega T$ , 即输出信号的幅值和相位皆是输入正弦信号角频率  $\omega$  的函数。

可以证明,对于一个稳定的线性定常系统,在其输入端施加一个正弦信号时,当动态过程结束后,在其输出端必然得到一个与输入信号同频率的正弦信号,其幅值和初始相位为输入信号频率的函数。在输入正弦信号作用下,线性系统输出稳态响应对输入正弦信号的幅值比定义为系统的幅频特性  $A(\omega)$ , 其描述了幅值增益与频率的关系,是  $\omega$  的偶函数;系统输出稳态响应对输入正弦信号的相位差定义为系统的相频特性  $\varphi(\omega)$ , 其描述了系统相位差与频率的关系,是  $\omega$  的奇函数。若  $\varphi(\omega) < 0$ , 表明为相位滞后;  $\varphi(\omega) > 0$ , 表明为相位超前。定义复指数函数  $G(j\omega)$  为系统的频率特性,是幅频特性和相频特性的统称。则由式(5-4)可得,对于此 RC 网络,有

$$G(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{j\angle \frac{1}{1+j\omega T}} = \frac{1}{1+j\omega T} = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} \quad (5-5)$$

仔细观察式(5-5)可知,系统的频率特性  $G(j\omega)$  可由系统的传递函数  $G(s)$  求得,即

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (5-6)$$

分析可知,对于更一般的情况,当将 S 平面的复变量  $s = \sigma + j\omega$  的取值范围限定在虚轴上,即令  $\sigma = 0, s = j\omega$  时,则  $G(s)$  所对应的变换函数  $G(j\omega)$  即为该系统的频率特性。频率特性还可定义为输出与输入的复数形式之比,所以,可以认为频率特性是传递函数的一种特殊形式,其能够表征系统的固有特性,蕴含了系统动态过程的全部运动规律。即通过频率特性  $G(j\omega)$  来描述系统特性与通过  $G(s)$  来描述具有相同的效果。

这样,控制系统频率特性的求解方法具有如下三种途径:

(1) 根据已知的系统方程,输入正弦函数求出其稳态解,然后求解输出稳态分量和输入正弦信号的复数比。

(2)根据系统传递函数,利用  $G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$  表达式来求取。

(3)通过实验所测数据,进行分析求取。

其中方法(1)为定义式求解方法,在实际应用中使用不多,后两种方法相对简便、实用,应用较多。频率特性和传递函数、微分方程一样,也是系统的数学模型。三种数学模型之间可借助合适的数学工具进行相互转换。确定合适的数学模型对系统进行分析,有时可简化问题。

## 5.1.2 频率特性的图形表示方法

在工程分析和设计中,通常把频率特性画成几何曲线。从这些频率特性曲线出发,根据曲线的某些特征进行研究,能够方便、直观地分析多个参数变化对系统性能的影响,并能大致得到改善系统性能的途径。频率特性函数是一个复变函数,可采用代数方法  $G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$  和复指数方法  $G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$  进行表示,在后续的学习中要注意掌握这两种表示方法间的相互转换。选择合适的表示方法,便于分析问题。

频率特性函数最常用的两种图形表示方法,分别为极坐标图和对数频率特性图。

### 1. 极坐标图

极坐标图又称为奈奎斯特图、幅相频率特性图,其特点是将频率  $\omega$  作为参变量。当正弦信号的频率  $\omega$  由  $0 \rightarrow \infty$  变化时,系统频率特性向量的幅值和相位也随之作相应的变化,其端点在复平面上移动而形成的轨迹曲线称为幅相曲线,其中曲线上的箭头表示频率增大的方向。

极坐标图的绘制可以采用描点绘制的方法。首先,根据系统的频率特性函数表达式计算出系统的幅频和相频数据,而后进行描点、连线等工作。对于图 5-1 中的 RC 网络,随频率  $\omega$  的变化,系统相应幅频特性与相频特性的数据见表 5-1。如图 5-2 所示为图 5-1 中 RC 网络的幅频特性图与相频特性图。在极坐标系上描点绘制的系统幅相曲线如图 5-3 所示。

表 5-1 RC 网络的幅频特性和相频特性数据

$\omega$	0	1	2	5	$\infty$
$A(\omega)$	1	0.707	0.45	0.196	0
$\varphi(\omega)$	$0^\circ$	$-45^\circ$	$-63.4^\circ$	$-78.69^\circ$	$-90^\circ$

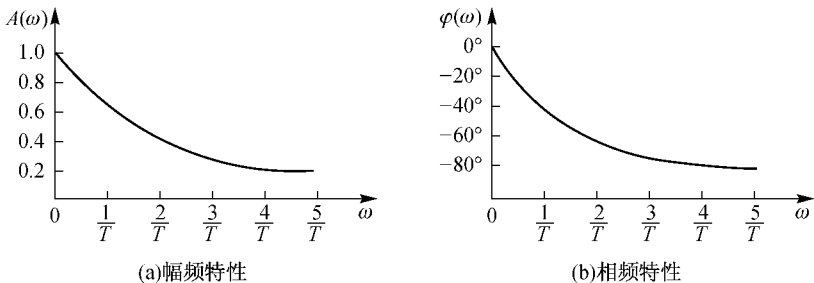


图 5-2 RC 网络的幅频和相频特性

式(5-6)中的频率特性  $G(j\omega)$  又可以表示为实部和虚部的形式

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1+\omega^2 T^2} = U(\omega) + jV(\omega) \quad (5-7)$$

式中,  $U(\omega)$  为实频特性;  $V(\omega)$  为虚频特性。

在  $G(j\omega)$  平面上,以横坐标表示  $U(\omega)$ ,纵坐标表示  $V(\omega)$ ,则通过描点法令  $\omega$  从  $0 \rightarrow \infty$ ,

同样可以绘制出图 5-3 中的 RC 网络频率特性的幅相曲线。极坐标中,实轴正方向为相位的  $0^\circ$  线,逆时针转过的角度为正角度,顺时针转过的角度为负角度。对于某一频率  $\omega$ ,必有一个幅频特性的幅值和一个相频特性的相位与之对应,此幅值和相位在复数平面上代表一个向量。

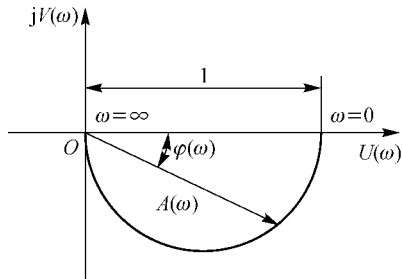


图 5-3 RC 网络频率特性的幅相曲线

## 2. 对数频率特性图

对数频率特性图又称为伯德(Bode)图,包括对数幅频特性和对数相频特性两条曲线,其物理意义比较明确,在工程实际中应用十分广泛。其中,幅频特性曲线可以表示一个线性系统或环节对不同频率正弦输入信号的稳态增益;而相频特性曲线则可以表示一个线性系统或环节对不同频率正弦输入信号的相位差。伯德图通常绘制在半对数坐标纸上,半对数坐标纸也称单对数坐标纸。

对数幅频特性图是表示系统或环节的对数幅值  $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$  和频率  $\omega$  的关系曲线。其纵坐标是线性分度的,表达式为  $L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg |G(j\omega)|$ ,单位为分贝(dB);横坐标是以 10 为底按对数分度的,表示  $\omega$  的变化。对数相频特性则是表示系统或环节的相位  $\varphi(\omega)$  和频率  $\omega$  的关系曲线,其纵坐标是线性分度的,表示角度  $\varphi(\omega)$ ,单位为度;与对数幅频特性相同,对数相频特性横坐标也是以 10 为底按对数分度的,表示  $\omega$  的变化。伯德图将幅频特性和相频特性分别绘制在上下对应的两幅图中,通常对数幅频特性和对数相频特性的横坐标要对齐。虽然在半对数坐标中横坐标采用对数分度,但标写的却是  $\omega$  的实际值。

应用伯德图分析系统性能的主要优点如下:

- (1) 频率  $\omega$  采用对数尺度,可以表示相当广泛的频率范围,特别是在实际应用中,系统低频特性非常重要,通过采用对数尺度扩展低频范围,非常有利于对控制系统进行分析。
- (2) 伯德图可以通过实验的方法获得,当系统模型存在不确定性时,分析效果较好。
- (3) 利用对数运算可以将幅值的乘除运算化为加减运算,并可以用简便的方法绘制近似的对数频率幅相特性,从而大大简化系统频率特性的绘制过程。

此外,频率特性的图形表示方法中还有一种较常见的分析曲线——对数幅相曲线,又称为尼柯尔斯(Nichols)曲线。其横坐标、纵坐标都是均匀分度的,横坐标表示相位,纵坐标表示对数幅频特性幅值的分贝数,频率  $\omega$  为参变量,实际上就是将伯德图上的两条曲线合为一条,反映以频率  $\omega$  为参变量的对数幅频特性与相频特性的关系,此处不作详细介绍。

## 5.2 典型环节的频率特性

一个复杂的控制系统可以看做是由若干个典型环节组成的,它的频率特性也可以由这

些典型环节的频率特性组合而成。因此,通过熟悉和掌握这些典型环节的频率特性,为绘制和分析研究一个复杂控制系统的频率特性,提供了良好的学习基础,有助于奠定系统频域分析的基础。

### 5.2.1 比例环节

比例环节的特点是输出能够无失真和无滞后地复现输入信号,其传递函数为  $G(s) = K$ , 对应的频率特性就是  $G(j\omega) = K$ , 则

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= |G(j\omega)| = K \\ \varphi(\omega) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-8)$$

式(5-8)表明,比例环节的幅频特性与频率  $\omega$  无关,相位恒为  $0^\circ$ 。在极坐标图上就是对应一点  $(K, 0)$ , 如图 5-4 所示。

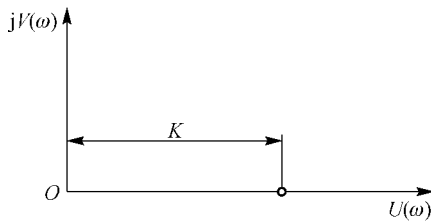


图 5-4 比例环节幅频特性的极坐标图

在伯德图上,系统对应的对数频率特性为

$$\left. \begin{aligned} L(\omega) &= \lg A(\omega) = \lg |G(j\omega)| = \lg K \\ \varphi(\omega) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-9)$$

当  $K$  确定时,可得到如图 5-5 所示的伯德图。

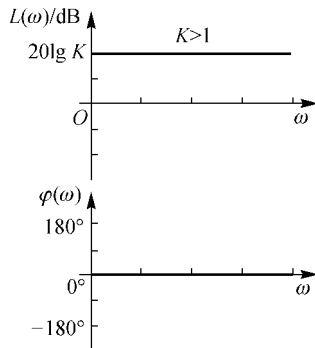


图 5-5 比例环节的伯德图

分析可知,当  $0 < K < 1$ , 比例环节的对数幅频特性曲线对应负的分贝数;当  $K = 1$ , 则对应零分贝;而当  $K > 1$  时,对应正的分贝数。可见,比例环节对于不同频率的正弦输入信号低频和高频的稳态增益是一样的,既不放大,也不衰减。同时表明,比例环节对不同频率正弦输入信号环节产生的相移恒为零,即不产生相移。

在实际应用中,考察所研究问题的频带范围之内,如果某一系统或环节的增益变化范围不大,相移又比较小,就可以近似地看成一个比例环节。如杠杆(忽略弹性变形)、机械传动的齿轮箱(忽略齿轮间隙)等都可近似地作为一个比例环节。

### 5.2.2 积分环节

积分环节的输出量是输入量对时间的积分,其传递函数为  $G(s) = \frac{1}{s}$ , 对应的频率特性为  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ , 则

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= |G(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \\ \varphi(\omega) &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5-10)$$

分析可知,积分环节的幅频特性随着频率  $\omega$  的增大而减小,相位恒为  $-90^\circ$ 。频率特性曲线在极坐标图上为一条线,如图 5-6 所示。

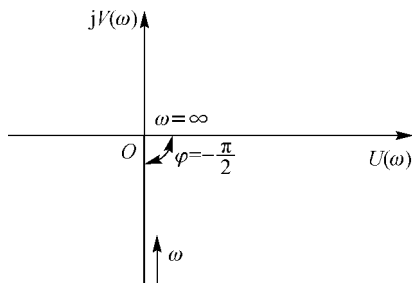


图 5-6 积分环节频率特性的极坐标图

在伯德图上,积分环节的对数频率特性为

$$\left. \begin{aligned} L(\omega) &= \lg A(\omega) = \lg |G(j\omega)| = -\lg \omega \\ \varphi(\omega) &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5-11)$$

频率比在伯德图中是一个很重要的概念,通常可以用十倍频程来表示。频率比相等的任意两点间距离是相等的,对于任意频率由  $\omega_s$  变为  $10\omega_s$  ( $\omega_s$  为任意频率值),则表明频率增加了十倍频程的距离,这样的频带宽度定义为十倍频程,可以写成 dec。如频率  $\omega_1 = 1$  和  $\omega_2 = 10$  之间频率比为 10,则称  $\omega_2$  比  $\omega_1$  高一个十倍频程。

如何画出对数幅频特性表达式为  $-20\lg \omega$  dB 的曲线呢? 为了画出这条曲线,需要任取表达式上的一点  $\omega$ ,则对其十倍频程处的频率  $10\omega$  有

$$-20\lg 10\omega = -20\lg \omega - 20$$

上式表明,对于曲线上任意一个频率点,频率增加十倍频程,则对数幅值下降 20 dB,这是一个斜率的概念,表明曲线斜率恒为  $-20$  dB/dec。斜率值恒定的曲线为直线,通过寻找直线上的一点 ( $\omega = 1, \lg A(\omega) = 0$ ),得出积分环节的伯德图,如图 5-7 所示,对数幅频特性曲线是斜率为  $-20$  dB/dec,且过  $(1, 0)$  点的一条直线。

由图 5-7 可知在  $\omega = 1$  时,积分环节的对数幅频特性曲线经过  $L(\omega) = 0$  dB,则 0 dB 处相当于积分环节增益倍数  $A(\omega) = 1$ 。这表明积分环节对于频率  $\omega = 1$  的正弦输入信号既不放大,也不衰减;对于频率  $\omega < 1$  的正弦输入信号进行放大,频率越低,则增益放大越大;而对于



频率  $\omega > 1$  的正弦输入信号进行衰减, 频率越低, 增益衰减越小。

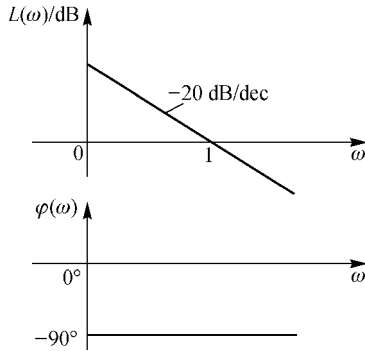


图 5-7 积分环节的伯德图

因此, 可以归纳出积分环节的对数幅频特性为: 幅频特性简单地说是低频放大, 高频衰减; 频率越高, 衰减得越厉害。积分环节的相频特性为: 相位滞后, 固定为  $-90^\circ$ 。

对于与比例环节相串联的积分环节  $G(s) = \frac{K}{s}$ , 它的对数幅频特性仅需将刚才绘制的图像向上 ( $K > 1$ ) 或向下 ( $0 < K < 1$ ) 平移  $\lg K$  dB。这样, 积分环节在伯德图中直线的斜率不变, 仅是在频率  $\omega = K$  时才过零分贝线。在实际应用中, 电感电流与电压之间的关系, 直线速度与位移的关系都可看做积分环节。

### 5.2.3 惯性环节

惯性环节的传递函数为  $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$ , 对应的频率特性就是  $G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega+1}$ , 则

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} \\ \varphi(\omega) &= -\arctan \omega T \end{aligned} \right\} \quad (5-12)$$

由式(5-12)易知, 惯性环节在极坐标图上为一个半圆(见图 5-3)。

在伯德图上, 惯性环节的对数频率特性为

$$\left. \begin{aligned} L(\omega) &= \lg A(\omega) = \lg |G(j\omega)| = -\lg \sqrt{\omega^2 T^2 + 1} \\ \varphi(\omega) &= -\arctan \omega T \end{aligned} \right\} \quad (5-13)$$

由式(5-13)可见, 惯性环节的对数幅频特性相对比例环节、积分环节复杂得多。若令  $\omega_1 = \frac{1}{T}$ , 则可以采用以  $\omega_1$  为分界线来分析研究惯性环节的分段渐近绘制方法。这里定义频率  $\omega_1$  为系统的交接频率, 也称转折频率、转角频率。称为转折频率的原因是环节的两条渐近线将会在这里转折。

对于惯性环节的相频特性, 由表达式可知是个反正切函数, 且随着频率  $\omega$  的增加, 角度最后趋于  $-90^\circ$ 。因此可以采用计算、描点的方法进行绘制, 也可以分成两段进行讨论, 后者可以简化问题的分析。当  $\omega \ll \omega_1$  时, 由式(5-13)分析可知  $\varphi(\omega) \approx 0$ ; 当  $\omega \gg \omega_1$  时, 则有  $\varphi(\omega) \approx -90^\circ$ , 这是惯性环节相频特性的两条渐近线; 而当  $\omega = \omega_1$  时,  $\varphi(\omega) = -45^\circ$ 。这样在转折频

率点  $\omega_1$  和渐近线之间计算若干点, 然后就可平滑曲线将其连接, 绘制出惯性环节的对数相频曲线。

对惯性环节的对数幅频特性进行分析, 根据式(5-13)可知, 当  $\omega \ll \omega_1$  时,  $\sqrt{\omega^2 T^2 + 1} = \sqrt{(\frac{\omega}{\omega_1})^2 + 1} \approx 1$ , 也就是说, 在  $\omega \ll \omega_1$  的频率段范围内, 由于  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) \approx 20 \lg 1 = 0$ , 则惯性环节的对数幅频特性对应于对数幅值为 0 dB 的一条水平线; 而当  $\omega \gg \omega_1$  时, 由于  $\sqrt{\omega^2 T^2 + 1} = \sqrt{(\frac{\omega}{\omega_1})^2 + 1} \approx \frac{\omega}{\omega_1}$ , 则  $20 \lg A(\omega) \approx 20 \lg \frac{\omega_1}{\omega}$ , 也就是说, 在  $\omega \gg \omega_1$  的频率段范围内, 惯性环节的对数幅频特性接近于比例系数为  $\omega_1$  的积分环节, 因此在半对数坐标系中是一条直线, 且斜率为  $-20 \text{ dB/dec}$ 。这样惯性环节对数幅频特性的两条渐近线就确定完毕。

综合上述分析可知, 惯性环节的对数幅频特性的绘制步骤为: 首先找到转折频率点  $\omega_1$ , 在转折频率点左侧低频段, 绘制对数幅频特性为 0 dB 的水平直线; 在转折频率点  $\omega_1$  右侧的高频段, 绘制斜率为  $-20 \text{ dB/dec}$  的直线, 两条渐近线在转折频率  $\omega_1 = \frac{1}{T}$  处相交。惯性环节的伯德图如图 5-8 所示。

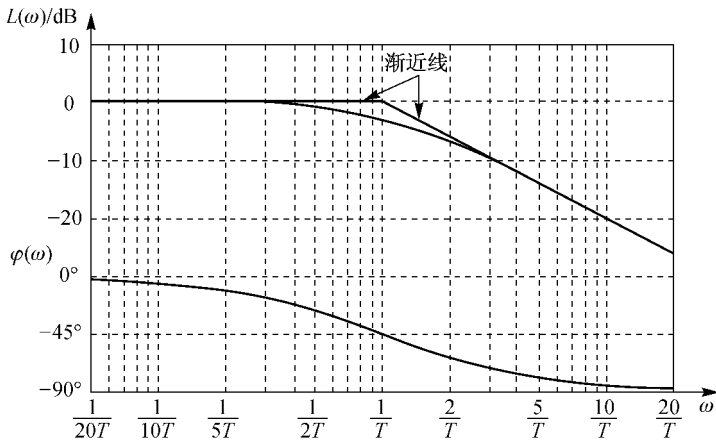


图 5-8 惯性环节的伯德图

惯性环节伯德图的对数幅频特性曲线表明, 该环节具有低通滤波器的特性。

为了精确起见, 也可按式(5-13)计算出惯性环节对应的精确对数幅频特性值, 标注在伯德图上, 并用光滑的曲线连接它们, 这样就可以得到较精确的惯性环节的对数幅频特性曲线。

计算出的惯性环节对数幅频准确值与渐近线之间的误差数据见表 5-2, 绘制成曲线如图 5-9 所示, 最大的误差发生在转折频率  $\omega_1$  处, 通过计算  $20 \lg \frac{1}{\sqrt{1+1}}$ , 确定其值为  $-3 \text{ dB}$ 。将此曲线与使用统一比例尺的渐近线在转折频率处重合, 然后把修正曲线逐点叠加到两条渐近线上, 就可得到准确的对数幅频特性图。

表 5-2 惯性环节实际频率特性和渐近线之间的误差数据表

$\omega T$	0.1	0.2	1	2	5	10
$L(\omega)/\text{dB}$	-0.04	-0.2	-3	-7	-14.2	-20.04
渐近线/dB	0	0	0	-6	-14	-20
误差/dB	-0.04	-0.2	-3	-1	-0.2	-0.04

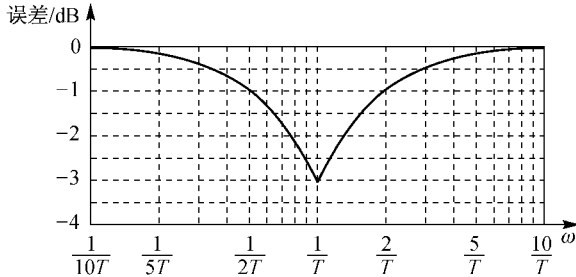


图 5-9 惯性环节的误差曲线

对于串联有比例环节的惯性环节  $G'(s) = \frac{K}{T_s + 1}$ ，它的对数幅频特性仅需将刚才绘制的  $G(s) = \frac{1}{T_s + 1}$  环节的伯德图对数幅频曲线向上 ( $K > 1$ ) 或向下 ( $0 < K < 1$ ) 平移  $\lg K$  即可。当时间常数  $T$  发生变化时，其转折频率  $\omega_1 = \frac{1}{T}$  在横轴上相对变化前的位置向左(变大)或向右(变小)移动。

#### 5.2.4 微分环节

理想微分环节的传递函数为  $G(s) = s$ ，对应的频率特性就是  $G(j\omega) = j\omega$ ，则

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= |G(j\omega)| = \omega \\ \varphi(\omega) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5-14)$$

分析可知，理想微分环节的幅频特性随着频率  $\omega$  的增大而增大，相位恒为  $90^\circ$ 。在极坐标图上为一条线，如图 5-10 所示。

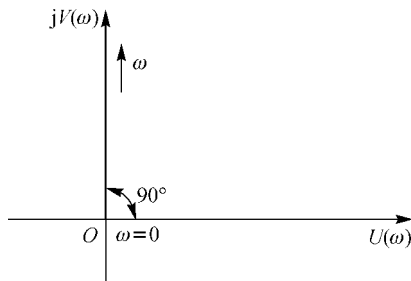


图 5-10 理想微分环节频率特性的极坐标图

在伯德图上,理想微分环节的对数频率特性为

$$\left. \begin{aligned} L(\omega) &= \lg A(\omega) = \lg |G(j\omega)| = \lg \omega \\ \varphi(\omega) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5-15)$$

按照类似积分环节的分析方法,理想微分环节的伯德图如图 5-11 所示,系统对数幅频特性曲线为一条斜率为 20 dB/dec 的直线,此线通过(1,0)点。相频特性是一条平行于横轴的直线,其纵坐标为 90°。对比分析可见,积分环节和微分环节的传递函数互为倒数,它们的对数幅频特性和相频特性则对称于横轴。

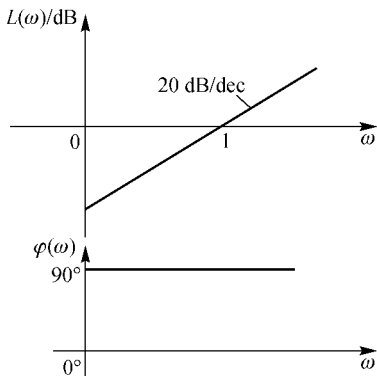


图 5-11 理想微分环节的伯德图

实际应用中,理想微分环节是不存在的。对于一阶比例微分单元,它的传递函数为  $G(s) = Ts + 1$ ,注意到其对应的频率特性为  $1 + j\omega T$ ,在  $\omega$  由 0 至  $\infty$  变化过程中,其幅值由 1 至  $\infty$ ,而相位由  $0^\circ$  至  $90^\circ$ ,且其实部始终为 1,此传递函数正是惯性环节传递函数的倒数。因此,一阶比例微分环节的频率特性为惯性环节频率特性的倒数,只需将惯性环节的对数幅频特性和相频特性图上下倒置,就得到了一阶比例微分环节的伯德图,如图 5-12 所示。可见一阶比例微分环节相当于一个高通滤波器,此环节具有高频放大的作用,会使系统抑制噪声的能力下降。

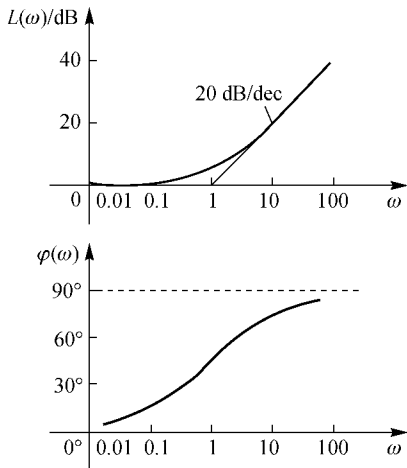


图 5-12 一阶比例微分环节的伯德图

对于二阶微分环节,它的传递函数为  $G(s) = (Ts)^2 + 2T\zeta s + 1$ ,对应的幅频特性和相频特性刚好是振荡环节频率特性的倒数。

### 5.2.5 振荡环节

振荡环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

式中,  $T$  为振荡环节的时间常数,  $T > 0$ ;  $\zeta$  为阻尼系数,  $0 < \zeta < 1$ ;  $\omega_n$  为无阻尼自然振荡角频率。

对应的频率特性为  $G(j\omega) = \frac{1}{-T^2\omega^2 + 2jT\omega\zeta + 1}$ , 则

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}} \\ \varphi(\omega) &= \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2\zeta T\omega}{1-T^2\omega^2}\right) & \left(\omega \leq \frac{1}{T}\right) \\ -\pi + \arctan\left(\frac{2\zeta T\omega}{T^2\omega^2-1}\right) & \left(\omega > \frac{1}{T}\right) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (5-16)$$

分析可知,不同阻尼比下,振荡环节频率特性的极坐标图如图 5-13 所示。幅相曲线的起点为  $G(j0) = 1 \angle 0^\circ$ , 终点为  $G(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$ 。分析表明,振荡环节的极坐标曲线不仅与频率  $\omega$  有关,而且与阻尼比  $\zeta$  也有关。 $\zeta$  越小,幅频越大。

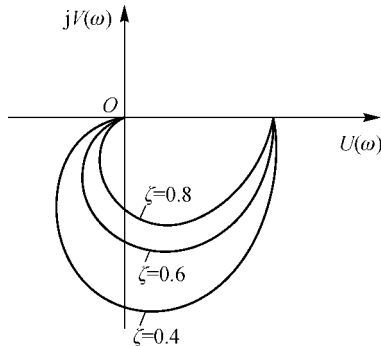


图 5-13 振荡环节频率特性的极坐标图

在伯德图上,根据式(5-16)可求得振荡环节的对数频率特性为

$$\left. \begin{aligned} L(\omega) &= \lg A(\omega) = \lg |G(j\omega)| = -20 \lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2} \\ \varphi(\omega) &= \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2\zeta T\omega}{1-T^2\omega^2}\right) & \left(\omega \leq \frac{1}{T}\right) \\ -\pi + \arctan\left(\frac{2\zeta T\omega}{T^2\omega^2-1}\right) & \left(\omega > \frac{1}{T}\right) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (5-17)$$

对于振荡环节的对数幅频特性分析可知,当  $\omega \ll \frac{1}{T}$  时,  $A(\omega) \approx 1$ ,也就是说,在  $\omega \ll \frac{1}{T}$  的频率段范围内,由于  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) \approx 20 \lg 1 = 0$ ,振荡环节的对数幅频特性是对数幅值为 0 dB 的一条水平线;而当  $\omega \gg \frac{1}{T}$  时,由于  $A(\omega) \approx \frac{1}{T^2\omega^2}$ ,则  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) \approx -40 \lg T\omega$ ,也

就是说,在  $\omega \gg \frac{1}{T}$  的频率段范围内,振荡环节的对数幅频特性曲线为一条斜率为  $-40 \text{ dB/dec}$  的直线。

在振荡环节的转折频率附近,频率特性与渐近线之间存在一定的误差,其值取决于阻尼比  $\zeta$  的值,阻尼比越小,则误差越大。当  $\zeta < 0.707$  时,在对数幅频特性上出现峰值,这时可以在渐近线的基础上,根据误差校正曲线在足够多的频率点上进行必要的修正。如图 5-14 所示为振荡环节在不同阻尼比下的伯德图曲线。

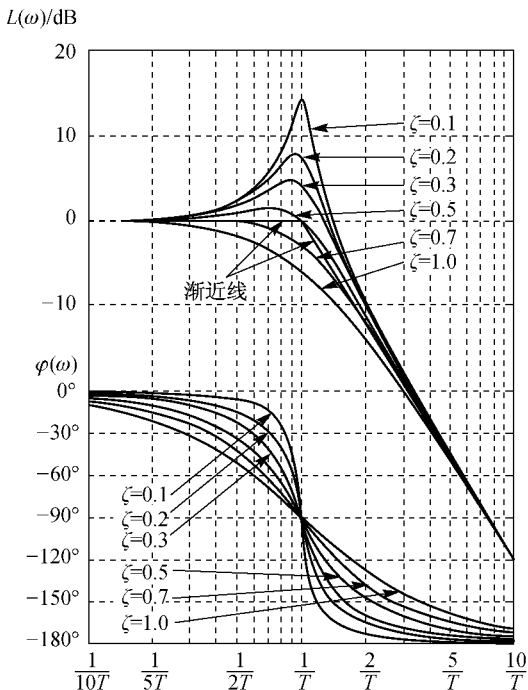


图 5-14 振荡环节的伯德图

### 5.2.6 滞后环节

滞后环节又称为延迟环节,其输出量能够毫不失真地复现输入量的变化,但时间上存在恒定延迟,其传递函数为  $G(s) = e^{-s\tau}$ , 对应的频率特性函数就是  $G(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$ , 则

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= |G(j\omega)| = 1 \\ \varphi(\omega) &= -\omega\tau \end{aligned} \right\} \quad (5-18)$$

由于滞后环节的幅频特性幅值恒为 1, 而其相位与  $\omega$  成比例变化, 可知当  $\omega = 0$  时, 相位等于零; 当  $\omega$  趋于无穷大时, 相位趋于负无穷。滞后环节的幅相曲线是一个以坐标原点为圆心, 半径为 1 的圆, 如图 5-15 所示。滞后环节的传递延迟特性通常存在于热力、液压和启动系统中。在应用中如果不采取有效措施, 则高频时将造成严重的相位滞后。

在伯德图上, 根据式(5-18)可求得滞后环节的对数频率特性为

$$\left. \begin{aligned} L(\omega) &= \lg A(\omega) = \lg |G(j\omega)| = 0 \\ \varphi(\omega) &= -\omega\tau(\text{rad}) = -57.3\tau\omega(^{\circ}) \end{aligned} \right\} \quad (5-19)$$

滞后环节的伯德图如图 5-16 所示。

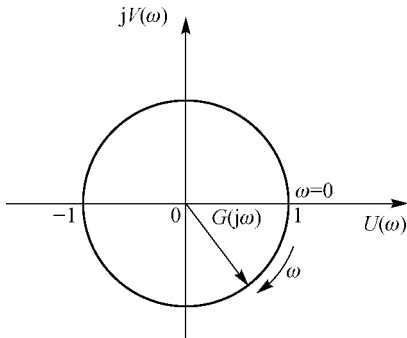


图 5-15 滞后环节频率特性的极坐标图

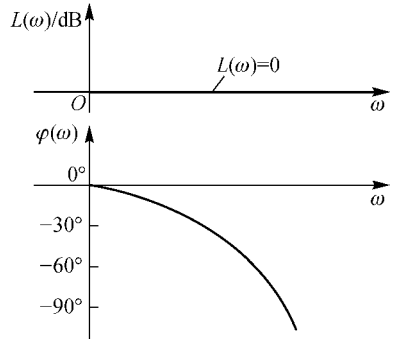


图 5-16 滞后环节的伯德图

实际应用中的元件和系统通常包含滞后环节。例如,有分布参数的长传输线就可用滞后环节来表征。在这种传输线内,脉冲可以保持原波形,经时间  $\tau$  沿传输线传过去。

由以上典型环节的分析不难看出对数相频特性的一个特点。当时间常数  $T$  变化时,对数幅频特性和对数相频特性的形状都不变,仅仅是根据转折频率  $\frac{1}{T}$  的大小整条曲线向左或向右平移即可;而当增益  $K$  改变时,环节的相频特性不变,仅幅频特性上下平移。通过绘制对数幅频渐近线可以非常容易地绘制出系统的伯德图。

## 5.3 开环系统频率特性图的绘制

用频率特性图解法对控制系统进行分析时,可以简化问题。一般采用两种方法:一种是直接采用开环频率特性曲线分析闭环系统的性能;另外一种是根据开环频率特性曲线绘制闭环频率特性,然后用闭环频率特性分析闭环系统的性能。在分析系统时应注意区分开环频率特性和闭环频率特性,本节主要讨论控制系统开环频率特性曲线的绘制方法。

### 5.3.1 开环幅相频率特性的特点

在利用极坐标图进行分析时,应作出控制系统极坐标形式的开环幅相特性曲线。这里着重介绍手工概略绘制控制系统开环幅相曲线的方法。要想精准地绘制控制系统的开环幅相频率特性图,可以参照本章第 5.6 节内容,利用 MATLAB 软件进行计算机绘图。

首先来分析几个典型系统的开环幅相频率特性的特点。

对于 0 型系统  $G(j\omega) = \frac{K}{(1+\tau_1 j\omega)(1+\tau_2 j\omega)}$ , 其开环幅相曲线如图 5-17 所示,在频率  $\omega$  从  $0 \sim \infty$  的变化过程中,幅值单调减小,相位  $\angle G(j\omega)$  从  $0^\circ$  单调递减到  $-180^\circ$ ,表明必然要经过  $-90^\circ$ ,所以 0 型系统幅相频率特性图必然与负虚轴有个交点。

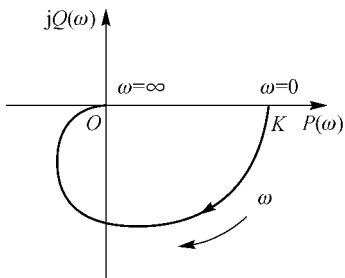


图 5-17 0 型二阶系统幅相频率特性图

对于 I 型系统  $G(s) = \frac{K}{s(1+\tau s)}$ , 幅相频率特性如图 5-18 所示, 在频率  $\omega$  从  $0 \sim \infty$  的变化过程中, 幅值单调减小, 相位  $\angle G(j\omega)$  从  $-90^\circ$  单调递减到  $-180^\circ$ 。

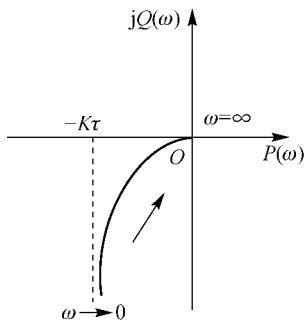


图 5-18 I 型二阶系统幅相频率特性图

对于 II 型系统, 幅相频率特性如图 5-19 所示, 在频率  $\omega$  从  $0 \sim \infty$  的变化过程中, 幅值单调减小, 相位  $\angle G(j\omega)$  从  $-180^\circ$  单调递减到  $-270^\circ$ 。

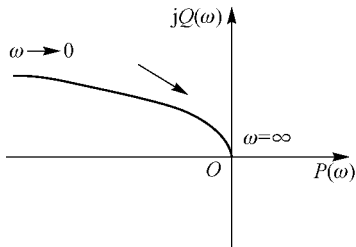


图 5-19 II 型三阶系统幅相频率特性图

讨论更一般的情况, 对于如图 5-20 所示的闭环控制系统结构图, 其开环传递函数为  $G(s)H(s)$ , 可以把系统的开环频率特性写为如下的极坐标形式或直角坐标形式

$$G(j\omega)H(j\omega) = |G(j\omega)H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

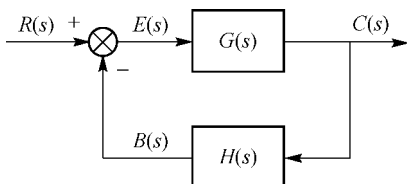


图 5-20 闭环控制系统结构图



将系统的开环频率特性函数按典型环节划分,可以分解为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K_0}{(j\omega)^\nu} \frac{\prod_{k=1}^{m_1} (\tau_k j\omega + 1) \prod_{l=1}^{m_2} [\tau_l^2 (j\omega)^2 + 2\zeta_l \tau_l (j\omega) + 1]}{\prod_{i=1}^{n_1} (\tau_i s + 1) \prod_{j=1}^{n_2} [\tau_j^2 (j\omega)^2 + 2\zeta_j \tau_j (j\omega) + 1]} \quad (5-20)$$

则控制系统开环幅相频率特性图的起点对应于当频率  $\omega \rightarrow 0$  时,开环频率特性  $G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0}$  在复平面上的位置。当开环系统串联的积分环节的个数  $\nu > 0$  时,由式(5-20)可知,当  $\omega \rightarrow 0$  时有

$$G(j\omega)H(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow \frac{K}{(j\omega)^\nu} \Big|_{\omega \rightarrow 0}$$

分析可知,此时对应的系统频率特性模值趋于无穷大,相位的大小则趋近于  $(-\nu) \times \frac{\pi}{2}$ 。因此,可以得到系统开环幅相频率特性图的起点位置与控制系统开环频率特性函数串联的积分环节的个数有关。 $\nu$  为不同值时,开环幅相频率特性图的起点位置不同。

开环幅相频率特性图的终点对应于当  $\omega \rightarrow \infty$  时,系统开环频率特性  $G(j\omega)H(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$  在复平面上的位置。当  $\omega \rightarrow \infty$  时,有

$$G(j\omega)H(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{K}{(j\omega)^{n-m}} \Big|_{\omega \rightarrow \infty}$$

分析可知,此时系统对应的模值大小趋向于零(实际应用中,通常  $n > m$ ),相位的大小为  $-\left[(n-m) \times \frac{\pi}{2}\right]$ 。

上述分析表明,系统开环幅相频率特性图的终点的入射角度的大小是由分母多项式的次数  $n$  与分子多项式次数  $m$  之差来决定的。开环幅相频率特性图的终点位置不同。

**例 5-1** 试绘制开环传递函数  $G(s) = \frac{K}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}$  的奈奎斯特曲线。

**解** (1)该开环系统由三个典型环节串联组成:一个比例环节,两个一阶惯性环节和两个积分环节。

(2)确定起点和终点,系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{-K(1-T_1T_2\omega^2) + jK(T_1+T_2)\omega}{\omega^2(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

起点为  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}[G(j\omega)] = -\infty, \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \infty$ 。

由于  $\operatorname{Re}[G(j\omega)] \rightarrow -\infty$  的速度快,故初始相位为  $-180^\circ$ 。终点为  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| = 0, \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G(j\omega) = -360^\circ$ 。

(3)求幅相曲线与负实轴的交点。

由系统的频率特性函数  $G(j\omega)$  的表达式可知,若频率  $\omega$  为有限值时,则虚频特性  $\operatorname{Im}[G(j\omega)] > 0$ ,故幅相曲线与负实轴无交点。此外,由于组成系统的环节不含有零点,故相位  $\varphi(\omega)$  单调地从  $-180^\circ$  递减至  $-360^\circ$ 。选取不同的频率  $\omega$  值,则可以得到对应的幅值和相位,根据这些值可概略绘制出系统的开环幅相特性曲线,如图 5-21 所示。

通过对例 5-1 的分析研究,总结奈奎斯特图的一般作图方法如下:

- (1) 分别写出开环系统中各个典型环节的幅频特性函数和相频特性函数。
- (2) 写出开环系统的总的  $A(\omega)$  和  $\varphi(\omega)$  函数表达式。
- (3) 分别求出  $\omega=0$  和  $\omega \rightarrow \infty$  时的  $G(j\omega)$  值。
- (4) 求取奈奎斯特曲线与实轴交点, 可令虚频函数  $\text{Im}[G(j\omega)]=0$  求出交点。
- (5) 求取奈奎斯特曲线与虚轴交点, 可令实频函数  $\text{Re}[G(j\omega)]=0$  求出交点。
- (6) 必要时再计算、绘制出几个中间点。
- (7) 勾画大致曲线。

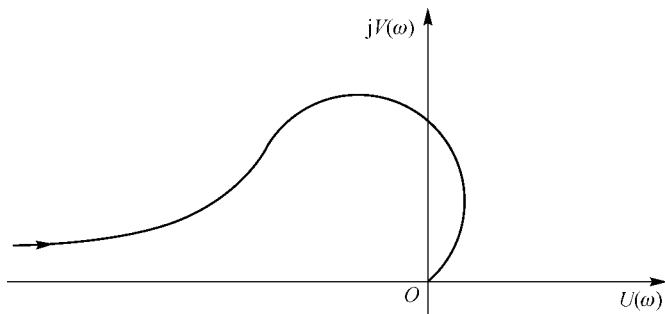


图 5-21 例 5-1 开环系统幅相特性曲线

### 5.3.2 系统伯德图的绘制

系统幅相频率特性图的优点是在一张图上把频率  $\omega$  由  $0 \sim \infty$  区间内各个频率的幅值和相位都可以表示出来。但是, 在幅相频率特性图上, 很难看出系统是由哪些环节组成的, 同时不能明显地表示出开环传递函数中每个单独因子的作用, 并且绘图也较麻烦。

伯德图能避免上述缺点, 而且开环伯德图具有作图简单、方便的特点, 因此利用开环系统伯德图分析闭环系统的性能应用比较普遍。

设开环系统由  $n$  个环节串联组成, 则其传递特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K_0}{s^v} \frac{\prod_{k=1}^{m_1} (\tau_k s + 1) \prod_{l=1}^{m_2} (\tau_l^2 s^2 + 2\zeta_l \tau_l s + 1)}{\prod_{i=1}^{n_1} (\tau_i s + 1) \prod_{j=1}^{n_2} (\tau_j^2 s^2 + 2\zeta_j \tau_j s + 1)}$$

对于构成系统的基本典型环节, 可以表达为基本环节因子的乘积形式, 采用模和相位的方式表达为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \prod_{i=1}^n |G_i(j\omega)| \exp\left[\sum_{i=1}^n \angle G_i(j\omega)\right] \quad (5-21)$$

则开环频率特性取对数后, 有

$$\left. \begin{aligned} L(\omega) &= \sum_{i=1}^n L_i(\omega) \\ \varphi(\omega) &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (5-22)$$

式中,  $L_i(\omega)$  和  $\varphi_i(\omega)$  分别是各典型环节的对数幅频特性函数和相频特性函数。

据此, 先画出各环节的对数频率特性曲线, 然后通过线性叠加就可以绘制出整个系统的开环对数频率特性曲线了。

**例 5-2** 已知某单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{100(s+2)}{s(s+1)(s+20)}$$

试绘制该系统的开环伯德图。

**解** 将系统的开环频率特性变换为时间常数形式为

$$G(s) = \frac{100(s+2)}{s(s+1)(s+20)} = \frac{10(1+j0.5\omega)}{j\omega(1+j\omega)(1+j0.05\omega)}$$

可见, 组成系统的基本环节如下:

(1) 比例环节  $G_1(j\omega) = 10$ , 对应的对数幅频特性为

$$\left. \begin{aligned} L_1(\omega) &= 20\lg 10 = 20 \text{ dB} \\ \varphi_1(\omega) &= 0^\circ \end{aligned} \right\}$$

在整个频域内, 对数幅频特性曲线为一条水平直线。

(2) 积分环节  $G_2(s) = \frac{1}{j\omega}$ , 对应的对数幅频特性为

$$\left. \begin{aligned} L_2(\omega) &= -20\lg \omega \\ \varphi_2(\omega) &= -90^\circ \end{aligned} \right\}$$

可知, 在整个频域内, 对数幅频特性曲线为一条等斜率直线, 其斜率为  $-20 \text{ dB/dec}$ 。若系统中存在比例环节或积分环节, 由于它们没有转折频率, 则可以在低频段优先考虑。

(3) 惯性环节  $G_3(s) = \frac{1}{1+j\omega}$ , 对应的对数幅频特性为

$$\left. \begin{aligned} L_3(\omega) &= -20\lg \sqrt{1+\omega^2} \\ \varphi_3(\omega) &= -\arctan \omega \end{aligned} \right\}$$

可知, 此惯性环节在转折频率  $\omega = 1$  处, 斜率由零变化为  $-20 \text{ dB/dec}$ 。

(4) 一阶比例微分环节  $G_4(j\omega) = 1+j0.5\omega$ , 对应的对数幅频特性为

$$\left. \begin{aligned} L_4(\omega) &= 20\lg \sqrt{1+(0.5\omega)^2} \\ \varphi_4(\omega) &= \arctan 0.5\omega \end{aligned} \right\}$$

表明此一阶比例微分环节在转折频率  $\omega = 2$  处, 斜率由零变化为  $+20 \text{ dB/dec}$ 。

(5) 惯性环节  $G_5(s) = \frac{1}{1+j0.05\omega}$ , 对应的对数幅频特性为

$$\left. \begin{aligned} L_5(\omega) &= -20\lg \sqrt{1+(0.05\omega)^2} \\ \varphi_5(\omega) &= -\arctan 0.05\omega \end{aligned} \right\}$$

可见, 此惯性环节在转折频率  $\omega = 20$  处, 斜率由零变化为  $-20 \text{ dB/dec}$ 。

如图 5-22 所示, 可先分别绘制出构成系统的各典型环节的对数幅频特性曲线, 然后再进行叠加合成, 即可得到此开环系统的伯德图。

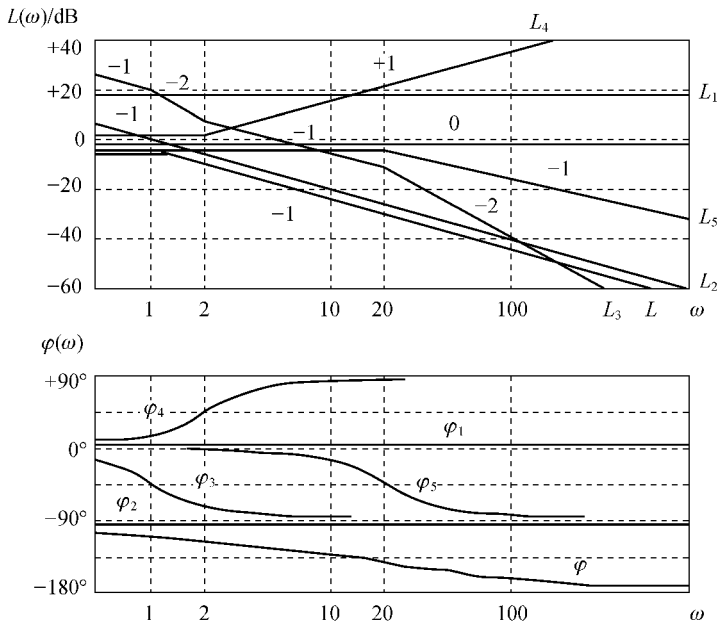


图 5-22 例 5-2 开环系统伯德图

实际上,在熟悉了典型环节的对数幅频特性曲线的性质后,可以不必一一画出各环节的对数频率特性图进行叠加,而可以采用更简便的方法。由低频开始绘制,仅需考虑比例和微积分环节,然后遇到一个典型环节的转折频率,系统的折线斜率就改变一次。绘制伯德图有时并不需要绘制得十分准确,而只需要绘制大致形状和几个关键点的准确位置即可。选择伯德图各坐标轴的比例尺和频率范围时,一般取最低频率为最小转折频率的  $\frac{1}{10}$  左右,最高频率为最大转折频率的 10 倍左右。伯德图中横轴  $\omega$  是对数刻度,最低频率不可能取作零。

**例 5-3** 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{4(1+0.5s)}{s(2s+1)[(\frac{s}{8})^2+0.05s+1]}$$

试绘制开环系统伯德图。

**解** (1) 写出系统的开环频率特性表达式为

$$G(j\omega) = \frac{4(1+j0.5\omega)}{j\omega(j2\omega+1)[(\frac{j\omega}{8})^2+j0.05\omega+1]}$$

(2) 若不是标准形式,则必须将  $G(j\omega)$  化成如上标准形式,即典型环节频率特性的乘积形式。

(3) 分析组成系统的典型环节,并按转折频率从小到大的顺序列出。其中比例环节为 4; 积分环节为  $\frac{1}{j\omega}$ , 在对数幅频特性图的全频段范围内都作用; 惯性环节为  $\frac{1}{1+j2\omega}$ , 转折频率为 0.5; 一阶比例微分环节为  $1+j0.5\omega$ , 转折频率为 2; 二阶振荡环节为  $\frac{1}{1+j0.05\omega+(\frac{j\omega}{8})^2}$ , 转折

频率为 8, 阻尼系数为 0.2 (根据分母的判别式  $b^2 - 4ac < 0$ , 可认定此式为振荡环节。如果  $b^2 - 4ac \geq 0$ , 则表明该单元不属于振荡单元, 可将其分解成两个惯性环节来分别处理)。这些环节在对数幅频特性图中仅在转折频率之后起作用。

(4) 选定伯德图各坐标轴的比例尺和频率范围。在横轴  $\omega$  处, 取最低频率为 0.1, 最高频率为 10。

(5) 从低频到高频绘制开环系统的对数幅频特性的渐近线的步骤如下:

① 低频渐近线是斜率为  $-20\nu$  dB/dec 的直线, 其中  $\nu$  为积分环节的个数, 在  $\omega=1$  处, 渐近线通过  $20\lg K$  这一点。 $\nu=1$ ,  $20\lg 4=12$  dB, 即通过 (1, 12) 点, 作斜率为  $-20$  dB/dec 的直线。

② 在最小转折频率  $\omega_1=0.5$  处, 渐近线斜率由  $-20$  dB/dec 变为  $-40$  dB/dec, 这是惯性环节起作用的结果。

③ 当频率高于转折频率  $\omega_2=2$  时, 一阶微分环节  $1+j\omega$  将起作用, 渐近线斜率从  $-40$  dB/dec 变为  $-20$  dB/dec。

④ 考虑振荡环节的作用, 在  $\omega_3=8$  处, 渐近线的斜率由  $-20$  dB/dec 变为  $-60$  dB/dec。

⑤ 必要时, 按误差校正曲线, 对渐近线进行修正, 可得到精确的对数幅频特性。

⑥ 根据各环节的相频特性, 可以绘制出开环系统的相频特性。

根据上述步骤可知, 例 5-3 开环系统伯德图如图 5-23 所示。

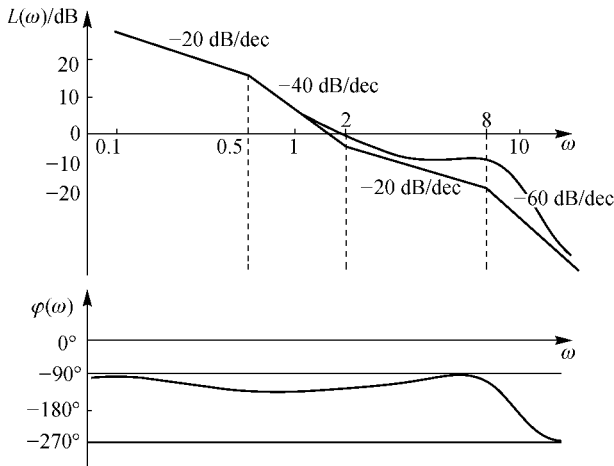


图 5-23 例 5-3 开环系统伯德图

在伯德图中分析和设计控制系统时, 往往对数幅频特性曲线与  $\omega$  轴有一个交点  $\omega_c$ , 这是一个重要的频率点, 被称为截止频率点。

由求取伯德图的公式和过程可知, 0 型系统开环对数幅频特性的低频段为水平线, 对数幅值为  $20\lg K$ , 相位为  $0^\circ$ ; 而 I 型系统开环对数幅频特性的低频段是斜率为  $-20$  dB/dec 的斜线, 相位为  $-90^\circ$ ; II 型系统开环对数幅频特性的低频段是斜率为  $-40$  dB/dec 的斜线, 相位为  $-180^\circ$ 。此后, 随着角频率  $\omega$  的增加, 每遇到一个转折频率, 对数频率特性就要改变一次斜率。若遇到惯性环节的转折频率时, 斜率改变  $-20$  dB/dec; 若遇到一阶比例微分环节, 斜率改变  $+20$  dB/dec; 若遇到振荡环节时, 则斜率改变  $-40$  dB/dec。由后面的分析可以看到, 在许多情况下, 可以省略  $\varphi(\omega)$  的作图。因此, 采用此处介绍的渐近线转折绘图方法画伯德图更方便、快捷。

绘制开环系统伯德图的关键是要找出每个典型环节的转折频率、转折频率处相应的转折斜率变化量和低频段特殊点的对数幅值位置,然后就可以从低频段到高频段,以渐近的方式作出频率特性曲线。

### 5.3.3 最小相位系统与非最小相位系统

在  $S$  右半平面上既无极点也无零点,同时无纯滞后环节的系统定义为最小相位系统,相应的传递函数称为最小相位传递函数;反之,在  $S$  右半平面上具有极点或零点,或具有纯滞后环节的系统则是非最小相位系统,相应的传递函数称为非最小相位传递函数。非最小相位系统开环时通常是不稳定的。

在幅频特性相同的一类系统中,最小相位系统的相移最小,并且最小相位系统的幅频特性的斜率和相频特性的角度之间具有一定的内在关系,即当给出了某一频率范围的对数幅频特性时,在这一频率范围内的相频特性也就确定了;反之亦然。

因此,对于最小相位系统,根据其対数幅频特性曲线就可以确定系统的开环传递函数。

**例 5-4** 已知某最小相位系统的渐近开环幅频特性如图 5-24 所示,试确定系统的开环传递函数,并写出系统的相频特性表达式。

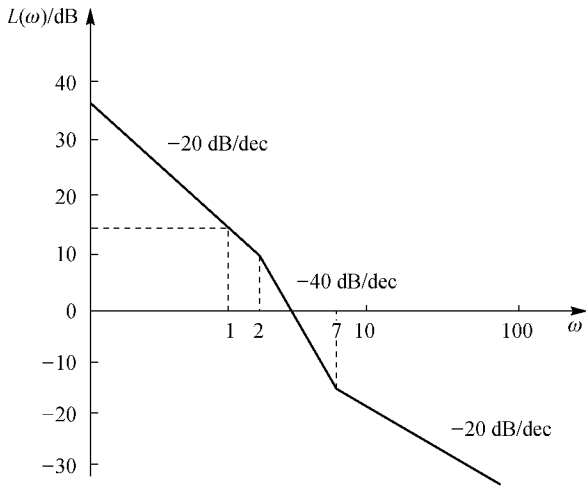


图 5-24 例 5-4 最小相位系统开环对数幅频特性图

**解** (1) 由于低频段仅有一个积分环节,故确定直线斜率为  $-20 \text{ dB/dec}$ 。

(2) 在  $\omega=1$  处,  $L(\omega)=15 \text{ dB}$ , 可得  $20\lg K=15, K=5.6$ 。

(3) 在  $\omega=2$  处,斜率由  $-20 \text{ dB/dec}$  变为  $-40 \text{ dB/dec}$ ,故确定有惯性环节  $\frac{1}{\frac{1}{2}s+1}$ 。

(4) 在  $\omega=7$  处,斜率由  $-40 \text{ dB/dec}$  变为  $-20 \text{ dB/dec}$ ,故确定有一阶微分环节  $\frac{1}{7}s+1$ 。

综上所述,系统的开环传递函数确定为

$$G(s) = \frac{5.6(\frac{1}{7}s+1)}{s(\frac{1}{2}s+1)}$$

故系统的相频特性表达式为

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{2} + \arctan \frac{\omega}{7}$$

如果两个系统具有相同的幅频特性,那么对于大于零的任何频率,最小相位系统的相位总小于非最小相位系统的相位。

**例 5-5** 有两个系统,其开环传递函数分别为

$$G_1(s) = \frac{K}{\tau s + 1}, G_2(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\tau_1 s}$$

试比较它们的对数频率特性。

**解** 由于开环传递函数  $G_2(s)$  中含有滞后环节,表明其为非最小相位系统。 $G_1(s)$ 、 $G_2(s)$  两者的幅频特性表达式相同,皆为  $A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$ ,相频特性表达式分别为

$$\varphi_1(\omega) = -\arctan \omega\tau, \varphi_2(\omega) = -\arctan \omega\tau - \omega\tau_1 \times 57.3^\circ$$

如图 5-25 所示为两系统进行对数频率特性比较分析的开环伯德图。

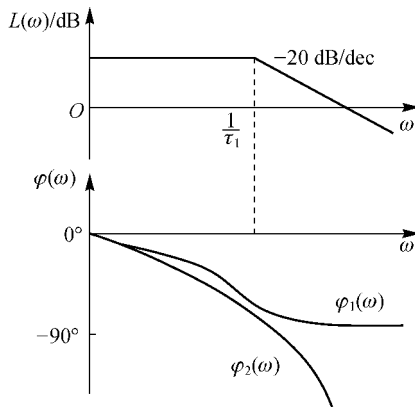


图 5-25 例 5-5 开环系统伯德图

由于最小相位系统的对数幅、相频特性唯一确定,因此实际应用中一般仅绘制其渐近对数幅频特性曲线,对数相频特性曲线通常只需概略画出,或不必绘制相频特性曲线,这样就可以根据该幅频特性曲线粗略地分析系统的性能了。

## 5.4 频域稳定性判据

一般情况下,确定系统稳定性的方法有两种:

(1) 通过直接计算或间接方法求得系统特征方程式的根,由此判断系统的稳定性,如直接对系统闭环特征方程求解的根轨迹法。

(2) 确定系统特征方程的根具有负实部的系统参数的区域,由此判断系统的稳定性,如劳斯、赫尔维茨稳定性判据和奈奎斯特稳定性判据方法。

频域稳定性判据方法包括奈奎斯特稳定性判据和对数频率稳定性判据两种。

### 5.4.1 奈奎斯特稳定性判据

奈奎斯特稳定性判据简称奈氏判据。美国学者 H. Nyquist 于 1932 年通过发现负反馈

放大器的稳定性条件,提出了著名的奈奎斯特稳定性判据,可用于各种线性反馈系统的设计。奈奎斯特稳定性判据是根据开环幅相特性曲线判断闭环系统稳定性的方法。

奈奎斯特稳定性判据为图解法,是一种几何判据,计算量小,物理意义清晰。不但可以根据系统的开环频率特性图来判断闭环系统的稳定性,并能确定系统的相对稳定性,得出系统接近于不稳定的程度。正是由于以上这些优点,奈奎斯特稳定性判据在控制系统稳定性的分析中占有十分重要的地位,甚至可以讲它是整个频域控制理论的基础。

奈奎斯特稳定性判据的数学基础来源于复变函数论中的映射定理,又称为幅角定理。

### 1. 幅角定理

设复变函数  $F(s)$  是复变量  $s$  的单值有理多项式,为单值、连续的解析函数, $C$  是  $S$  平面上的一条不经过  $F(s)$  的极点和零点的闭合曲线,曲线  $C$  与函数  $F(s)$  的特性有关,与具体形状无关。 $S$  平面上的点  $s$  沿曲线  $C$  逆时针运动一周, $C$  曲线通过  $F(s)$  函数在  $F(s)$  平面上形成轨迹,为一条闭合曲线  $C_r$ ,则对应在  $F(s)$  平面内形成的轨迹也是一条封闭曲线,且闭合曲线  $C_r$  逆时针包围  $F(s)$  平面原点的圈数为

$$R = P - Z \tag{5-23}$$

式中, $P$  为曲线  $C$  在  $S$  平面包围的函数  $F(s)$  极点的个数; $Z$  为曲线  $C$  在  $S$  平面包围的函数  $F(s)$  零点的个数; $R$  为曲线  $C_r$  在  $F(s)$  平面包围的原点的次数, $R > 0$  表示曲线  $C_r$  逆时针包围原点  $R$  次, $R < 0$  表示曲线  $C_r$  顺时针包围原点  $R$  次, $R = 0$  表示曲线  $C_r$  不包围原点。

需要指出的是,应用幅角定理只能确定包围在闭合曲线  $C_r$  内函数  $F(s)$  的零点数或其极点数之间的差值,而与所选取闭合曲线的具体形状无关。此外,若在  $S$  平面上的闭合曲线  $C_r$  按逆时针方向运动,则在  $F(s)$  平面上有对应的映射曲线  $C_r$ ,其运动方向取决于复变函数的相位变化,而不是相位的值。

如图 5-26 所示,在  $S$  平面上的闭合曲线  $C$  按顺时针方向运动,在  $F(s)$  平面上有对应的映射曲线  $C_r$ ,其运动方向取决于复变函数  $F(s)$  的相位变化。

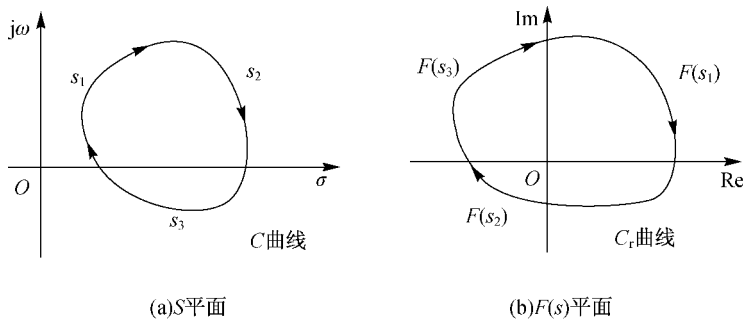


图 5-26  $S$  平面与  $F(s)$  平面的映射关系

其相位的变化情况为

$$\angle F(s) = \sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) \tag{5-24}$$

$$\Delta \angle F(s) = \sum_{k=1}^Z \angle(s - z_k) - \sum_{l=1}^P \angle(s - p_l) \tag{5-25}$$

若闭合曲线  $C$  顺时针包围奇点  $x$  运动,则  $\angle(s - x)$  的值会因奇点  $x$  的位置不同而不同。若  $x$  为系统零点  $z_k$ ,则对应相位变化量为  $-2\pi$ ;若  $x$  为系统极点  $p_l$ ,则对应相位变化量为



$2\pi$ 。若闭合曲线  $C$  逆时针包围函数  $F(s)$  的  $P$  个极点和  $Z$  个零点,由式(5-25)可知,  $\Delta\angle F(s) = 2\pi(P-Z)$ ,因逆时针运动一周角度变化为  $2\pi$ ,所以闭合曲线  $C_r$  逆时针包围  $F(s)$  平面原点的圈数为  $R=P-Z$ 。

## 2. 辅助函数

设控制系统的前向通道传递函数为  $G(s)$ ,反馈通道传递函数为  $H(s)$ ,将这两个传递函数整理为有理多项式之比的形式,则

$$G(s) = \frac{M_1(s)}{N_1(s)}, H(s) = \frac{M_2(s)}{N_2(s)}$$

如果  $G(s)$  和  $H(s)$  无零点、极点对消情况发生,则系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{M_1(s)M_2(s)}{N_1(s)N_2(s)}$$

系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{M_1(s)N_2(s)}{N_1(s)N_2(s) + M_1(s)M_2(s)}$$

构造函数

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{M_1(s)M_2(s) + N_1(s)N_2(s)}{N_1(s)N_2(s)} \quad (5-26)$$

从式(5-26)可以看出,构造的函数  $F(s)$  具有的极点即为系统开环传递函数  $G(s)H(s)$  的极点,而  $F(s)$  的零点也即闭环传递函数  $\Phi(s)$  的极点,且  $F(s)$  函数的零点和极点的个数相同。通常定义这个构造的  $F(s)$  函数为辅助函数,则利用辅助函数  $F(s)$  建立了控制系统的闭环特征多项式、开环特征多项式和开环传递函数  $G(s)H(s)$  之间的联系。辅助函数  $F(s)$  和开环传递函数  $G(s)H(s)$  只差常数 1,其几何意义如图 5-27 所示。

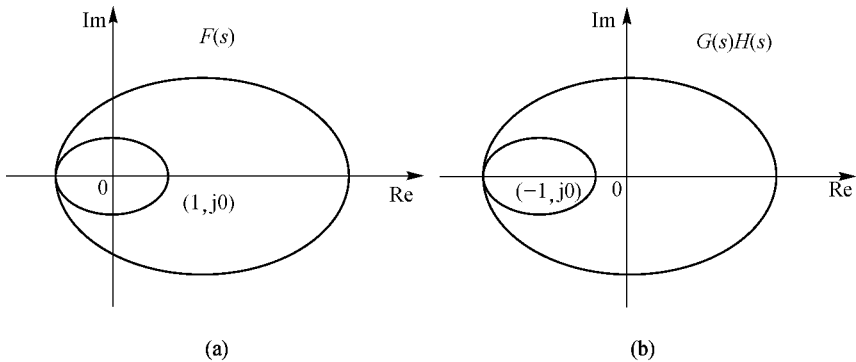


图 5-27 辅助函数  $F(s)$  与  $G(s)H(s)$  的关系示意图

## 3. 奈奎斯特稳定性判据的陈述

如图 5-28 所示,如果把  $S$  平面整个虚轴和半径  $r$  为无穷大的半圆取为闭合曲线  $C$ ,则闭合曲线  $C$  扩大为整个右半  $S$  平面。这样,奈奎斯特曲线主要由两部分组成:一部分是沿虚轴由下向上移动的直线段  $C_1$ ,在此线段上  $s=j\omega$ , $\omega$  由负无穷变化到正无穷;另一部分则为无穷大半圆。根据幅角定理公式(5-25)可知,其中的  $P$  和  $Z$  分别表示辅助函数  $F(s)$  位于  $S$  右半平面的极点和零点。

由于辅助函数  $F(s)$  和开环传递函数  $G(s)H(s)$  只差常数 1,则  $F(s)$  曲线逆时针绕原点

转过的圈数  $R$  就对应开环传递函数  $G(s)H(s)$  曲线绕  $(-1, j0)$  点逆时针转过的圈数。

绘制映射闭合曲线  $C_r$  的方法是,把  $s=j\omega$  代入开环传递函数  $G(s)H(s)$  的表达式,得到开环频率特性  $G(j\omega)H(j\omega)$  函数,然后再给出不同的  $\omega$  值,可以求得相应  $G(j\omega)H(j\omega)$  上的点,最后用平滑曲线连接这些点,即可得到映射曲线  $C_r$ 。

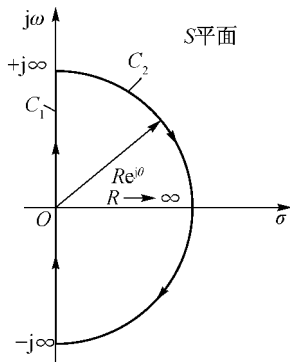


图 5-28 奈奎斯特曲线

由于在实际的物理系统中,开环传递函数的分母最高阶次  $n$  总是大于或等于分子的最高阶次  $m$ ,这样当沿半径  $r$  为无穷大的半圆取值时,通过开环传递函数  $G(s)H(s)$  映射到  $G(s)H(s)$  平面的像就是原点,也就是说,  $S$  平面虚轴无穷远点映射到  $G(s)H(s)$  平面对应原点。因此,绘制映射曲线,只要绘制出频率  $\omega$  从  $-\infty$  变化到  $+\infty$  的开环频率特性,就可以构成完整的映射曲线  $C_r$ 。

综上所述,可将奈奎斯特稳定性判据陈述如下:如果开环系统是稳定的,那么闭环系统稳定的条件是当频率  $\omega$  由  $-\infty$  变化到  $+\infty$  时,开环频率特性  $G(j\omega)H(j\omega)$  在复平面的轨迹不包围  $(-1, j0)$  这一点;如果开环系统是不稳定的,开环系统特征方程式有  $P$  个根在右半  $S$  平面上,则闭环系统稳定的充要条件是频率  $\omega$  由  $-\infty$  变化到  $+\infty$  时,开环频率特性  $G(j\omega)H(j\omega)$  的轨迹在复平面上应逆时针围绕  $(-1, j0)$  点转  $P$  圈,否则闭环系统是不稳定的。

通过构造辅助函数  $F(s)$  进行控制系统稳定性判断的奈奎斯特稳定性判据是通过图解的方法,无须求出系统的闭环极点,就可以判断闭环系统是否满足稳定要求的充分必要条件。在实际应用中,利用奈奎斯特稳定性判据判断系统稳定性时,一般只需绘制  $\omega$  从  $0 \sim +\infty$  变化时的开环频率特性  $G(j\omega)H(j\omega)$  的幅相曲线,然后按其包围的临界点  $(-1, j0)$  的圈数  $R$  (逆时针方向包围时,  $R$  为正;顺时针方向包围时,  $R$  为负)和开环传递函数在右半  $S$  平面上的极点数  $P$ ,根据下式进行判断

$$Z = P - 2R \tag{5-27}$$

式中,  $Z$  为系统闭环特征方程式中具有正实部的根的个数。

如果  $Z$  为零,则表明闭环系统稳定;否则,闭环系统不稳定。这也是奈奎斯特稳定性判据判断系统稳定性的实用方法。

**例 5-6** 某单位负反馈系统,其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{2}{s-1}$$

试绘制系统的奈奎斯特曲线,并判断系统的稳定性。

**解** 系统的频率特性函数为  $G(j\omega) = \frac{2}{j\omega-1}$ ,当  $\omega=0$  时,  $G(j\omega) = -2$ ;当  $\omega = +\infty$  时,

$G(j\omega) \rightarrow 0$ 。给出若干  $\omega$  值, 计算出对应的幅频特性和相频特性, 则可绘制出系统的奈奎斯特曲线。如图 5-29 所示, 可见奈奎斯特映射曲线逆时针包围  $(-1, j0)$  点半圈, 则  $R = \frac{1}{2}$ 。

由已知传递函数表达式可知, 系统在  $S$  右半平面的开环极点有一个, 则  $P=1$ , 由  $Z = P - 2R = 0$ , 可知此系统闭环稳定。

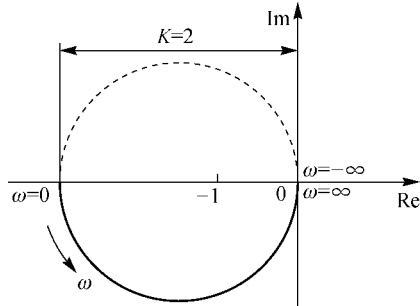


图 5-29 例 5-6 系统奈奎斯特映射曲线图

**例 5-7** 某单位负反馈系统, 其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{100}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

试绘制系统的奈奎斯特曲线, 并判断系统的稳定性。

**解** 系统的频率特性为  $G(j\omega) = \frac{100}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$ , 可知当  $\omega = 0$  时,  $G(j\omega) = 100$ ; 当  $\omega = +\infty$  时,  $G(j\omega) \rightarrow 0$ 。给出若干频率  $\omega$  的值, 计算出系统对应的幅频特性和相频特性, 则可绘制出系统的奈奎斯特曲线。如图 5-30 所示, 可见奈奎斯特映射曲线不包围  $(-1, j0)$  点, 故此闭环系统稳定。

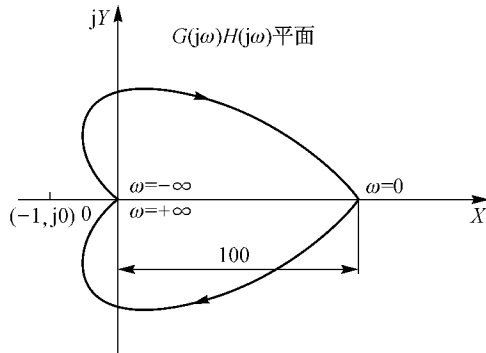


图 5-30 例 5-7 奈奎斯特映射曲线图

当开环传递函数  $G(s)H(s)$  在  $S$  平面的虚轴或原点处有零、极点时, 就不能直接应用奈奎斯特稳定性判据了, 这是因为幅角定理要求闭合曲线  $C$  不能经过辅助函数  $F(s)$  的零、极点, 所以这种情况下需要修正奈奎斯特曲线。

为了在这种情况下仍能应用奈奎斯特稳定性判据, 可以修改奈奎斯特曲线, 如图 5-31 所示。它与图 5-28 中奈奎斯特曲线的区别仅在于, 此曲线经过以坐标原点为圆心, 半径为  $\epsilon$  的小半圆, 此小半圆位于  $S$  平面的右半部, 绕开了极坐标所在的原点。当半径  $\epsilon \rightarrow 0$  时, 小半圆的面积趋近于零。这样, 辅助函数  $F(s)$  位于  $S$  平面右半部的零点和极点均被此奈奎斯特

曲线包围在内,而将位于坐标原点处的开环极点画到了左半 S 平面。这样处理后,就可以满足奈奎斯特稳定性判据的要求。应用奈奎斯特稳定性判据时,必须明确位于 S 平面右半部和左半部的开环极点的数目。当虚轴上有开环极点时,也可仿此方法进行修改处理。

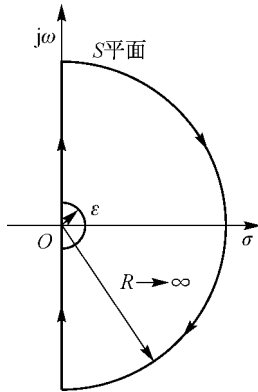


图 5-31 包含积分环节时的 S 平面封闭曲线

若沿无限小半圆上的动点  $s$  可表示为  $s = \epsilon e^{j\theta}$  ( $\epsilon \rightarrow 0, -90^\circ < \theta < 90^\circ$ )。则当频率  $\omega$  从  $0^-$  沿小半圆变化到  $0^+$  时,  $\theta$  角按逆时针方向旋转了  $180^\circ$ , 映射到  $G(s)H(s)$  平面上, 则为

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(\epsilon e^{j\theta})^\nu} = \infty e^{-j\nu\theta}$$

式中,  $\nu$  为开环系统中串联的积分环节数目。

由以上分析易知, 当频率  $\omega$  沿着小半圆从  $0^-$  变换到  $0^+$  时,  $\theta$  角从  $-90^\circ$  经  $0^\circ$  变化到  $90^\circ$ , 这时在  $G(s)H(s)$  平面上的映射曲线  $C_r$  将沿着半径为无穷大的圆弧按顺时针方向从  $\nu \cdot 90^\circ$  经  $0^\circ$  变化到  $\nu \cdot (-90^\circ)$ 。

开环传递函数  $G(s)H(s)$  含有  $\nu$  个积分环节时, 绘制奈奎斯特曲线可先画出频率  $\omega$  从  $0^+ \sim \infty$  变化时的  $G(j\omega)H(j\omega)$  的曲线, 然后画出  $\omega$  从  $-\infty \sim 0^+$  的补充圆弧。补充圆弧画法为: 从  $\omega = 0^+$  的对应点开始, 逆时针方向补画一个半径为无穷大, 圆心角为  $90\nu$  的大圆弧, 这样就可以照常使用奈奎斯特稳定性判据了。如图 5-32 所示为两种典型情况下, 通过补充绘制辅助圆弧线而得到的完整奈奎斯特曲线图, 其中图(a)为 I 型系统, 图(b)为 II 型系统。

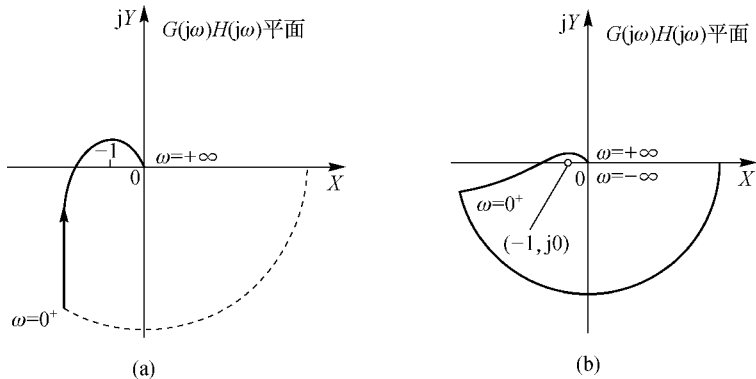


图 5-32 完整奈奎斯特曲线

**例 5-8** 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

试绘制系统的奈奎斯特图,并应用奈奎斯特稳定性判据判断闭环系统的稳定性。

**解** 系统开环传递函数串联了一个积分环节,为 I 型系统,采用描点法给出若干频率  $\omega$  的值,计算出系统对应的幅频特性和相频特性,就可绘制出系统的奈奎斯特曲线图,其奈奎斯特曲线图如图 5-33 所示。由于开环稳定,开环频率特性幅相曲线又不包围  $(-1, j0)$  点,故系统是稳定的。

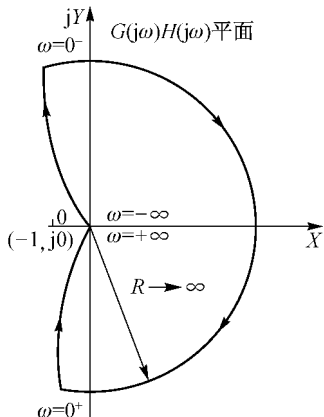


图 5-33 例 5-8 系统的奈奎斯特曲线

**例 5-9** 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{4s+1}{s^2(s+1)(2s+1)}$$

试绘制系统的奈奎斯特图,并应用奈奎斯特稳定性判据判别闭环系统的稳定性。

**解** 开环系统串联有两个积分环节,因此,采用改进型闭合曲线绕过坐标原点,包围右半 S 平面。系统的频率特性函数为

$$G(j\omega) = -\frac{1+10\omega^2}{\omega^2(1+\omega^2)(1+4\omega^2)} - j\frac{1-8\omega^2}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

如图 5-34(a)实线所示为频率  $\omega$  从  $-\infty$  变化到  $0^+$  的部分封闭曲线。分析可知,当沿 S 平面虚轴取值,  $\omega \rightarrow -\infty$  时,系统对应的映射曲线幅值为无穷小,接近原点 O,频率逐渐减小,幅值不断增加;当频率  $\omega = \frac{1}{\sqrt{8}}$  时,如图 5-34(b)所示,对应  $G(s)H(s)$  平面上相位为  $-180^\circ$ ,幅值约为 10(B 点);当  $\omega \rightarrow 0^+$  时,对应系统映射曲线幅值为无穷大,而根据相位表达式  $\varphi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} (-180^\circ + \arctan 4\omega - \arctan \omega - \arctan 2\omega)$  和三角函数的变换公式  $\arctan A + \arctan B = \arctan \frac{A+B}{1-AB}$ ,可将此相位表达式化简为

$$\varphi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} (-180^\circ + \varphi)$$

式中,  $\varphi = \arctan \frac{\omega(1-8\omega^2)}{1+10\omega^2}$ 。

可知  $\omega \rightarrow 0^+$  时,此  $\varphi$  角度为正,且非常接近于零值,这样可以确定相位非常接近  $-180^\circ$ ,但要比  $-180^\circ$  多增加一个非常小的正角度,对应如图 5-34(b)所示的 A 点。这样,控制系统映射曲线由原点 O 出发经 B 点,到 A 点的开环幅相曲线就绘制出来了。

临界点  $(-1, j0)$  点位于 B 点的右侧,由于系统为 II 型系统,故可逆时针补画  $2 \times 90^\circ$  的半圆弧,绘制出半条映射曲线,再通过对称的方法,就可以绘制出整条曲线,如图 5-34(c)所示。

由于该系统为最小相位系统,则系统无开环极点位于  $S$  平面的右半部,故  $P=0$ ;由图 5-34(c)可知,频率特性曲线  $G(j\omega)H(j\omega)$  沿顺时针方向包围了  $(-1, j0)$  点一周,即  $R=-1$ ,则根据奈奎斯特稳定性判据,有  $Z=P-2R=2$ ,表明此闭环系统是不稳定的,并有两个闭环极点在  $S$  平面的右半部。

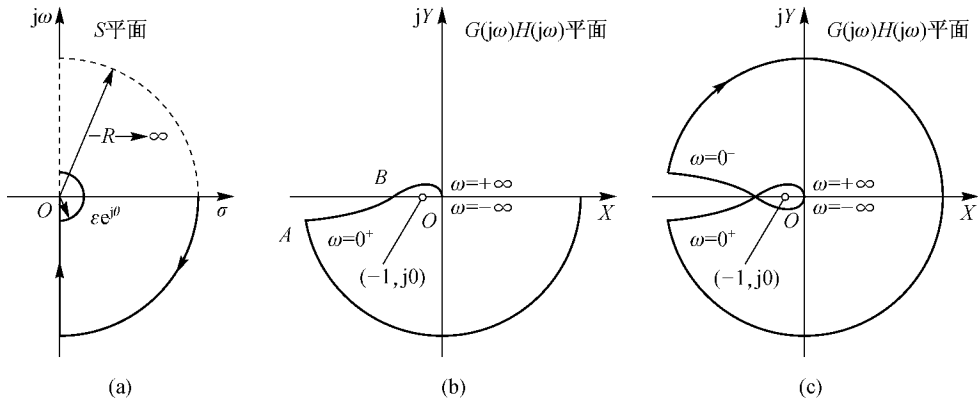


图 5-34 例 5-9 系统的奈奎斯特曲线

在有些情况下,应用奈奎斯特稳定性判据时采用开环频率特性的倒数  $\frac{1}{G(j\omega)H(j\omega)}$  更方便,这时在极坐标上绘制的图形称为逆极坐标图。采用逆极坐标图时,奈奎斯特稳定性判据描述为:闭环系统稳定的充要条件是当  $\omega$  从  $-\infty$  变化到  $+\infty$ ,逆极坐标图的奈奎斯特曲线按逆时针方向包围  $(-1, j0)$  点  $R$  次,  $R$  为  $G(s)H(s)$  在  $S$  右半平面的零点。

### 5.4.2 对数频率稳定性判据

对数频率稳定性判据和奈奎斯特稳定性判据本质相同,是奈奎斯特稳定性判据移植于对数频率坐标的结果,只不过是按对数幅频特性曲线和相频特性曲线的相互关系来确定奈奎斯特稳定性判据公式  $Z=P-2R$  中的参数  $R$  而已。系统开环频率特性的幅相曲线(极坐标图或奈奎斯特图)和伯德图之间存在着一定的对应关系。极坐标图上  $|G(j\omega)H(j\omega)|=1$  的单位圆与伯德图对数幅频特性的零分贝线相对应,极坐标图上单位圆以外部分对应于伯德图上  $L(\omega)>0$  部分,单位圆以内对应于  $L(\omega)<0$  部分。极坐标图上的负实轴对应于伯德图上相频特性的  $-\pi$  线。

如图 5-35 所示,在极坐标图上绘制了一条幅相曲线,在伯德图上则绘制了与其对应的对数频率特性曲线。在极坐标图上,定义“穿越”这一概念是指开环奈奎斯特曲线穿过  $(-1, j0)$  点左边实轴时的情况。其中开环频率特性从上半部分穿过负实轴的  $-\infty \sim -1$  段到实轴的下半部分,称为正穿越,这种穿越伴随着相位增加,正穿越一次时相当于奈奎斯特曲线正向包围  $(-1, j0)$  点一圈;开环频率特性从下半部穿过负实轴的  $-\infty \sim -1$  段到实轴的上半部分,称为负穿越,这种穿越伴随着相位减小,负穿越一次相当于奈奎斯特曲线反向包围  $(-1, j0)$  点一圈;起始于或终止于负实轴的正、负穿越称为正、负半穿越。

在伯德图上,幅值  $L(\omega) = 20\lg|G(j\omega)H(j\omega)| \geq 0$  dB 的区域内,当角频率  $\omega$  增加时,相频特性曲线  $\varphi(\omega)$  从下向上穿越  $-180^\circ$  线对应为正穿越;相频特性曲线  $\varphi(\omega)$  从上向下穿越  $-180^\circ$  线对应为负穿越。负穿越次数可用  $R^-$  表示,正穿越次数可用  $R^+$  表示,则系统穿越

次数  $R$  可表示为正穿越  $R^+$  和负穿越  $R^-$  之差, 即  $R=R^+-R^-$ 。

在图 5-35 中, 幅相曲线包围  $(-1, j0)$  点的圈数  $R$  为零, 此结果也可根据对应的对数频率特性曲线判断得出。在伯德图中正负穿越分别用 +、- 号标出, 对应图中  $R^+=1, R^-=1$ , 表明  $R=0$ 。

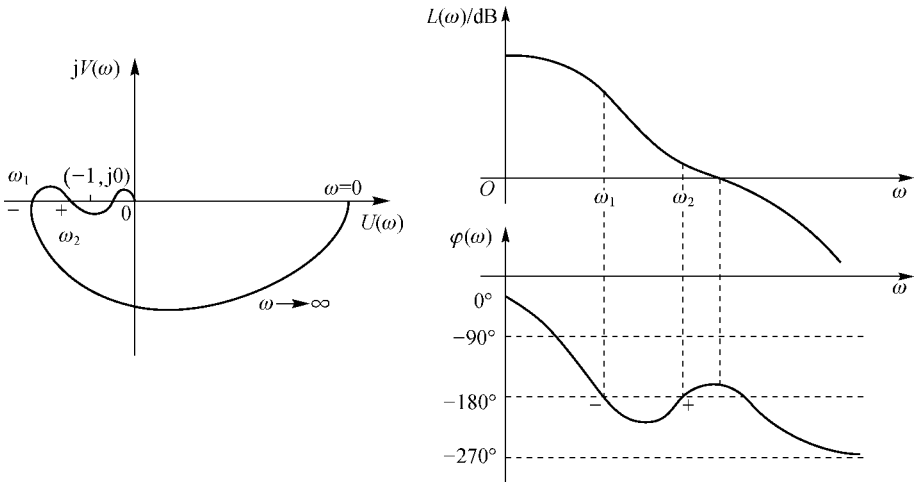


图 5-35 幅相曲线及其对应的对数频率特性曲线

综上所述, 采用对数频率特性时的奈奎斯特判据可表述如下: 闭环系统稳定的充要条件是, 当频率  $\omega$  由  $0 \rightarrow +\infty$  时, 在开环对数幅频特性  $L(\omega) > 0$  的频段内, 相频特性曲线(含辅助线)  $\varphi(\omega)$  穿越  $-180^\circ$  线的次数  $R=R^+-R^-=\frac{P}{2}$ ,  $P$  为系统在  $S$  平面右半部开环极点的数目。对于在  $S$  平面原点有开环极点的情况, 对数频率特性曲线也需要作出相应的修改: 设  $\nu$  为开环系统串联的积分环节数目, 当  $\omega$  由  $0$  变化到  $0^+$  时, 相频特性曲线  $\varphi(\omega)$  应在  $\omega \rightarrow 0$  处, 由上而下补画  $\frac{\nu\pi}{2}$  角度。计算系统的正、负穿越次数时, 应将补画的曲线看成系统对数频率曲线的一部分。

**例 5-10** 某一反馈控制系统, 其开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)}$$

试用对数频率稳定性判据判断系统的稳定性。

**解** 系统的开环对数频率特性曲线如图 5-36 所示。由于  $G(s)H(s)$  有两个积分环节, 故在对数相频曲线  $\omega \rightarrow 0$  处, 补画了  $0^\circ \sim -180^\circ$  的虚线, 作为对数相频曲线的一部分。显见  $R=R^+-R^-= -1$ , 根据  $G(s)H(s)$  的表达式知道  $P=0$ , 所以  $Z=P-2R=2$ , 故表明闭环系统是不稳定的, 有两个闭环极点位于  $S$  平面的右半部。

若开环系统稳定(即开环系统为最小相位系统),  $P=0$ , 则利用对数频率稳定性判据判断闭环系统稳定的充要条件是相位  $\varphi(\omega)$  的曲线正、负穿越  $-180^\circ$  线的次数等于零。

**例 5-11** 某一反馈控制系统, 其开环传递函数为

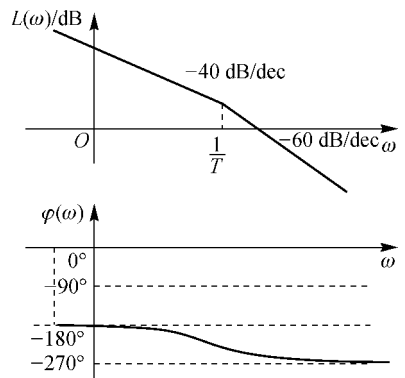


图 5-36 例 5-10 系统伯德图

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

试用对数频率稳定性判据判断系统的稳定性。

**解** 系统的开环对数频率特性曲线如图 5-37 所示,此系统为最小相位系统。因为在  $L(\omega) > 0$  的频段内,系统相频特性正、负穿越  $-180^\circ$  线的次数皆为零,所以可判断系统是稳定的。

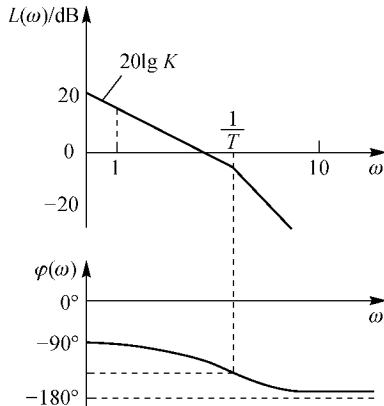


图 5-37 例 5-11 系统伯德图

条件稳定系统是指当开环比例系数在一定范围内取值时才稳定的反馈控制系统。若系统开环传递函数在  $S$  右半平面的极点数  $P=0$ ,则开环比例系数改变时,闭环系统的稳定性将发生变化,开环频率特性曲线见图 5-34(c)。

这里应注意,开环增益改变时,只影响系统的开环幅频特性,不影响开环相频特性。所以当开环增益增加时,幅相曲线与负实轴的交点将按比例向左边移动(在伯德图上,表现为对数幅频特性曲线向上移动)。如果开环增益增加到足够大,以致于  $R=R^+ - R^- = -1$ ,那么  $Z=P - 2R=2$ ,系统就由稳定状态变为不稳定状态。以上分析表明只有开环增益在一定范围内时,闭环系统才稳定。

### 5.4.3 系统的稳定裕量

设计控制系统,要求它必须稳定,这是控制系统赖以正常工作的必要条件。除此之外,还要求控制系统具有适当的相对稳定性,这是因为在大多数情况下,系统的参数都有不确定性,奈奎斯特稳定性判据法通过研究开环传递函数的幅相轨迹和  $(-1, j0)$  点的关系及开环传递函数极点数来判别闭环系统的稳定性。利用这种方法不仅可以定性地判别系统稳定性,而且可以定量地反映系统的相对稳定性,即稳定裕量,后者与系统的暂态响应指标有着密切的关系。

前面已经指出,若开环系统稳定,则闭环系统稳定的充分必要条件是开环频率特性曲线不包围  $(-1, j0)$  点。如果开环频率特性曲线包围  $(-1, j0)$  点,则闭环系统是不稳定的。而当系统开环频率特性曲线穿过  $(-1, j0)$  点时,则系统处于稳定的临界状态。在这种情况下若控制系统的参数发生漂移,便有可能使控制系统的开环频率特性包围点  $(-1, j0)$ ,从而造成控制系统不稳定。可见,一个系统不但必须是稳定的,而且还应该具有相当的稳定裕量,才是工程中切实可用的系统。

稳定裕量通过定量地确定系统离开稳定边界的远近来评价系统稳定性好坏,从而成为系统动态设计的重要依据之一。系统开环频率特性曲线靠近  $(-1, j0)$  的程度表征了系统的



相对稳定性:曲线距离临界点 $(-1, j0)$ 点越远,表明闭环系统的相对稳定性越高;反之,越靠近点 $(-1, j0)$ ,则表明闭环系统的稳定程度越低。

稳定裕量是衡量系统相对稳定性的指标,控制系统的相对稳定性通常用相位裕量和增益裕量来衡量。

### 1. 相位裕量

相位裕量也称相角裕度。在奈奎斯特图上,从原点到控制系统幅相曲线与单位圆 $A(\omega) = 1$ 的交点连一直线,则该直线与负实轴的夹角,就称为相位裕量(简称为PM),用 $\gamma$ 表示,如图5-38所示。此外,开环奈奎斯特曲线与单位圆的交点对应的频率 $\omega_c$ 称为幅值穿越频率,也称截止频率。由此描述可知,相位裕量是指使控制系统达到稳定边界所需要的附加滞后量。不难看出

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) \quad (5-28)$$

式中, $\varphi(\omega_c)$ 为开环相频特性曲线在与单位圆交点频率 $\omega_c$ 处的相位。

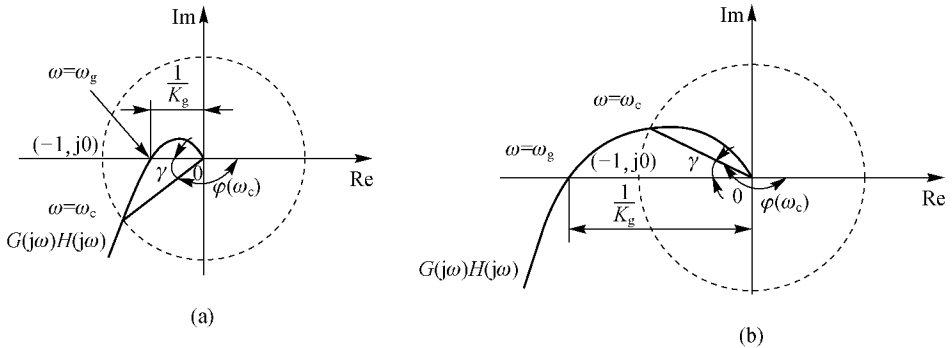


图 5-38 稳定和 unstable 系统的极坐标图

### 2. 增益裕量

对应控制系统开环频率特性的相位为 $-180^\circ$ 时,将系统开环频率幅值的倒数 $\frac{1}{A(\omega)}$ 为增益裕量(简称为GM),以 $K_g$ 表示。 $K_g$ 所对应的频率 $\omega_g$ 称为相位交界频率,即

$$K_g = \frac{1}{A(\omega_g)} \quad (5-29)$$

增益裕量 $K_g$ 是个系数,它是指若系统的开环增益在原有基础上再加大 $K_g$ 倍,则系统处于临界稳定,可表示系统在幅值这方面的稳定储备量。

对于单位反馈开环稳定的最小系统,若 $\gamma > 0$ ,则表明系统闭环稳定;若 $\gamma \leq 0$ ,表明系统不稳定,且相位裕量 $\gamma$ 越小,表示系统相对稳定性越差。考虑到系统中元部件参数的变化可能对稳定性带来不利影响,系统必须具有适当的相位裕量,一般取 $\gamma \in (30^\circ \sim 60^\circ)$ 。

同样,对于单位反馈开环稳定的最小相位系统,若增益裕量 $K_g > 1$ ,表明系统闭环稳定;若 $K_g \leq 1$ ,则表明系统不稳定。在实际应用中保持适当的稳定裕量,可以预防系统中元部件性能变化时可能带来的对系统稳定性的不利影响。为了得到较满意的暂态响应,通常增益裕量应大于6 dB。

相位裕量和增益裕量在极坐标图中的位置见图5-38,在伯德图中的位置如图5-39所示。

控制系统的相位裕量和增益裕量是系统的极坐标图对 $(-1, j0)$ 点靠近程度的度量。因此,这两个裕量可以用来作为设计准则。

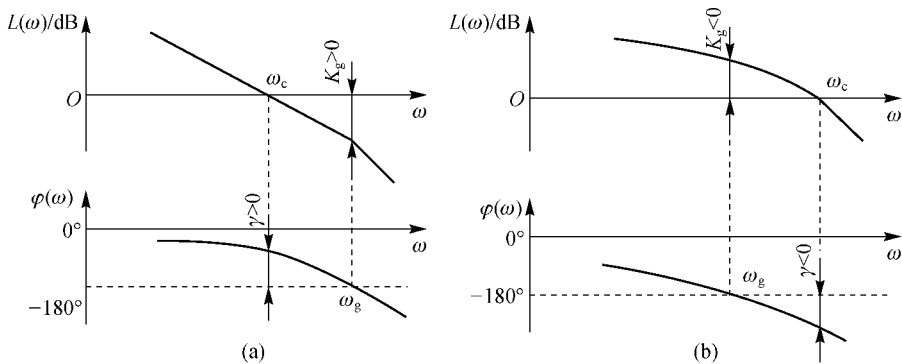


图 5-39 稳定和不稳定系统的伯德图

例 5-12 已知某系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(1+0.02s)(1+0.2s)}$$

试绘制控制系统开环伯德图,并求系统的稳定裕量。

解 由已知条件可知系统由三类四个典型环节构成,分别为一个比例环节、一个积分环节和两个惯性环节。系统的两个转折频率分别为  $\omega_1=5, \omega_2=50$ , 然后根据折线法绘制系统对数幅频特性的渐近线。

为求系统的相位裕量,需要先求系统的截止频率  $\omega_c$ 。如图 5-40 所示,根据三角形的相似性可得,  $20\lg \frac{10}{\omega_1} = 40\lg \frac{\omega_c}{\omega_1}$ , 可得截止频率  $\omega_c = \sqrt{10\omega_1} = 7.07 \text{ rad/s}$ 。

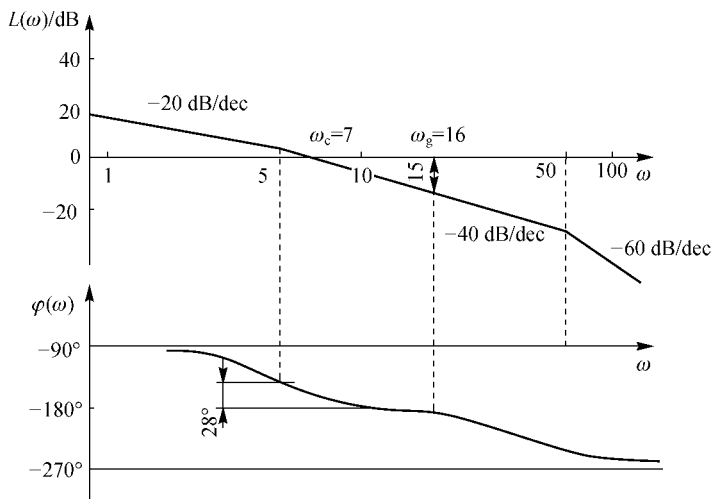


图 5-40 例 5-12 系统伯德图

将  $\omega = \omega_c$  代入系统相位公式  $\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan 0.2\omega - \arctan 0.02\omega$ , 求得相位裕量  $\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 27.22^\circ$ 。

由图 5-40 可测量得知,当  $\omega = \omega_g = 16 \text{ rad/s}$  时,对应  $\varphi(\omega) = -180^\circ$ , 即得系统的增益裕量为  $L(\omega_g) = -15 \text{ dB}$ , 即  $K_g = 15 \text{ dB}$ , 所以系统稳定,当然也可以通过解析的方法求取控制系统的相位交界频率  $\omega_g$ 。

对于前面论及的条件稳定系统,有时加大增益会使系统从不稳定过渡到稳定,这时根据稳定裕量规则进行计算将会发现,相位裕量和增益裕量两个指标对系统的稳定程度进行判别有时可能会得出矛盾的结论。如果只用增益裕量或相位裕量判断系统的稳定程度,会不足以说明系统的相对稳定性。严格地讲,应当同时给出控制系统的相位裕量和增益裕量,才能够确定系统的稳定性程度。对于这样的系统,最好是借助于根轨迹图来判断其稳定性。

对于最小相位系统,开环对数幅频曲线和对数相频曲线存在单值对应关系,仅考虑适当的相位裕量并且指明了频率值,就可以防止系统中元部件变化造成的不稳定影响。

为了帮助分析,O. J. M. Smith 于 1958 年引入了向量裕度这一概念,定义为奈奎斯特曲线上点到临界点 $(-1, j0)$ 的最近距离。因为向量裕度是一个单独的裕度参数,所以它消除了因同时使用  $K_g$  和  $\gamma$  评价稳定性带来的多义性。过去,这一参量因难以计算而得不到广泛应用,但是,随着计算机辅助分析设计的广泛推广,运用向量裕度来描述系统的稳定性变得越来越可行了。

## 5.5 开环频率特性与系统性能的关系

### 5.5.1 开环对数频率特性的基本性质

控制系统的校正,目的是为了系统的性能能够满足系统设计的要求,而控制系统的特性要求与分析、设计的对数幅频特性曲线有关系。

首先,将控制系统的开环伯德图中的对数幅频特性分为三个频段,控制系统开环对数幅频特性图的中频段对应于对数幅频特性穿越截止频率  $\omega_c$ 。这一段,在  $\omega_c$  的前、后会有一个转折频率,中间的这一段称为中频段。 $\omega$  频率值比较低的部分称为低频段, $\omega$  频率值比较高的部分称为高频段。

控制系统稳态误差终值除了与输入信号有关,还和控制系统的传递函数有关,具体体现为开环系统传递函数的型别和增益倍数。而由系统伯德图的低频段可以分析确定出系统的开环增益及串联的积分环节个数,这样就包含了确定系统稳态误差终值  $e_{ss}$  的全部信息,可见低频段决定了系统的稳态误差。对系统的期望特性与系统开环伯德图的对应关系描述如下:通常期望低频段幅值增益要高,斜率要大,这样会使控制系统的稳态误差终值减小。

由图 5-40 可知,系统幅频特性曲线在截止频率  $\omega_c$  处对应斜率为  $-40$  dB/dec,对应的相位为  $-153^\circ$  左右,这个相位没有超出  $-180^\circ$ ,这个系统是稳定的,还具有稳定的相位裕量  $\gamma = 27.22^\circ$ 。如果系统开环增益  $K$  减小,则系统的对数幅频特性曲线向下平移,系统的相频特性曲线没有变化。截止频率  $\omega_c$  变小,即伯德图上表现为  $\omega_c$  向低频段移动,且相应的截止频率  $\omega_c$  处对应斜率很可能变为  $-20$  dB/dec,系统的相位裕量  $\gamma$  变大,稳定性增强。因此,可以认为中频段斜率为  $-20$  dB/dec 时对应的稳定性比斜率为  $-40$  dB/dec 时要好。

如图 5-41 所示,若开环增益  $K$  增大,则截止频率向相反方向移动, $\omega_c$  变大,系统的相位裕量变小,甚至可能变得不稳定。由此得到下面的结论:如果中频段的斜率为  $-40$  dB/dec,系统可能稳定也可能不稳定,即使稳定,相位裕量也比较小;如果中频段的斜率是  $-20$  dB/dec,系统一般来说是稳定的;如果中频段斜率是  $-60$  dB/dec,系统一般是不稳定的。这是稳定性与中频段斜率的关系。在工程应用中一般对中频段的宽度也有要求,期望越宽越好。

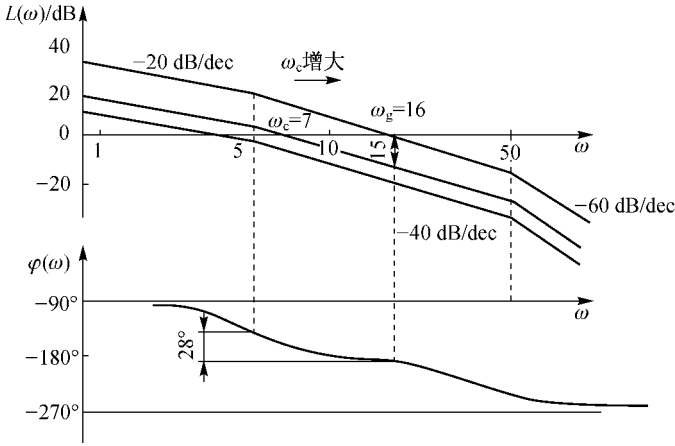


图 5-41 开环系统增益变化对截止频率的影响

对于某一系统,若相位裕量很小,即  $\gamma \approx 0^\circ$ ,由奈奎斯特图可知,此时开环系统的频率特性  $G(j\omega)H(j\omega) \approx -1$  成立,则闭环系统的频率特性  $\Phi(j\omega) = \frac{G(j\omega)H(j\omega)}{1+G(j\omega)H(j\omega)} \rightarrow \infty$ ,说明闭环系统出现谐振,即意味着在单位阶跃下,闭环系统振荡。 $\gamma$  越小,则系统越不稳定,这就是它们之间的定性关系。当然,控制系统的振荡倾向在工程上通常被认为是有害的,为了避免谐振出现,就必须在一切实频段避免开环对数幅频特性曲线约为 0 dB 时,相位对应  $-180^\circ$ 。可以证明,在一定条件下,闭环谐振峰值  $M_r$  与相位裕量  $\gamma$  之间具有近似的经验公式  $M_r \approx \frac{1}{\sin \gamma}$ 。

系统的高频段通常需要距中频段足够远,以减小其对  $\omega_c$  相位的影响。

开环系统的伯德图与闭环系统的稳态误差、稳定性、瞬态性能等指标具有密切的关系。由于伯德图画法简便,同根轨迹图和奈奎斯特图相比,伯德图上可以反映更多的闭环系统的性能。因此,可以归纳出开环伯德图的本质特征为:对数幅频特性低频渐近线与系统稳态误差的关系;对数幅频特性中频段特性与系统稳定性、动态性能的关系;对数幅频特性高频段与系统抗噪声干扰性能的关系。这样,在实际应用中,当系统在某些频率范围存在着严重噪声时,可应用频率法,设计出能够很好抑制这些噪声的控制系统。

### 5.5.2 系统特性和闭环频率特性的关系

系统的频率特性与频域性能指标关系密切,存在某种依存关系,如图 5-42 所示为闭环系统的频域特性图。

通常系统的频域性能指标具有以下几种:

(1) 系统的截止频率  $\omega_b$ 。系统的截止频率指系统的对数幅频特性下降  $-3$  dB(或幅值下降为  $\frac{A(0)}{\sqrt{2}}$ )时所对应的频率。频宽指系统的频率从零开始,对数幅频特性下降  $-3$  dB 时所对应的频率范围。一般情况下,所求的截止频率就是系统的频宽。

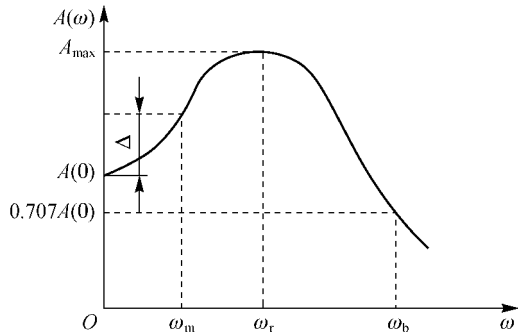


图 5-42 闭环系统的频域特性图

(2) 谐振频率  $\omega_r$ 。谐振频率指系统产生峰值时对应的频率。

(3) 谐振峰值  $M_r$ 。谐振峰值指在谐振频率处对应的幅值。

频率特性的谐振峰值  $M_r$  较大时, 对应时域阶跃响应的超调量  $M_p\%$  必然也比较大; 谐振频率  $\omega_r$  较高时, 相应的峰值时间  $t_p$  值可能较小; 而截止频率  $\omega_b$  越高, 则系统的快速反应性越好, 相应的时域响应的调节时间  $t_s$  就会越短。

一般地, 一阶、二阶系统的频域性能指标与系统参量之间有较为直观的解析关系。对于具有单位反馈的一阶系统, 其闭环传递函数为  $\Phi(s) = \frac{1}{Ts+1}$ , 则系统的闭环幅频特性表达式为

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \quad (5-30)$$

由式(5-30)可知, 由于  $M(\omega)$  为一单调衰减函数, 故不存在谐振峰值  $M_r$  和谐振频率  $\omega_r$ 。通过式(5-30)可求得系统截止频率  $\omega_b = \frac{1}{T}$ , 与一阶系统的时域指标——调节时间  $t_s$  的表达式  $t_s = 4\tau$  (取到达稳态值 98% 的时间) 比较可知,  $t_s$  与  $\omega_b$  成反比。

对于开环传递函数为  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$  的二阶系统, 其对应的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

二阶系统的闭环频率特性为

$$\Phi(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}} = M(\omega) e^{j\alpha} \quad (5-31)$$

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\zeta \frac{\omega}{\omega_n})^2}} \quad (5-32)$$

$$\alpha(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

分析可知, 当  $0 \leq \zeta \leq 0.707$  时, 二阶系统的幅频特性  $M(\omega)$  将出现峰值。令  $\frac{dM}{d\omega} = 0$ , 不难求得其闭环系统的谐振频率  $\omega_r$ , 将  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$  代入式(5-31), 求得谐振峰值为  $M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$ 。令式(5-30)中的幅频特性  $M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 可求得系统对应的截止频率为  $\omega_b = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2 + \sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}$ 。

$0 \sim \omega_b$  间的频率段称频带宽度, 简称带宽。对二阶系统的频域性能指标进行分析, 可知谐振峰值  $M_r$  和二阶系统的超调量  $M_p\%$  只与阻尼比  $\zeta$  有关, 这样可获得两者之间的定量关系为

$$M_r = 1.09 + M_p\% \quad (0.4 \leq \zeta \leq 0.7) \quad (5-33)$$

相位裕量  $\gamma$  与阻尼比  $\zeta$  之间的关系为

$$\zeta \approx 0.01\gamma \quad (\zeta \leq 0.07)$$

借助以上这些公式可以看到,给出系统相位裕量  $\gamma$ ,就可以推断出闭环阶跃响应的超调量  $M_p\%$  是怎样的。对于一阶和二阶系统,相位曲线永远不会穿过  $-180^\circ$ ,增益裕量  $K_g$  总是为无穷大,因而它并不是一个有用的设计参数。

对于高阶系统,获得其开环频率特性后,绘制其对数频率特性图没有多大困难,进而可以较容易地进行稳定性分析和相对稳定性分析,在图中可以方便地确定系统的相位裕量和增益裕量。然而类似于前面一阶、二阶系统的定量精确分析方法,求取系统闭环频率特性的解析表达式,并进而得到系统较全面的性能指标,对于高阶系统而言并非易事。

在计算机尚未普及的年代,求取高阶系统的闭环频率特性主要是利用尼柯尔斯图线,根据已知开环系统的对数频率特性曲线,通过手工计算和绘制的方式求取系统的闭环频率特性,然后据此进一步求出高阶系统的频域性能指标。随着计算机的发展和普及,更凸显这种方法烦琐、费时且精度较低的弊病,因此已很少在实际中应用了。如今,主要是利用计算机的控制系统辅助设计软件去求取控制系统的闭环频率特性及其各项性能指标。

此外,高阶系统的时域响应可以认为是由若干一阶和二阶系统的时域响应叠加而成的,通过利用主导极点的概念可以将高阶系统等效为二阶系统,进而在一定条件下,上述所分析的关于二阶系统的时域与频域性能指标的关系即可适用于高阶系统。因此,根据二阶系统的频率特性与系统参数、结构之间的密切关系,就可以研究高阶系统的频率特性,把系统的参数、结构变化和瞬态响应性能指标与频域指标之间的对应关系联系起来。

## 5.6 应用 MATLAB 绘制系统频率特性曲线

MATLAB 的控制系统工具箱具有丰富的线性连续系统频域分析功能,主要是处理以传递函数为主要特征的经典控制和以状态空间为主要特征的现代控制中涉及的问题。

### 5.6.1 用 MATLAB 绘制系统开环对数频率特性曲线

频率特性在经典控制里占有重要的地位,应用 MATLAB 提供的专用仿真函数并与其他函数命令、语句一起编制程序,实现控制系统相关功能的分析、设计,这是在 MATLAB 指令方式下进行计算机仿真应用的非常实用的方法。

对于连续系统,用 MATLAB 函数绘制系统开环对数频率特性的函数命令调用格式如下

```
Bode(sys);
Bode(sys,w);
Bode(sys1,sys2,...,sysN);
Bode(sys1,sys2,...,sysN,w);
[mag,phase,w]=Bode(sys);
```

Bode() 函数用于计算并显示线性时不变系统的开环对数频率图,若调用左方无输出变量时,就在当前图形窗口进行伯德图绘制,此函数可用于 SISO 或者 MIMO 的连续时间系统;Bode(sys) 可用于连续或离散时间系统,其中对象 sys 可以由 tf()、zpk()、ss() 中任何一个函数建立的系统模型,绘制时的频率范围将依据具体的系统零、极点绘制。对于离散

控制系统伯德图, 应需将  $s$  域的函数表达式变换为  $\omega$  域的函数, 再使用 `Bode(num, den)` 函数绘制。

控制系统伯德图的绘制在应用时可采用命令窗口或 M 文件的形式, 首先输入系统模型函数。为了简便绘制伯德图, 引入了对数渐近幅频特性曲线的概念, 这种方法是存在误差的, 不精确。采用 MATLAB 的 `Bode()` 函数绘制的控制系统伯德图则是数值精准且美观的真实曲线。

**例 5-13** 试绘制振荡环节  $G(s) = \frac{100}{s^2 + 20\zeta s + 100}$  的伯德图, 其中阻尼系数  $\zeta$  取值分别为 0.1、0.2、0.3、0.5、0.7、1.0。

**解** MATLAB 程序代码如下

```
ks=[0.1,0.2,0.3,0.5,0.7,1.0];
om=10;
for i=1:length(ks);
num=om*om;
den=[1,2*ks(i)*om,om*om];
Bode(num,den);
hold on;
end;
grid;
```

可获得振荡环节的伯德图如图 5-43 所示。

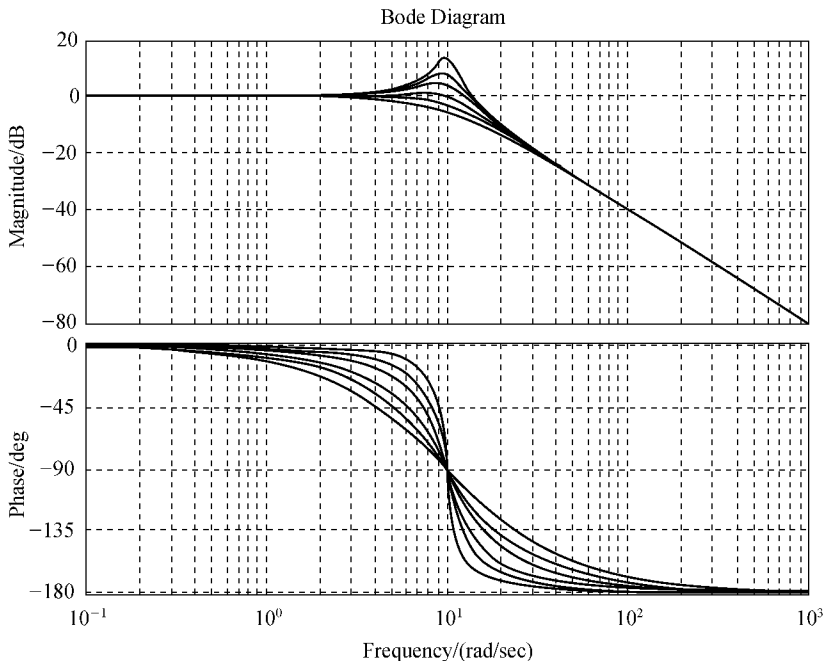


图 5-43 例 5-13 开环系统伯德图

求取控制系统的增益裕量  $GM$ 、相位裕量  $PM$  和相位交界频率(也称交叉频率)  $\omega_g$ 、穿越频率  $\omega_c$ , 可以使用 `margin()` 函数计算控制系统的相关稳定裕量值。

通常使用如下语句

$$[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = \text{margin}(\text{num}, \text{den});$$

$$[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = \text{margin}(\text{mag}, \text{phase}, \text{w});$$

其中,  $\omega$  为伯德图对应的频率特性向量, 当左端不带输出变量引用时,  $\text{margin}()$  函数可在当前窗口中绘制出相关稳定裕量的伯德图。

**例 5-14** 已知某开环系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1}$$

试求该系统的相位裕量和增益裕量。

**解** MATLAB 程序代码如下

```
num=[1];
```

```
den=[1,0.4,1];
```

```
Bode(num,den);
```

```
grid;
```

```
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(num,den);
```

运行后, 获得系统伯德图如图 5-44 所示,  $\text{margin}$  函数返回值表明系统的增益裕量  $GM = \text{Inf}$ , 相位裕量  $PM = 32.8443$ , 对应的频率点值为  $\omega_{cg} = \text{Inf}$ ,  $\omega_{cp} = 1.3567 \text{ rad/s}$ , 与伯德图图示相一致。

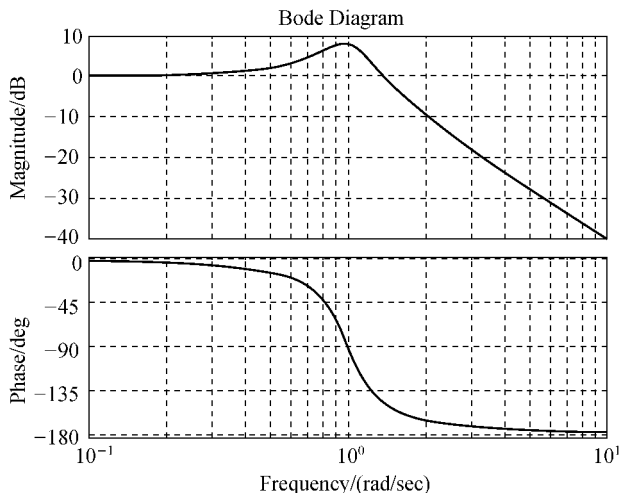


图 5-44 例 5-14 开环系统伯德图

借助 MATLAB 仿真软件, 还可以很方便地分析系统的闭环频率特性。此外, 还可以利用  $\text{evalfr}(\text{sys}, f)$  函数来计算控制系统单个频率点的频率特性, 利用  $\text{freqresp}(\text{sys}, \omega)$  函数计算线性时不变(LTI)对象在实频率点  $\omega$  处的频率特性  $H$ , 其中  $H$  为表征频率点的向量。

### 5.6.2 用 MATLAB 绘制系统开环幅相频率特性曲线

在线性定常反馈控制系统的频率特性表示方法中, 能清楚地表明系统开环幅相频率特性的奈奎斯特图同伯德图一样得到了广泛应用。对于某一给定状态, 有时采用奈奎斯特图分析问题更为方便。



用 MATLAB 函数绘制系统开环幅相频率特性的函数命令调用格式如下

```
Nyquist(sys);
Nyquist(sys,w);
Nyquist(sys1,sys2,...,sysN);
Nyquist(sys1,sys2,...,sysN,w);
[mag,phase,w]=Nyquist(sys);
```

使用奈奎斯特函数可以非常容易地计算并绘制出 LTI 系统的奈奎斯特曲线。奈奎斯特曲线则可以用于分析控制系统包括相位裕量、增益裕量及稳定性在内的系统特性,当调用左方无输出变量时,奈奎斯特函数会在当前窗口中直接绘制出奈奎斯特开环幅相频率特性曲线。

**例 5-15** 绘制一阶惯性环节  $G(s) = \frac{3}{5s+1}$  的奈奎斯特图。

**解** MATLAB 仿真程序代码如下

```
G=tf(3,[5,1]);
Nyquist(G);
hold on;
title('Nyquist 图');
```

运行后,获得如图 5-45 所示曲线。

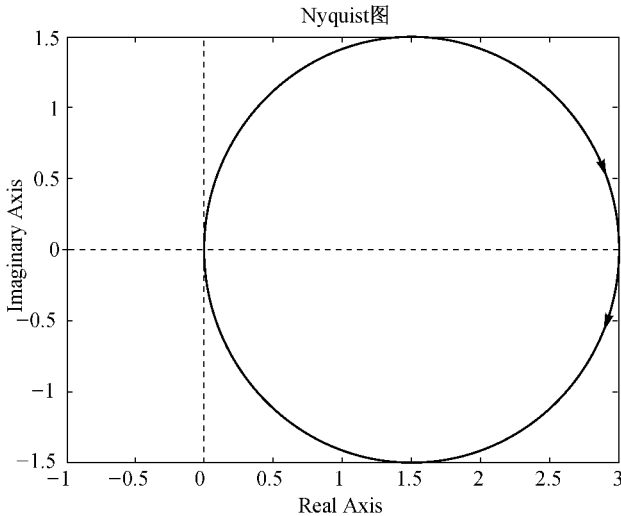


图 5-45 例 5-15 系统极坐标曲线图

**例 5-16** 用函数  $\text{Nyquist}(\text{sys})$  绘制开环传递函数为  $G(s) = \frac{2.7}{s^3 + 5s^2 + 4s + 2}$  的系统的奈奎斯特曲线,并利用曲线来判别闭环系统的稳定性。

**解** MATLAB 仿真程序代码如下

```
num1=[2.7];
den1=[1,5,4,2];
sys1=tf(num1,den1);
Nyquist(sys1);
```

title('Nyquist 图');

运行后,获得如图 5-46 所示曲线。

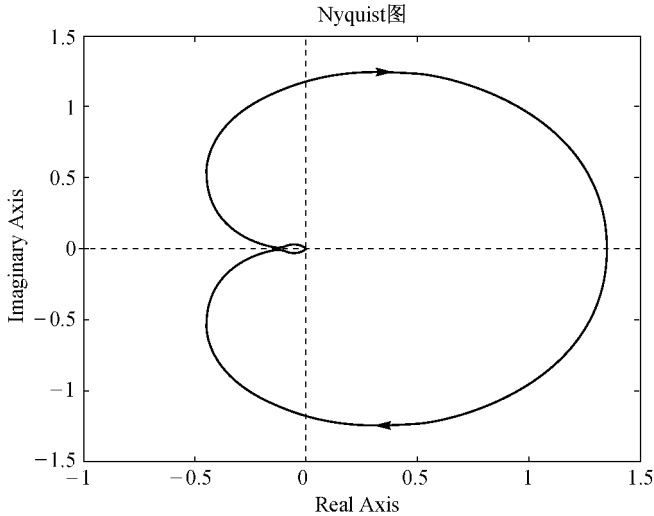


图 5-46 例 5-16 系统极坐标曲线图

此系统为最小相位系统,故  $P=0$ 。由图 5-46 可知奈奎斯特曲线不包围  $(-1, j0)$  点,则  $R=0, Z=P-R=0$ ,所以此系统闭环稳定。

## 本章小结

频域分析法是利用频率特性研究自动控制系统的一种经典方法,频率特性是根据线性定常系统在正弦信号作用下输出的稳态分量而定义的,但它能反映系统动态过程的性能,故可视为动态数学模型。频率特性法的突出优点是组成系统的元部件及被控对象的数学模型若不能直接从理论上推出和计算时,可以通过实验直接求得频率特性来分析系统的性能。

本章重点介绍频域分析方法的基本概念,系统开环频率特性的绘制方法和最小相位系统开环频率特性的特点,频域稳定性判据和应用 MATLAB 仿真软件进行控制系统频率曲线的绘制与分析等基本内容。

频率特性有明确的物理意义,很多元部件的这一特性都可以用实验的方法确定,这对难以分析其物理规律来列出微分方程的元部件和系统,有很重要的工程实际意义。

传递函数的极点和零点均在  $S$  平面左方的系统称为最小相位系统。由于这类系统的幅频特性和相频特性之间有着唯一的对应关系,因而只要根据它的对数幅频特性曲线就能写出对应系统的传递函数。

应用奈奎斯特稳定性判据,可以根据系统的开环频率特性,研究闭环系统的稳定性,而不必求解特征方程的根,此外这种判据能从图形上直观地看出参数的变化对系统性能的影响,并提示改善系统性能的信息。

对于二阶系统,频率特性和瞬态特性的性能指标之间有确定的对应关系,而高阶系统也存在类似的关系。因为系统的频率特性与系统参数、结构之间有着密切关系,所以可以利用

研究频率特性的方法,把系统的参数、结构变化和瞬态响应性能指标之间联系起来。

考虑到系统内部参数和外界环境的变化对系统稳定性的影响,要求系统不仅能稳定地工作,而且还需有足够的稳定裕量。稳定裕量通常用相位裕量和增益裕量来表示。在控制工程中,一般要求系统的相位裕量在  $30^\circ \sim 60^\circ$  范围内,这是十分必要的。

频域分析以输入信号的频率为变量,在频域研究系统的结构参数与性能的关系,揭示了信号内在的频率特性以及信号时间特性与其频率特性之间的密切关系。

## 习 题 5

5-1 单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

若输入信号  $r(t) = 2\sin 2t$ , 试求系统的稳态输出和稳态误差。

5-2 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{T_s}{T_s + 1}$$

要求绘制该系统的幅相曲线。

5-3 某 0 型控制系统,开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

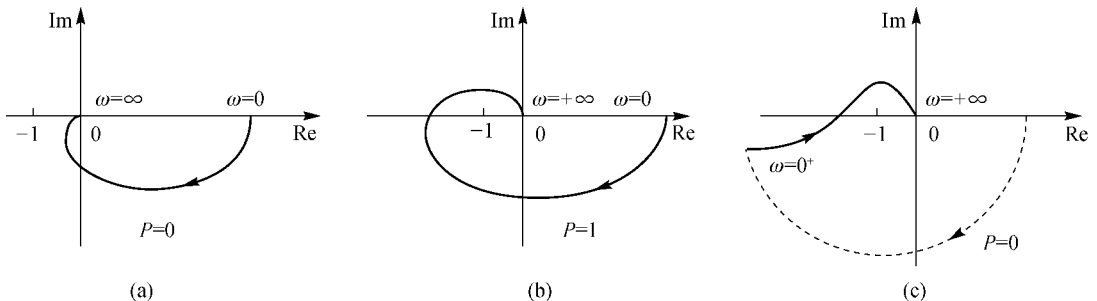
试简略绘制系统开环幅相曲线。

5-4 控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(1+s)(1+2s)}$$

试绘制系统的幅相曲线。

5-5 如图题 5-5 所示的奈奎斯特曲线中,判别哪些是稳定的,哪些是不稳定的?



图题 5-5

5-6 试证明传递函数  $G(s) = \frac{T_s}{1+T_s}$  的极坐标图是一个半圆,并求圆心和半径。

5-7 已知两个单位反馈系统开环传递函数分别为

$$G_1(s) = \frac{2.7}{s^3 + 5s^2 + 4s}, G_2(s) = \frac{2.7}{s^3 + 5s^2 - 4s}$$

试利用 MATLAB 绘制系统的伯德图,并判别系统的稳定性。

**5-8** 一单位负反馈控制系统,其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.2s+1)}$$

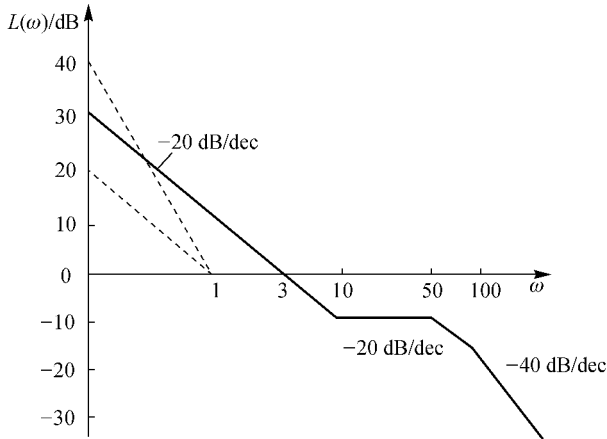
试分别求  $K=2$  和  $K=20$  时,系统的相位裕量和增益裕量的分贝值。

**5-9** 一单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{7}{s(0.087s+1)}$$

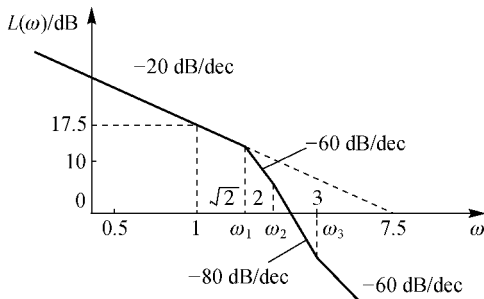
试绘制近似对数幅频曲线。

**5-10** 最小相位系统对数幅频渐近特性如图题 5-10 所示,请确定系统的传递函数。



图题 5-10

**5-11** 某最小相位系统对数幅频渐近特性如图题 5-11 所示,请确定该系统的传递函数。



图题 5-11